X Olimpiada Problemas fase Castellón. Año 1999

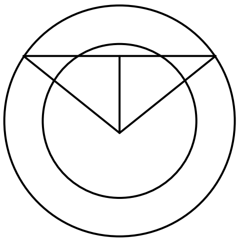
CATEGORÍA 12-14 AÑOS

PROBLEMA 1. Geometría.

Dadas dos circunferencias concéntricas, se sabe que la longitud de la cuerda de la circunferencia mayor, que es tangente a la circunferencia menor, mide 26 m. Halla el área de la corona circular correspondiente.

Solución:

Trazamos la perpendicular a la cuerda por el centro de las circunferencias:



Llamamos r al radio de la circunferencia pequeña y R al de la grande. Por el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{26}{2}\right)^2$$

$$R^2 = r^2 + 169$$

$$R^2 - r^2 = 169$$

El área de la corona circular es por tanto

$$\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot 169$$

PROBLEMA 2. Geometría.

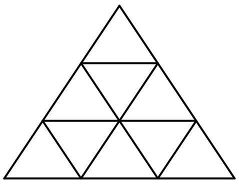
En una exposición de cerámica se han presentado este mosaico en forma de hexágono de lado 3, construido con 54 piezas triangulares.

¿Cuántas piezas se necesitarían para construir un mosaico con la misma forma pero de lado 20?

¿Cuántas piezas se necesitarían, en general, para construir un hexágono de lado *n*?

Solución:

El hexágono se puede descomponer en 6 partes de la forma



en la que cada "nivel" tiene 2 triángulos más que el superior. Si queremos construir un mosaico de lado 20 serán necesarios

$$6\cdot\left(1+3+5+7+\ldots+35+37+39\right)=6\cdot\left(\left(1+39\right)+\left(3+37\right)+\left(5+35\right)+\ldots+\left(19+21\right)\right)=$$

$$=6\cdot\left(40\cdot 10\right)=2400 \text{ piezas}$$

Para construir un hexágono de lado n se necesitarán

$$6\cdot\left(1+3+5+\ldots+\left(2n-5\right)+\left(2n-3\right)+\left(2n-1\right)\right)=$$

$$=6\cdot\left(1+\left(1+2\right)+\left(1+2.2\right)+\ldots+\left(1+2\left(n-3\right)\right)+\left(1+2\left(n-2\right)\right)+\left(1+2\left(n-1\right)\right)\right)=$$

$$=6\cdot\left(n+2\left(1+2+3+\ldots+\left(n-1\right)\right)\right)=6\cdot\left(n+2\frac{\left(n-1\right)n}{2}\right)=6n^2 \text{ piezas}$$

PROBLEMA 3. Funciones.

A y B son padre e hijo y caminan a 4 Km/h. El perro escapa del padre y corre a 10 Km/h. hasta encontrar al hijo. Entonces vuelve hasta el padre y repite la operación hasta el momento del encuentro. ¿Qué distancia habrá recorrido el perro en total?

Solución:

Cada uno va al encuentro del otro a una velocidad de 4 Km/h, por tanto tardarán media hora en recorrer los 4 Km que les separan y encontrarse. En esa media hora el perro habrá recorrido $\frac{10}{2} = 5$ Km en total.

PROBLEMA 4. Geometría.

En este dibujo las longitudes *SP*, *SQ* y *SR* son iguales y el ángulo $S\hat{R}Q$ es igual a *X*. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{Q}R$?

Solución:

Como el triángulo $S\overset{\triangleright}{P}Q$ es isósceles los ángulos $S\hat{P}Q$ y $P\hat{Q}S$ son iguales.

Análogamente los ángulos $Q\hat{R}S$ y $S\hat{Q}R$ son iguales pues el triángulo $S\overset{\triangleright}{Q}R$ también es isósceles.

Llamamos $S\hat{P}Q = P\hat{Q}S = \hat{X}$

$Q\hat{R}S = S\hat{Q}R = \hat{Y}$

La suma de los 3 ángulos del triángulo $S\overset{\triangleright}{Q}R$ es 180º, luego:

$$180º = S\hat{P}Q + P\hat{Q}R + Q\hat{R}S = \hat{X} + P\hat{Q}R + \hat{Y}$$

Además

$$P\hat{Q}R = P\hat{Q}S + S\hat{Q}R = \hat{X} + \hat{Y}$$

Sustituyendo el valor de $P\hat{Q}R$ en la primera ecuación se tiene

$$180º = \hat{X} + (\hat{X} + \hat{Y}) + \hat{Y} = 2\hat{X} + 2\hat{Y} = 2(\hat{X} + \hat{Y})$$

De donde

$$90º = \hat{X} + \hat{Y} = P\hat{Q}R$$

PROBLEMA 5. Ingenio.

Dos jugadores eligen por turnos un número entre el 1 y el 10, y lo van sumando a los números elegidos anteriormente. El primer jugador que consigue sumar exactamente 100 es el ganador.

Éste puede ser un ejemplo de partida

Jugador A	3		10		7		10		8		9		6
Jugador B		8		9		6		9		10		5	
Suma	3	11	21	30	37	43	53	62	70	80	89	94	100

En este caso ganaría el jugador A

Explica la estrategia para ganar siempre.

Solución:

La estrategia para ganar siempre consiste en "controlar" los números 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 y 100.

El jugador A comienza eligiendo el 1.

El jugador B elegirá un número cualquiera pero la suma estará comprendida entre 2 y 11.

El jugador A elige el número necesario para que la suma valga 12.

Elija lo que elija el jugador B la suma estará comprendida entre 13 y 22.

El jugador A elige el número necesario para que la suma valga 23.

Elija lo que elija el jugador B la suma estará comprendida entre 24 y 33.

El jugador A elige el número para que la suma valga 34.

Procediendo de esta forma sucesivamente el jugador A elegirá el número para que la suma valga 89.

Elija lo que elija el jugador B la suma estará comprendida entre 90 y 99, lo que deja la victoria en manos de A.