S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

PROBLEMES OLÍMPICS

Revista de *problemes* de Matemàtiques
Número 62. Desembre 2011

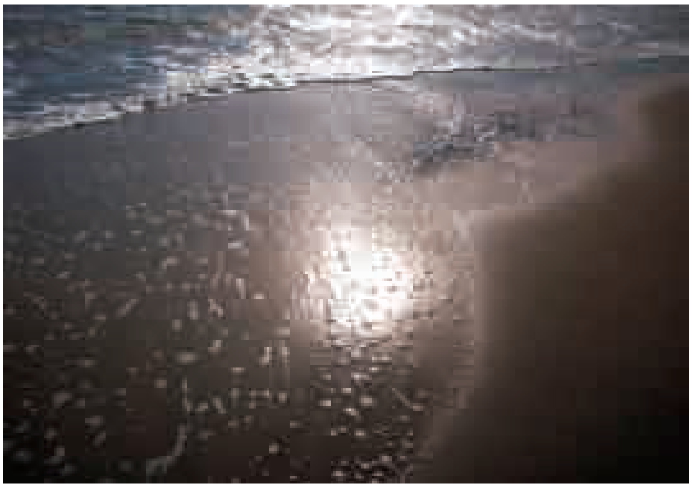
GALERIA DE FOTOS PARTICIPANTS AL XII CONCURS DE FOTOGRAFIA “MATEMÀTICA A LA VISTA”

“Creu sobre rectangle”.
Jonathan Mariano. IES Bocairent

“Se están acabando”. Hayzam Luna.
Col·legi Paidos (Dènia)

“Casquete esférico”
Mario Alcocer. Col·legi Paidos (Dènia)

“Hipérbola”
Antonio Mas. Col·legi Paidos (Dènia)



“Marea ondulada” Jorge Blanco
IES San Vicent Ferrer (València)

“Fibonacci floral”. Rubén Hernandis
IES Camp de Morvedre (Sagunt)

Ací teniu el número 62 de **PROBLEMES OLÍMPICS** corresponent al mes de desembre de 2011. El present número inclou noves activitats i propostes per a treballar a la classe de matemàtiques la resolució de problemes.

Vos recordem les dates de celebració de la propera edició de l'Olimpíada Matemàtica de la Comunitat Valenciana 2012 en les seues diferents fases:

· Fase Comarcal: dissabte 28 d'abril de 2012
· Fase Provincial: dissabte 19 de maig de 2012
· Fase Autonòmica: 9 i 10 de juny de 2012

Teniu tota la informació a la nostra pàgina web: www.semcv.org

PROBLEMES OLÍMPICS
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, "Al-Khwarizmi"
Apartat 22.045
46071-València

D.L.: V-3026-2001
ISSN: 1578-1771

Portada: "Conus invertits" Autor: José Ramón Gil Tárrega. IES Camp de Morvedre (Port de Sagunt). Segon Premi de l'Apartat II del XII Concurs de fotografia matemàtica.

Te falta algun exemplar de la revista Problemes Olímpics? Si vols ens la pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.

SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom_____________ Cognoms____

Adreça____ Telèfon__________________

C.P. _________ Població________________________________ Província________________

Correu-e:______________________ Tasca docent (curs, nivell, etc.)___________________

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

☐ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 1 (Exhaurit)
☐ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 2 (Exhaurit)
☐ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 Nº 3 (1.2 €)

☐ Problemes Olímpics Nº 1	(Exhaurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 32	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 2	(1.2 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 33	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 3	(1.2 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 34	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 4	(Exahurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 35	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 5	(Exhaurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 36	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 6	(Exhaurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 37	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 7	(Exhaurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 38	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 8	(Exhaurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 39	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 9	(Exhaurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 40	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 10	(Exhaurit)	☐ Problemes Olímpics Nº 41	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 11	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 42	(2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 12	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 43	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 13	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 44	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 14	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 45	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 15	(2.4 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 46	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 16	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 47	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 17	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 48	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 18	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 49	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 19	(1.8 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 50	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 20	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 51	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 21	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 52	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 22	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 53	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 23	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 54	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 24	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 55	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 25	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 56	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 26	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 57	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 27	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 58	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 28	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 59	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 29	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 60	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 30	(2.0 €)	☐ Problemes Olímpics Nº 61	(2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 31	(Exhaurit)		

Ens envies aquesta butlleta complimentada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22.045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", incloent el justificant d'ingrés del preu total dels exemplars que sol·licites al nostre compte de BANCAIXA: 2077-0347-10-1101056867.

SUMARI

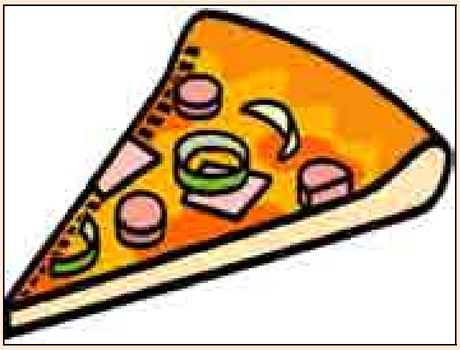
La selecció de problemes de cada nivell i les solucions ha sigut elaborada per l'equip constituït per: José María Ajenjo Vento, Mª Dolors Arnal Bertomeu, Joaquim Arnau Breso, Alejandro Barona Hernández, Vanessa Berto Breto, Carolina Caballero Cuenca, Ana Casas Sanmartín, Mauricio Contreras del Rincón, Mª Teresa Chust Andreu, Vicente Diago Ortells, Ramón Dolz Belenguer, Mª Luisa Fernández Giménez, Isabel García Martínez, Verónica García Ruiz, Mónica Laparra Ibáñez, Antonio Ledesma López, Encarna López Gómez, Eduardo Llopis Castelló, Miguel Marco Cotaina, Tamara Martí Puchalt, Josep Manuel Martínez Canet, Mari Carmen Moreno Esteban, Bibiana Moreno Navarro, Encarnación Moreno Ruiz, Mari Carmen Olivares Iñesta, Ruth Orts García, Tomás Queralt Llopis, Silvia Quilis Marco, Juan Miguel Ribera Puchades, Mª José Riera Ros, Oscar Rosaleñ Olmos, Mª Jesús Ruiz Maestro, Isabel Terraes Bentel, Enrique Vidal Gómez.

Fe d'errades: En la selecció de problemes de cada nivel i les solucions de les proves de la fase provincial de Castelló de la XXII Olimpíada Matemàtica publicades al número 61 de Problemes Olímpics, va participar **Teresa Bort** en lloc de Teresa Bagan

PROBLEMES NIVELL C (TERCER CICLE PRIMÀRIA)

1.- L'EXCURSIÓ

Un grup d'alumnes encarreguen 65 pizzes per anar d'excursió. Per esmorzar es varen repartir una pizza per cada quatre; en el dinar, una pizza per a cada dos i per a berenar, una pizza per a cada tres. Quants alumnes varen anar a l'excursió?



2.- EMBOLIC D'ANIVERSARIS

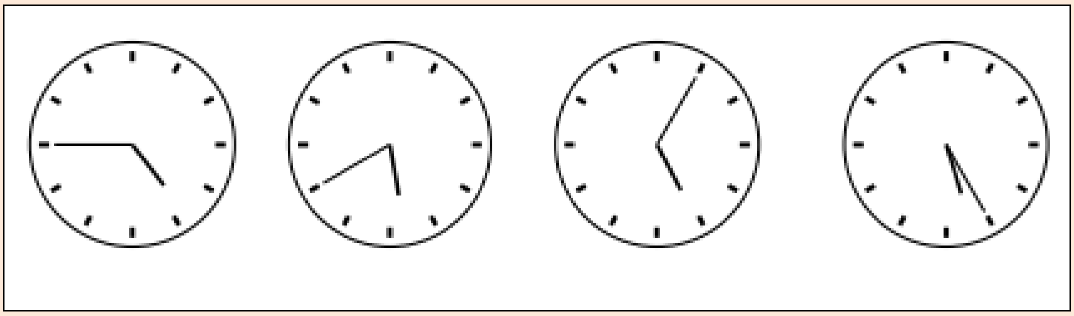
Ací tens desordenats, els aniversaris de Antoni, Júlia, Carles i Pau: 1 de març, 17 de maig, 20 de juliol i 20 de març. Júlia i Carles nasqueren el mateix mes, Antoni i Carles varen nàixer el mateix dia del mes. Qui va nàixer cada dia?

3.- L'EDIFICI

En un edifici es varen numerar totes les portes de les oficines utilitzant taulellets de ceràmica que contenen cadascun un sol dígit. Si en total s'utilitzaren 35 taulellets, quantes portes hi ha en total?

4.- QUIN HORA ÉS?

Només un d'estos rellotges té l'hora correcta; un està avançat 20 minuts, altre està retardat 20 minuts i l'altre està parat des d'ahir. Quin hora és?



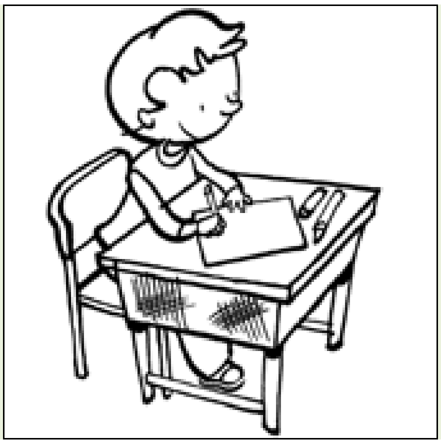
5.- DÍGITS DESAPAREGUTS

Quant sumen els dígits desapareguts en la següent operació?

$$\begin{array}{r} \square\,7\,2 \\ -\ 3\,\square\,8 \\ \hline 4\,7\,\square \end{array}$$

6.- QUIN COL·LEGI!!

Un col·legi té 657 alumnes. N'hi ha 384 alumnes en 3r d'ESO o cursos superiors i 376 alumnes en 3r d'ESO o cursos inferiors. Quants alumnes hi ha en 3r d'ESO en eixe col.legi? (suposem què el total de cursos és 12 i què 3r d'ESO és l'any nové).



7.- ENCREUAT NUMÈRIC

És paregut a un encreuat normal, però les respostes són números amb un dígit en cada casella. Quin dígit imparell entre 1, 3, 5, 7 i 9 no aparéix en la solución a aquest encreuat numèric?

Horitzontals
3. Cub
4. Cub

Verticals
1. Cub
2. Quadrat
3. Cub

	3	1	2
	■		
3			
4			

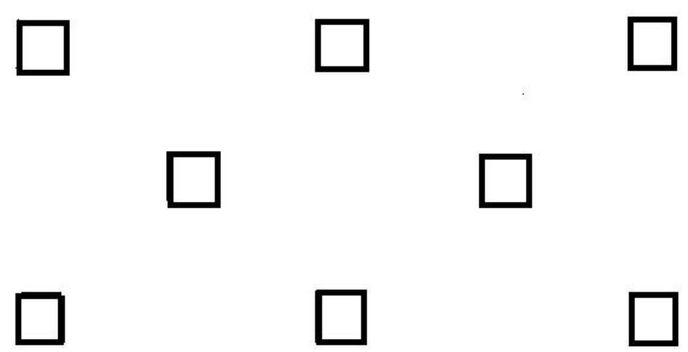
8.- LA SÈRIE

Fixa´t be en esta sèrie i escriu una fila més

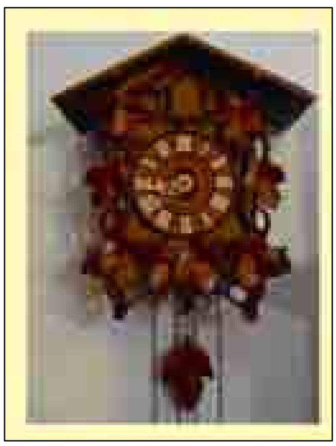
1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211

9.- ELS HUIT CUADRETS

Sense alçar el llàpis del paper, dibuixa una línia contínua de manera que cada quadrat estiga en un área tancada separada de les demés:



10.-A QUIN HORA VA ENTRAR LLUIS?



El meu amic Lluís te en la seua casa un rellotje de paret extraordinari. Amb un so molt agradable toca les hores i, també, cada mitja hora dona una campanada. Una nit que el meu amic va eixir, en arribar a sa casa, en el moment en el que va obrir la porta va sentir una campanada. Es va gitar i, com no podia adormir-se en passar mitja hora va sentir una altra campanada. Mitja hora més tard una altra i encara va sentir una més al passar mitja hora. Cinc minuts més tard aconseguia adormir-se.
Podries dir a quin hora arribà a sa casa?

11.-LES NOU XIFRES

Amb les xifres de l'1 al 9- recorda que el 0 no hi es- construeix tres números de tres xifres cadascun, de forma que el segon siga el doble del primer, i el tercer siga el triple del primer. Està totalmente prohibit repetir cap xifra.

12.- EL PLANETA WI

Al planeta WI utilitzen un alfabet amb les 27 lletres del castellà. Cada paraula està formada per dos lletres: una consonant i una vocal i viceversa (recorda que la Y és consonant). Quantes paraules distintes tenen al planeta WI?

A més a més, volen publicar un diccionari ordenat segons el nostre alfabet. Quina será la primera paraula de cada diccionari?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T
			U	V	W	X	Y	Z		

13.- EL CAVALL

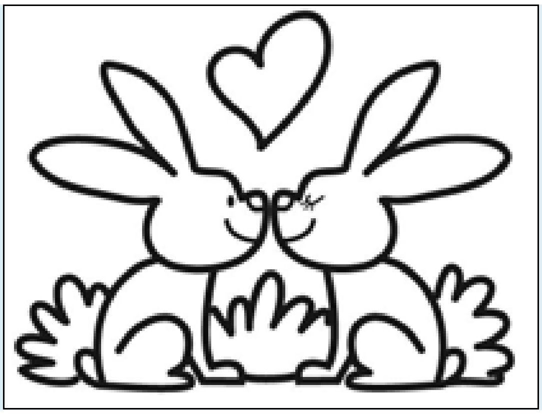
Una persona vol vendre el seu cavall i el comprador li demana preu. La persona què cuida el cavall diu: "el cavall té quatre ferradures i cada ferradura sis Claus. M'has de pagar una moneda pel primer clau, dos pel segon, quatre pel tercer, huit pel quart i així fins als 24 claus de les ferradures del cavall". Quàntes monedes val el cavall?

14.- ANIMALS

Canvia cada animal per un valor de manera què es complisquen les següents operacions. Intervenen els següents nombres: 0, 1, 2, 3, 5, 6 i 7. Pista: el 7 què observes és l'únic que hi ha.

	CONILL	VESPA	TORTUGA
+	PINGÜÍ	VESPA	PINGÜÍ
	COLOM	FORMIGA	CONILL

VESPA + TORTUGA = COLOM
VESPA + PINGÜÍ = 7
CONILL – TORTUGA = PINGÜÍ



15.- QUADRAT MÀGIC

Col·loca en un quadrat 3x3 els nombres de l'1 al 9 de manera que cada fila, columna i diagonal sumen 15.

PROBLEMES NIVELL A (PRIMER CICLE ESO)

1.- QUADRAT MÀGIC

Col·loca els nombres de l'1 al 9, sense repetir-los, en les caselles de manera que el producte dels tres nombres de cada fila siga el nombre indicat a la seua dreta, i el producte dels tres de cada columna done com resultat el nombre indicat baix. Explica els passos seguits.

			70
			48
			108
64	126	45	

2.- CAMPIONAT DE FUTBOL

En un campionat de futbol, cadascun dels equips participants ha de jugar contra tots els altres a partit únic. Si en total es van celebrar 91 partits, Quants equips van participar en el campionat?

3.- BLANC I NEGRE

Ens donen un tauler que està format per caselles blanques o negres. Les caselles estan tapades per un paper amb un nombre cadascuna . La xifra que apareix en cada casella indica el nombre de caselles negres que té al voltant (inclosa ella mateixa). Es tracta de descobrir les caselles blanques i negres del tauler

0	1	3	3
2	4	6	5
2	4	5	4
2	3	3	2

4.- EL MENTIDER

Quatre amics assisteixen al cinema però solament tres han pagat l'entrada. El porter els pregunta per a saber qui és el que no l'ha pagat.

- Jo no he sigut, diu Carlos.

- Ha sigut Juan, diu Arturo.

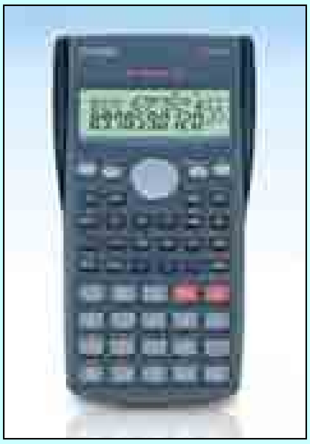
- Ha sigut Luis, diu Juan.

- Arturo menteix, diu Luis.

Sabent que solament un d'ells menteix. Qui no ha pagat l'entrada?

5.- LA CLAU

La clau de la meua taquilla és un numero de quatre xifres que és un quadrat perfecte, té les dues primeres xifres iguals i les dues últimes també iguals. De quina clau es tracta?



6.- LA CAIXA FORTA

En un banc, el banquer ha deixat oblidat el codi de la caixa forta dins d'aquesta. Afortunadament recorda que aquest codi consta de nou xifres diferents, totes excepte el zero. A més, sap que, a partir de l'esquerra:

- El nombre format per la primera i la segona xifra és múltiple de dos.

- El nombre format per la segona i la tercera xifra és múltiple de tres.

- El nombre format per la tercera i la quarta xifra és múltiple de quatre.

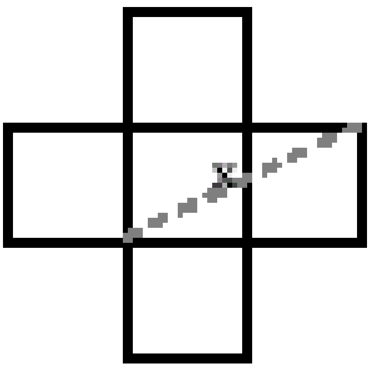
....i així successivament, fins a

- El nombre format per l'octava i la novena xifra que és múltiple de nou.

Amb aquestes dades troba dues possibilitats de codi. Quines són?

7- QUINA CREU!

Si la longitud x és de 6 dm, quina és l'area de la creu de la figura formada per cinc quadrats?



8.- CURIÓS JOC DE DAUS DE COLORS

Ruben llança un dau roig i José un dau blau. i com no tenen altre dau, Núria observa.

Ruben i Jose llancen alhora el seu dau i tots miren els punts. El joc acaba en la quarta tirada.

Si en el dau roig de Ruben apareix una puntuació par, Ruben guanya 3 punts, mentre que Jose i Núria perden 2 punts. En cas contrari no es puntua.

Si en el dau blau de Jose apareix una puntuació senar, Jose guanya 3 punts mentre que Ruben i Núria en perden 2 i en cas contrari no es puntua.

I també observen el producte dels punts dels dos daus: si el resultat és un nombre primer o quadrat, Núria guanya 3 punts i Ruben i Jose en perden dos. En cas contrari no es puntua.

Aquests són els resultats de les tres primeres partides,

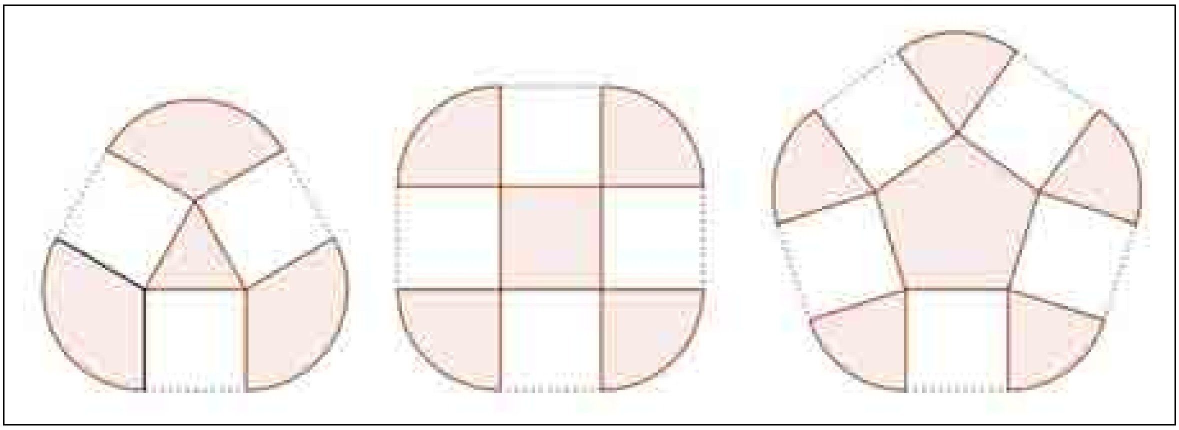
TIRADA	DAU ROIG	DAU BLAU
1ª	2	5
2ª	1	3
3ª	6	6

Qui guanya en la primera partida? Quina puntuació té cadascú en la tercera tirada?

Qué ha que passar en la quarta tirada per a que empaten tots tres? Amb quina puntuació?

9.- CANTONADES ARRODONIDES

Calcula la suma de les àrees de les cantondades arrodonides situades als vèrtexs d'aquest triangle equilàter de costat 1 cm. Després fes-ho també en el quadrat i el pentàgon regular. I si fóra un decàgon regular?



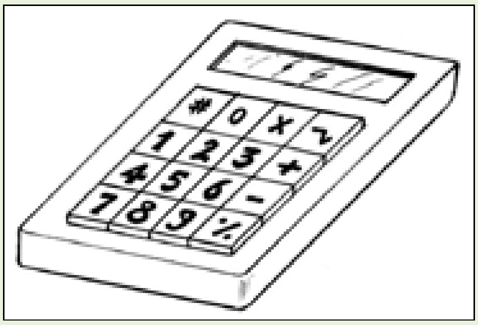
10.- SUMA DE LLETRES

En aquesta suma les lletres D, E i F són 3 xifres diferents, pots trobar-les?

$$\begin{array}{r} D\,E\,F \\ D\,E\,F \\ +\quad D\,E\,F \\ \hline E\,E\,E \end{array}$$

11.- UNA RELACIÓ CURIOSA

Observa que en dividir 70 entre 13 s'obté 5 de quocient i 5 de residu, és a dir, el seu quocient i el seu residu coincideixen. N'hi haurà a més del 70, altres nombres menors que 200, als que en dividir-los entre 13 els passa el mateix?

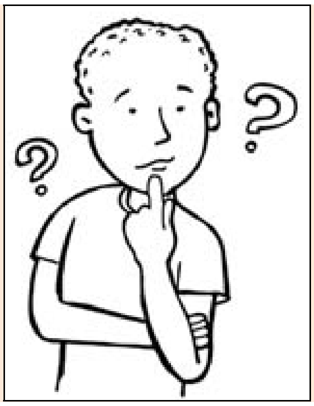


12.- LES XULLES

El tio Vicent té unes graelles per a torrar carn molt menudes, on tan a penes caben dos xulles. La seua dona i la seua filla Clara es moren de gana i estan ansioses per menjar quan abans puguen. El problema és torrar les tres xulles en el mínim temps possible.

Ell pensa que fan falta 20 minuts per a torrar una xulla per les dos bandes, ja que per cada banda tarda 10 minuts. Com pot torrar dos xulles a la vegada, en 20 minuts pot tindre dos xulles torrades, mentre que la tercera tardarà altres 20 minuts, pel que el menjar estarà a punt en 40 minuts.

Tanmateix, Clara pensa que es pot fer en 30 minuts. Quina serà la solució que dona Clara?

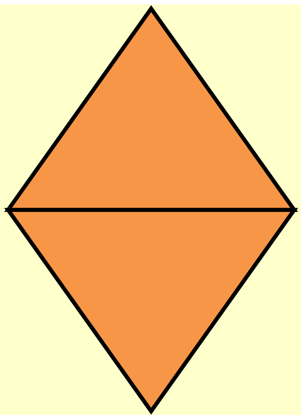


13.- EL CUPÓ

El número del cupó dels cecs al que estic abonat és molt curiós, ja que és cap-i-cúa, i si sume les seues cinc xifres dona el mateix resultat que si les multiplique. Però és que a més a més, la primera xifra de l'esquerra resulta ser la edat de la meua germana xicoteta, les dos següents la de la meua germana mitjana, i les dos últimes la de la major, que li porta a la mitjana més d'un any. Saps a quin número estic abonat?

14.- DIAMANTS

A dos triangles equilàters units per un dels seus costats li anomenem DIAMANT. Investiga quants pentamants (agrupacions de 5 triangles equilàters units per algun dels seus costats) diferents hi ha.



ELS MONOGRÀFICS DE PROBLEMES OLÍMPICS

PROBLEMES DE GEOMETRIA

per RICARD PEIRÒ I ESTRUCH

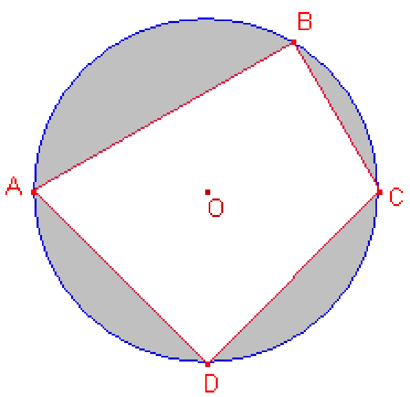
Continuem amb la secció dedicada als problemes de Geometria aportats pel nostre company Rcard Peirò i Estruch.

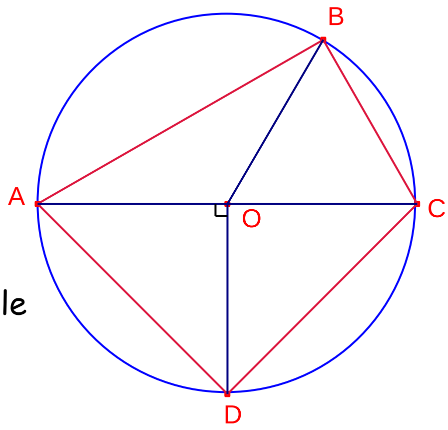
Des de la redacciò de Problemes Olimpics, recolzem l'ensenyament i aprenentatge de la Geometria, sense la qual no podem considerar seriosament les matemàtiques. La Geometria afavorix el pensament inductiu i deductiu, l'exploració, la formulació i contrast de conjectures, la resolució de problemes i la realització de investigacions. Pensem que caldria adequar les programacions dels centres per a aconseguir que totes les parts de les matemàtiques tingueren el seu lloc en el currículum. No és presentable que acabe un curs sense haver treballat cap situació de Geometria.

Des d'ací us fem la proposta de què els vostres alumnes s'inicien més prompte en l'estudi de la Geometria i en la resolució dels seus problemes.

- **PROBLEMA 1**

En una circumferència de centre O i radi 10, $\overline{AC}$ és un diàmetre, $\overline{OD}$ és perpendicular a $\overline{AC}$ i $\angle AOB = 120^\circ$.
Determineu l'àrea de la regió ombrejada.





Solució:

Per ser $\overline{AC}$ un diàmetre, $\angle ABC = \angle ADC = 90^o$.
Si $\angle AOB = 120^o$, aleshores, $\angle BOC = 60^o$,
$\overline{OB} = \overline{OC} = 10$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ és equilàter,
$\overline{BC} = \overline{OB} = 10$, $\angle OCB = 60^o$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle
$\overset{\Delta}{ABC}$: $\overline{AB} = 10\sqrt{3}$.

Per ser $\overline{OD}$ perpendicular a $\overline{AC}$, $\overline{OD} = 10$ és altura del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.
L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea del cercle menys l'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{ACD}$.

$$S = \pi \cdot 10^2 - \left(\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OD}}{2} \right) = 100\pi - \left(\frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} + \frac{20 \cdot 10}{2} \right) =$$

$$= 100\pi - 100 - 50\pi \approx 127.56.$$

- **PROBLEMA 2**

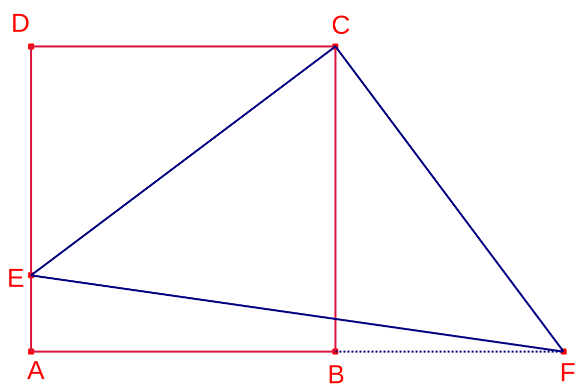
Siga ABCD un quadrat d'àrea 256.
Siga E del costat $\overline{AD}$ i F un punt de la prolongació del costat $\overline{AB}$ de manera que $\angle ECF = 90^o$ i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ECF}$ és 200. Calculeu la longitud del segment $\overline{BF}$.

Solució:

Siga $x = \overline{BF}$. El costat del quadrat ABCD és $\overline{AB} = \sqrt{256} = 16$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{CBF}$ són iguals. Aleshores, $\overline{DE} = x$. $\overline{CE} = \overline{CF}$.

Aplicant el teorema de Pitàogres al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$: $\overline{CE}^2 = 16^2 + x^2$

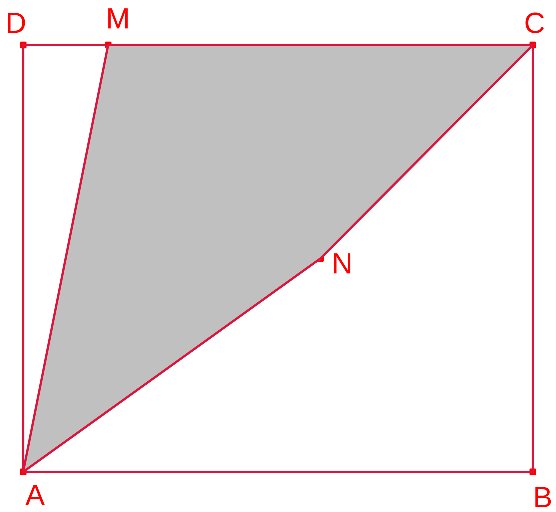


L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ECF}$ és: $S_{ECF} = \dfrac{\overline{DE}^2}{2} = 200$.

$\dfrac{16^2 + x^2}{2} = 200$. Aleshores, $\overline{BF} = x = 12$.

- **PROBLEMA 3**

ABCD és un rectangle tal que $5 \cdot \overline{AB} = 6 \cdot \overline{BC}$.
Siga M un punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{MC} = \overline{BC}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{MB}$.
Quina fracció de l'àrea rectangle ABCD representa l'àrea del quadrilàter AMCN?



Solució:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{6}{5}$. Siga $\overline{AB} = 6x$, $\overline{BC} = 5x$. $S_{ABCD} = 6x \cdot 5x = 30x^2$.
Siga P la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$. Siga Q la projecció de N sobre el costat $\overline{CD}$. Per ser N el punt mig de $\overline{MB}$:

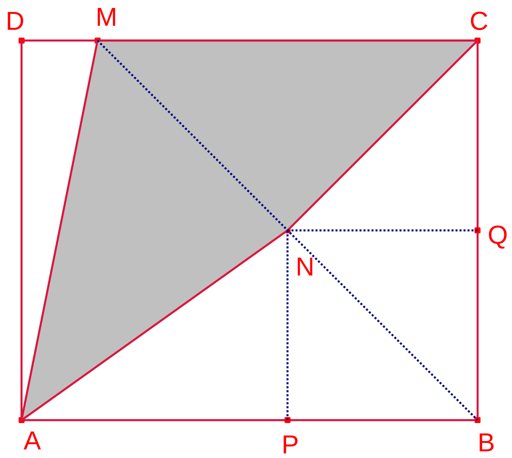
$\overline{NP} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = \dfrac{5x}{2}$. $\overline{NQ} = \dfrac{1}{2}\overline{CM} = \dfrac{5x}{2}$. $S_{AMCN} = S_{ABCD} - (S_{ABN} + S_{BCN} + S_{ADM})$.

$S_{AMCN} = 30x^2 - \left(\dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{NP}}{2} + \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{NQ}}{2} + \dfrac{\overline{DM} \cdot \overline{AD}}{2} \right)$.

$$S_{AMCN} = 30x^2 - \left(\frac{6x \cdot \frac{5}{2}x}{2} + \frac{5x \cdot \frac{5}{2}x}{2} + \frac{x \cdot 5x}{2} \right).$$

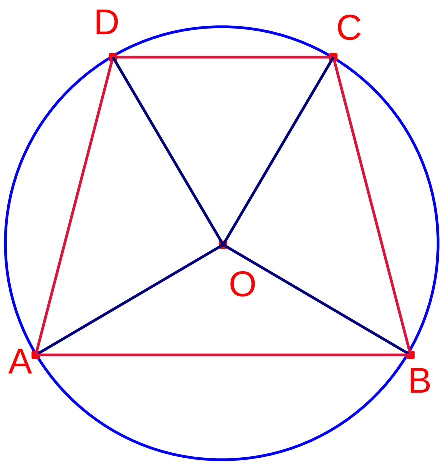
$$S_{AMCN} = 30x^2 - \left(\frac{6x \cdot \frac{5}{2}x}{2} + \frac{5x \cdot \frac{5}{2}x}{2} + \frac{x \cdot 5x}{2} \right). \quad S_{AMCN} = \frac{55}{4}x^2 .$$

La proporció entre les àrees: $\frac{S_{AMCN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{55}{4}x^2}{30x^2} = \frac{11}{24}$.



- **PROBLEMA 4**

Un trapezi isòsceles ABCD està inscrit en una circumferència de centre O i radi 2. Sabent que $\angle AOB = 120^o$ i $\angle COD = 60^o$, determineu l'àrea del trapezi.

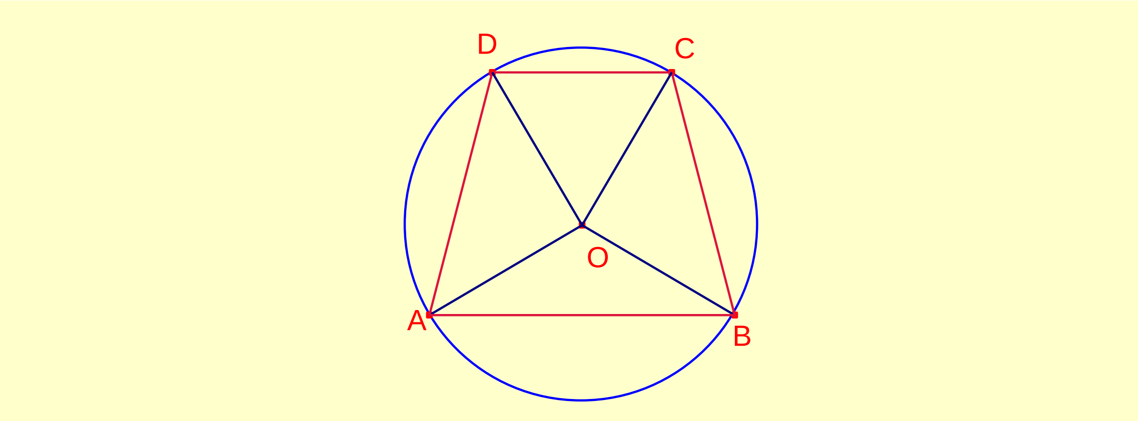


Solució:

Un trapezi inscrit en una circumferència és isòsceles. Aleshores, $\angle AOD = \angle BOC = 90^o$. Per tant, els triangles $\overset{\Delta}{OAD}$, $\overset{\Delta}{OBC}$ són rectangles i isòsceles de catets el radi de la circumferència.

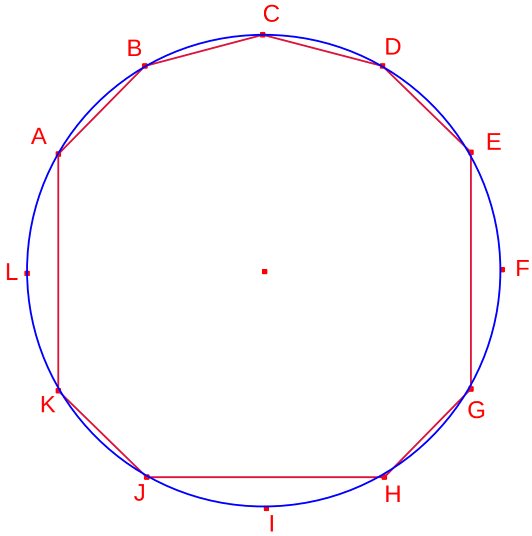
El triangle $\overset{\Delta}{OCD}$ és equilàter de costat el radi de la circumferència. El triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABO}$ té la mateixa àrea que el triangle equilàter $\overset{\Delta}{OCD}$.
L'àrea del trapezi *ABCD* és igual al doble de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAD}$ més el doble de l'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCD}$.

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{OAD} + 2 \cdot S_{OCD} = 2\frac{\overline{OD}^2}{2} + 2\frac{\overline{OD}^2\sqrt{3}}{4} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7.46.$$



- **PROBLEMA 5**

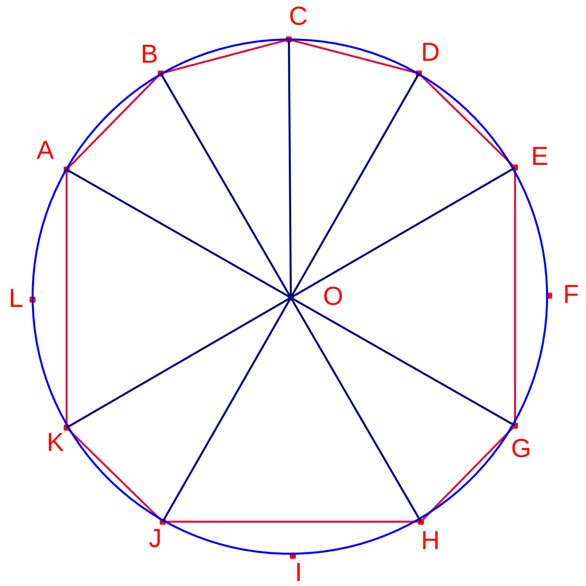
A, B, C, D, E, F, G, H, I,J K, L, són els vèrtexs d'un decàgon regular inscrit en una circumferència de radi r.
Determineu l'àrea del polígon ABCDEGHJK.



Solució:

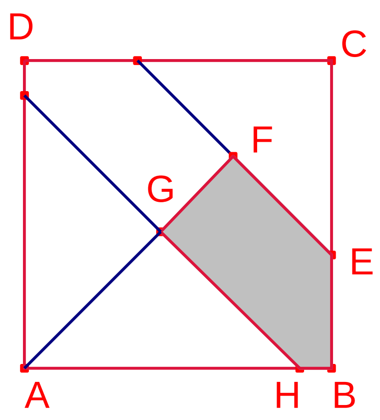
L'angle central del dodecàgon regular mesura 30º.
Unint el centre O del dodecàgon amb els vèrtexs del polígon ABCDEGHJK, es formen 3 triangles equilàters de costat r i 6 triangles isòsceles de costats iguals r i angle 30º.
L'àrea del polígon ABCDEGHJK és:

$$S_{ABCDEGHJK} = 3 \cdot S_{OAK} + 6 \cdot S_{OAB} = 3 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 30^{o}}{2} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\right) r^2$$



- **PROBLEMA 6**

El quadrat ABCD de costat c s'ha dividit en 5 parts d'igual àrea mitjançant talls paral·lels a les diagonals (veure figura).
Calculeu el perímetre del pentàgon BEFGH.

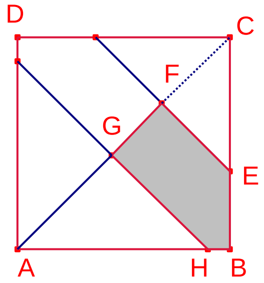


Solució:

$\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{CE}$, $\overline{FE} = \overline{FC}$.

El perímetre del pentàgon BEFGH és:

$p = \overline{GH} + \overline{HB} + \overline{BE} + \overline{FE} + \overline{GE} = \overline{AC} + \overline{HB} + \overline{BE}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\overline{AC} = c\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHG}$ és la cinquena part de l'àrea del quadrat ABCD:

$$\frac{\overline{AG}^2}{2} = \frac{1}{5}c^2.$$

Aleshores, $\overline{AG} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHG}$:

$$\overline{AH} = \overline{AG}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}c.$$

$$\overline{BE} = c - \overline{CE} = c - \overline{AG} = \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right)c.$$

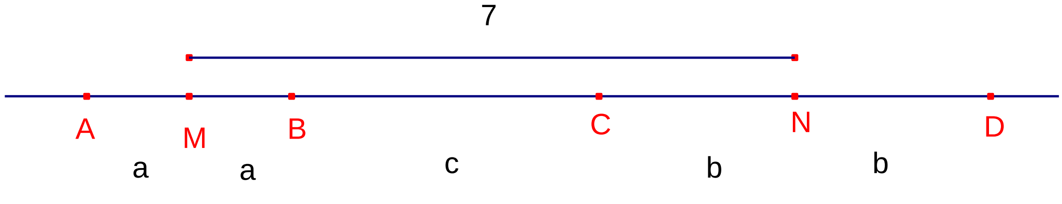
$$\overline{HB} = c - \overline{AH} = \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)c.$$

El perímetre del pentàgon BEFGH és:

$$p = \overline{AC} + \overline{HB} + \overline{BE} = \left(\sqrt{2} + 1 - \frac{\sqrt{10}}{5} + 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)c = \left(\frac{10 + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{5}\right)c.$$

- **PROBLEMA 7**

Sobre una recta es marquen els punts A, B, C, D en aquest ordre.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$ i N el punt mig del segment $\overline{CD}$.
Si $\overline{MN} = 7$, calculeu la longitud de la suma dels segments $\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{BC}$.



Solució:

Siga $\overline{AM}=\overline{BM}=a$, $\overline{CN}=\overline{DN}=b$, $\overline{BC}=c$.

$a+c+b=7$.

$\overline{AC}=2a+c$

$\overline{AD}=7+a+b$

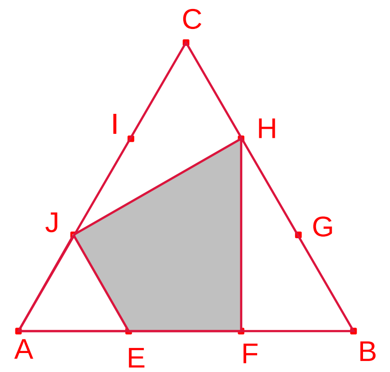
$\overline{BD}=2b+c$

$\overline{BC}=c$.

$\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{BC}=2a+c+7+a+b+2b+c+c=3(a+b+c)+7=3\cdot 7+7=28$.

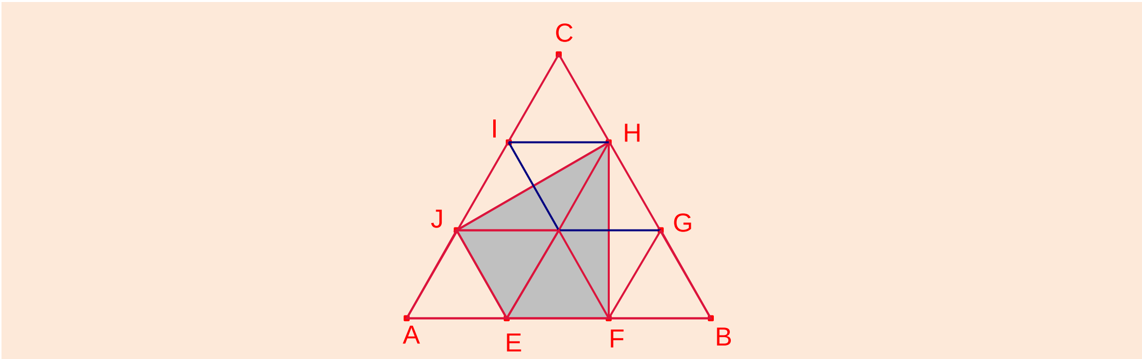
- **PROBLEMA 8**

En el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ els punts E, F, G, H, I, J divideixen els costats en tres parts iguals. Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter EFHJ i la del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



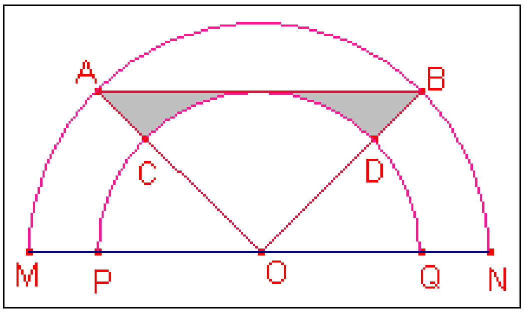
Solució:

Siga M el punt mig del segment $\overline{JG}$. Els triangles $\overset{\Delta}{JMH}$, $\overset{\Delta}{FMH}$ són iguals. Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{JMI}$, $\overset{\Delta}{JMH}$ són iguals. L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a 9 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JMI}$. L'àrea del quadrilàter EFGJ és igual 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JMI}$. La proporció entre les àrees és: $\dfrac{S_{EFHJ}}{S_{ABC}}=\dfrac{4}{9}$.



- **PROBLEMA 9**

Els arcs $\overset{\frown}{MAN}$, $\overset{\frown}{PCQ}$ són semicercles de centre O.
El radi menor és 1 i el major $\sqrt{2}$.
$\angle AOM = \angle BON$ i $\angle AOB = 2 \cdot \angle AOM$.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada de la figura.



Solució:

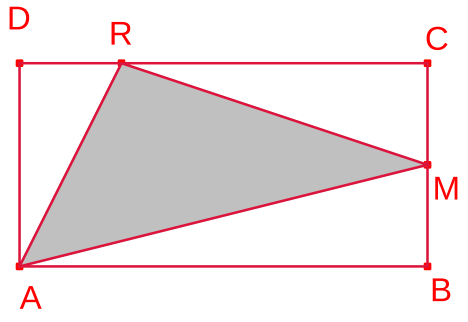
$4 \cdot \angle AOM = 180^o$.
Aleshores, $\angle AOM = 45^o$, $\angle AOB = 90^o$.
$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{2}$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$ menys l'àrea del sector de radi 1 i d'angle 90°.

$$S = \frac{\overline{OA}^2}{2} - \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215.$$

- **PROBLEMA 10**

El rectangle ABCD té àrea $32cm^2$. M és el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, i $\overline{DR} = \overline{BM}$.
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ARM}$.



Solució:

Siga $x = \overline{BM}$, aleshores, $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM} = 2x$, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} = 4x$.
L'àrea del rectangle ABCD és $32cm^2$, aleshores:

$4x \cdot 2x = 32$.

$x^2 = 4$.

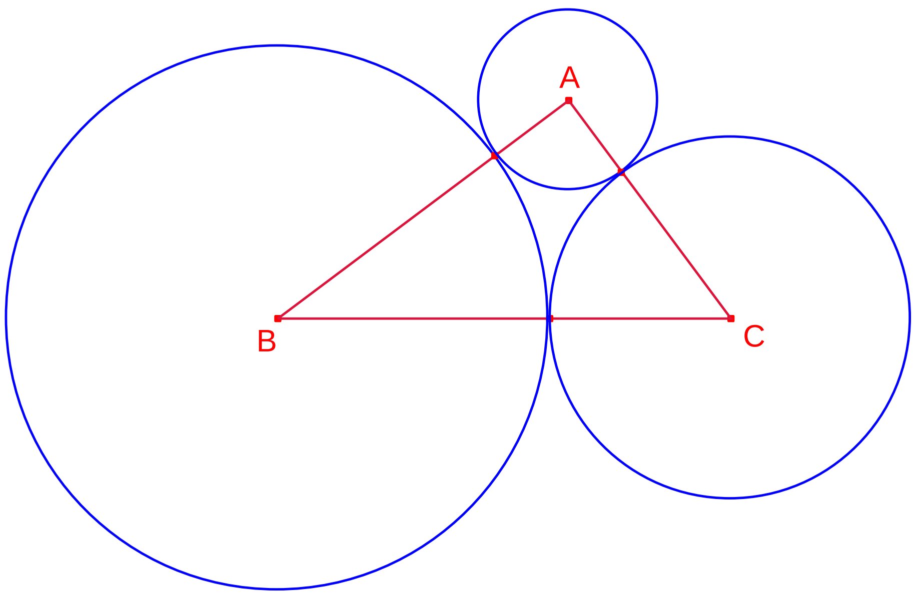
$\overline{DR} = \overline{BM} = x$, aleshores, $\overline{CR} = \overline{CD} - \overline{DR} = 4x - x = 3x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ARM}$ és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADR}$, $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{CRM}$:

$$S_{ARM} = S_{ABCD} - (S_{ADR} + S_{ABM} + S_{CRM}) =$$
$$= 32 - \left(\frac{x \cdot 2x}{2} + \frac{4x \cdot x}{2} + \frac{3x \cdot x}{2} \right) =$$
$$= 32 - \frac{9}{2}x^2 =$$
$$= 32 - \frac{9}{2}4 = 14cm^2.$$

- **PROBLEMA 11**

Donat el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $a = 5, b = 3, c = 4$, s'han dibuixat tres circumferències tangents exteriors dos a dos de centres els tres vèrtexs. Calculeu la suma de les àrees dels tres cercles.



<u>Solució:</u>

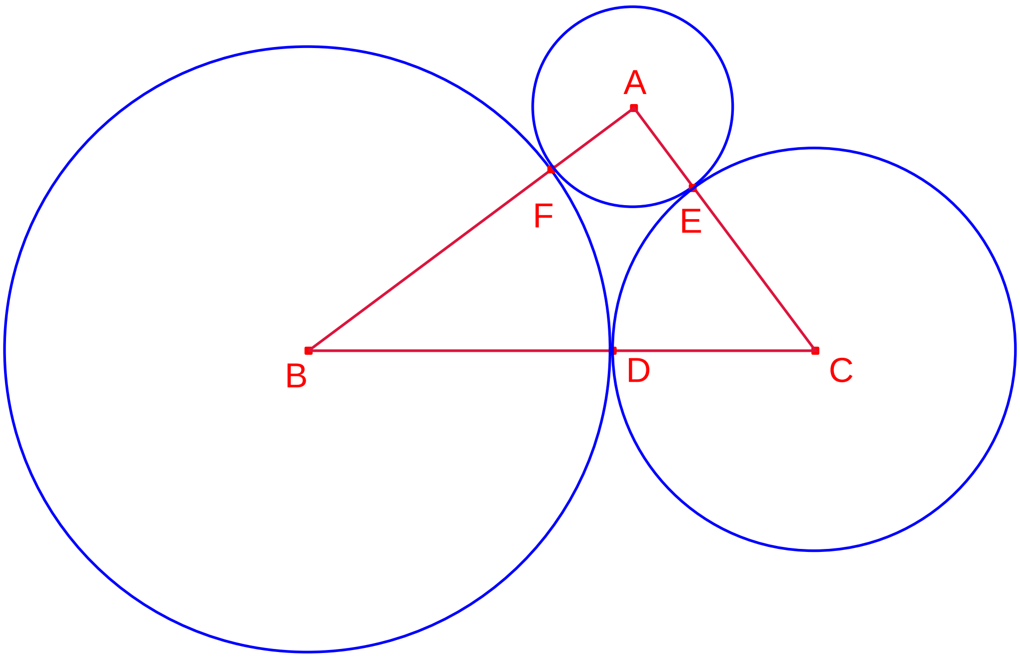
Siguen D, E, F els punts de tangència de les tres circumferències.
Siguen $r = \overline{AF} = \overline{AE}$, $s = \overline{BF} = \overline{BD}$, $t = \overline{CD} = \overline{CE}$ el radi de les tres circumferències.

$$\begin{cases} r + s = 4 \\ r + t = 3 \\ s + t = 5 \end{cases}.$$ Resolent el sistema:

$$\begin{cases} r = 1 \\ s = 3 \\ t = 2 \end{cases}.$$

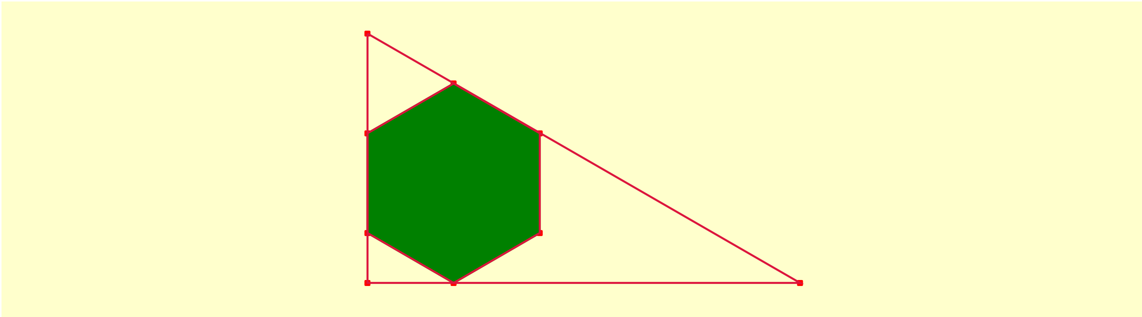
La suma de les àrees dels tres cercles és:

$S = \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 2^2 = 14\pi$.



- **<u>PROBLEMA 12</u>**

En un triangle rectangle 90°, 60°, 30° s'ha inscrit un hexàgon (veure figura). Calculeu la raó de proporcionalitat de les seues àrees.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$, $B = 30^{o}$, $C = 60^{o}$
Siga $x = \overline{HI}$ costat de l'hexàgon regular HIJKLM..
Notem que el triangle $\overset{\Delta}{HIC}$ és equilàter.

$\angle ALM = 30^{o}$, $\overline{ML} = x$, aleshores, $\overline{MA} = \dfrac{x}{2}$.

$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MH} + \overline{HC} = \dfrac{x}{2} + x + x = \dfrac{5}{2}x$.

$\overline{BC} = 5x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a la meitat de l'àrea d'un triangle equilàter de costat $\overline{BC} = 5x$:

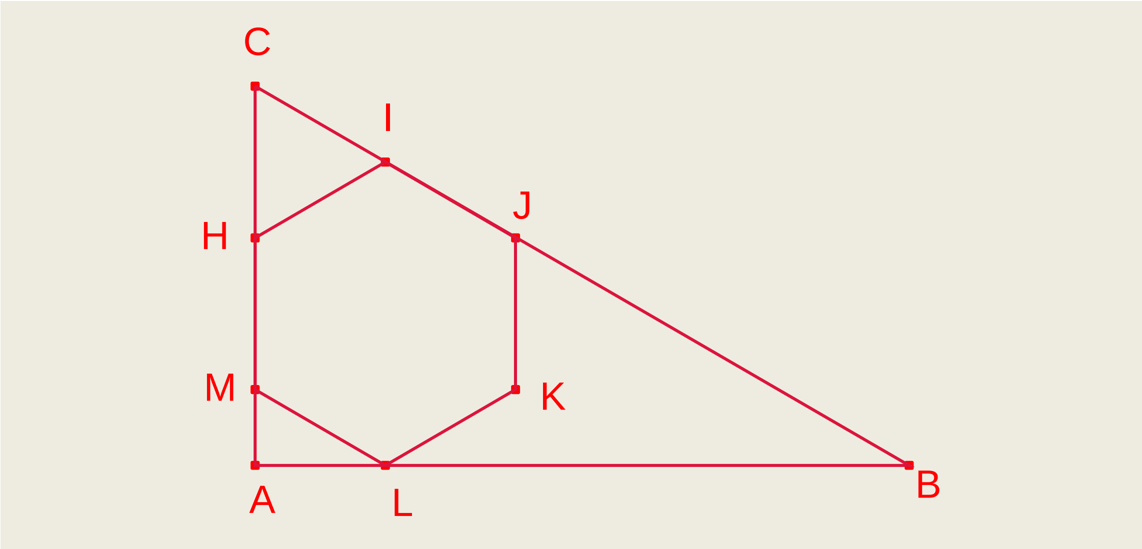
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{(5x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{8}x^2.$$

L'àrea de l'hexàgon regular HIJKLM és igual a sis vegades l'àrea d'un triangle equilàter de costat $x = \overline{HI}$.

$$S_{HIJKLM} = 6\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2.$$

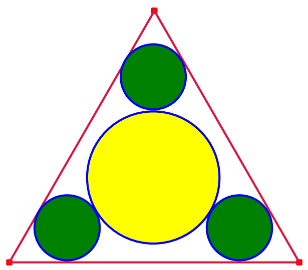
La proporció entre les àrees de l'hexàgon HIJKLM i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\frac{S_{HIJKLM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2}{\frac{25\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{12}{25}.$$



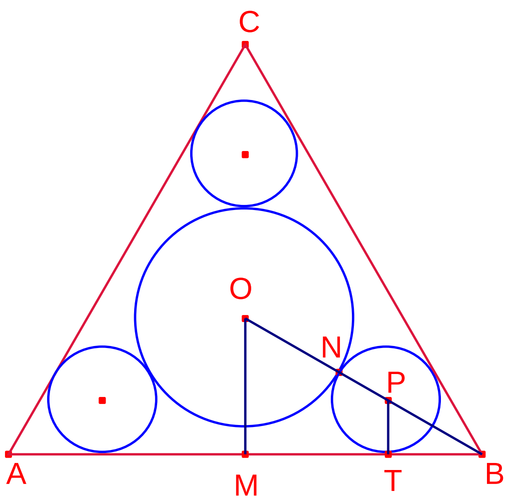
- **PROBLEMA 13**

En un triangle equilàter s'han dibuixat 4 circumferències. La circumferència central té doble radi que les altres (veure figura). Si el costat del triangle equilàter és c, calculeu el radi de les tres circumferències menudes.



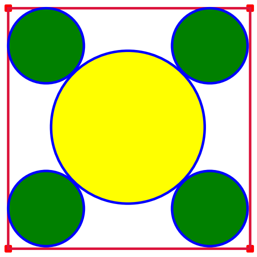
Solució

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la circumferència central de centre O (baricentre del triangle) radi 2r.
Siga la circumferència de centre P i radi r.
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt de tangència de les circumferències de centres O i P.
La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats, aleshores: $\angle MBP = 30^o$.
Aleshores, $\overline{BP} = 2 \cdot \overline{PT} = 2r$. $\overline{BO} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{BP} = 5r$.
$\overline{BM} = \frac{c}{2}$. $\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2}5r$. Igualant ambdues expressions:
$\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}5r$. Resolent l'equació en la incògnita r: $r = \frac{\sqrt{3}}{15}c$.



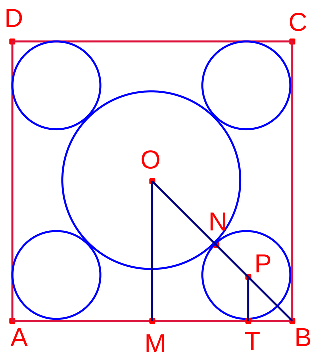
- **PROBLEMA 14**

En un quadrat s'han dibuixat 5 circumferències. La circumferència central té doble radi que les altres (veure figura). Si el costat del quadrat és c, calculeu el radi de les quatre circumferències menudes.



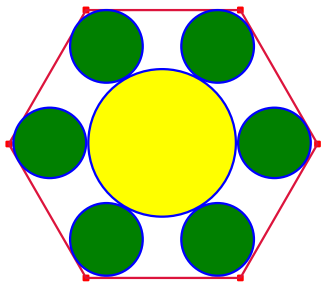
Solució

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la circumferència central de centre O (centre del quadrat) radi 2r.
Siga la circumferència de centre P i radi r.
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt de tangència de les circumferències de centres O i P.
La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats, aleshores: $\angle MBP = 45^\circ$.
Aleshores, $\overline{BP} = \sqrt{2} \cdot \overline{PT} = r\sqrt{2}$.
$\overline{BO} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{BP} = 2r + r + r\sqrt{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)r$.
$\overline{BO} = \frac{c}{2}\sqrt{2}$. Igualant ambdues expressions: $\frac{c\sqrt{2}}{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)r$.
Resolent l'equació en la incògnita r: $r = \frac{3\sqrt{2} - 2}{14}c$.



- **PROBLEMA 15**

En un hexàgon regular s'han dibuixat 7 circumferències. La circumferència central té doble radi que les altres (veure figura).
Si el costat de l'hexàgon regular és c, calculeu el radi de les sis circumferències menudes.



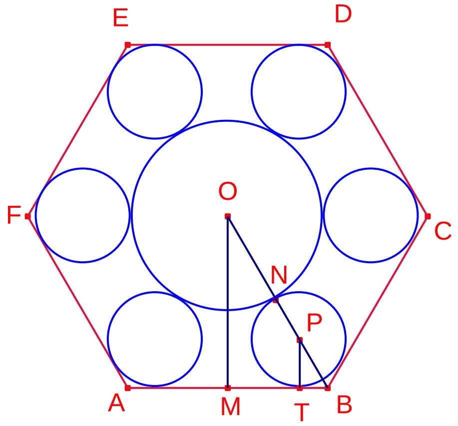
Solució:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la circumferència central de centre O (centre de l'hexàgon) radi 2r.
Siga la circumferència de centre P i radi r.
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AB}$. Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt de tangència de les circumferències de centres O i P.
La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats, aleshores: $\angle MBP = 60^o$.

Aleshores, $\overline{BP} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{PT} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$.

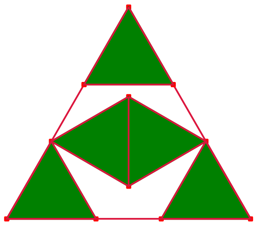
$$c = \overline{BO} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{BP} = 2r + r + \frac{2\sqrt{3}}{3} r = \left(\frac{9 + 2\sqrt{3}}{3}\right) r.$$

Resolent l'equació en la incògnita r: $r = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{23} c$.



- **PROBLEMA 16**

En un triangle equilàter s'han inscrit 5 triangles equilàters iguals (veure figura). Calculeu la raó de proporcionalitat de l'àrea dels 5 triangles iguals i l'àrea del triangle equilàter exterior.



Solució:

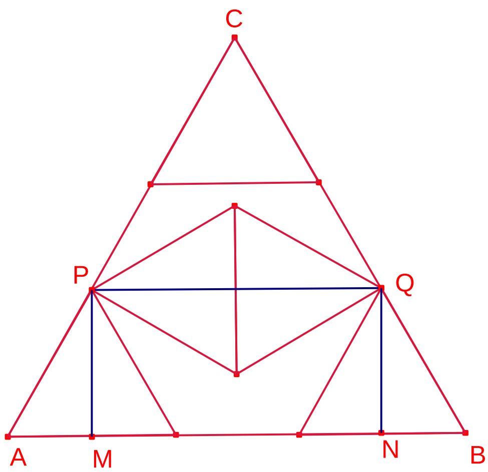
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter exterior.
Siga $\overline{AP} = 1$ costat del triangle equilàter interior.
Siga $\overline{BQ} = 1$ costat del triangle equilàter interior. $\overline{PQ} = \sqrt{3}$
Sigen M, N les projeccions de P i Q sobre el costat $\overline{AB}$, respectivament.
$\overline{AM} = \overline{BN} = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\overline{AB} = 1 + \sqrt{3}$, costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'àrea dels t triangles equilàters interiors és: $S_{5Tri} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AP}^2\right) = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

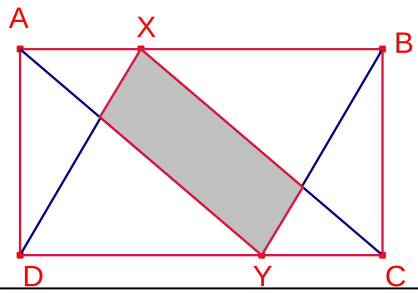
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4+2\sqrt{3}\right).$$

La proporció entre les àrees és: $\frac{S_{5Tri}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \frac{5\left(4-2\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$.



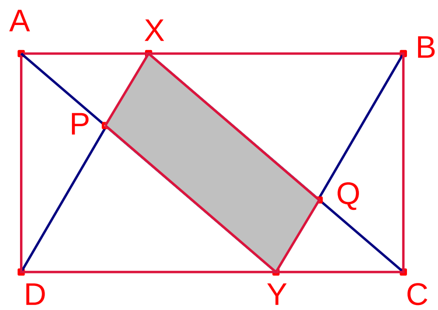
- **PROBLEMA 17**

Els punts X, Y divideixen els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament, del rectangle ABCD en raó 1:2 (veure figura).
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter gris i del rectangle ABCD.



Solució:

Siga P la intersecció dels segments $\overline{AY}$, $\overline{DX}$.
Siga Q la intersecció dels segments $\overline{BY}$, $\overline{CX}$.
Siga $\overline{AX} = \overline{CY} = x$, aleshores, $\overline{BX} = \overline{DY} = 2x$.
Siga $\overline{AD} = \overline{BC} = b$.



L'àrea del rectangle ABCD és: $S_{ABCD} = 3xb$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADX}$, $\overset{\Delta}{CBY}$ la seua àrea és: $S_{ADX} = S_{CBY} = \dfrac{xb}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AXP}$, $\overset{\Delta}{YDP}$ són semblants i la raó de semblança és $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{DY}} = \dfrac{1}{2}$.

Aleshores, les seues altures estan en raó 1:2.

Per tant, l'altura del triangle $\overset{\Delta}{YDP}$ sobre el costat $\overline{DY}$ és $\dfrac{2}{3}b$.

Els triangles $\overset{\Delta}{YDP}$, $\overset{\Delta}{XBQ}$ són iguals la seua àrea és:

$$S_{CBY} = S_{XBQ} = \frac{2x\frac{2}{3}b}{2} = \frac{2xb}{3}.$$

L'àrea del paral·lelogram XPYQ és:

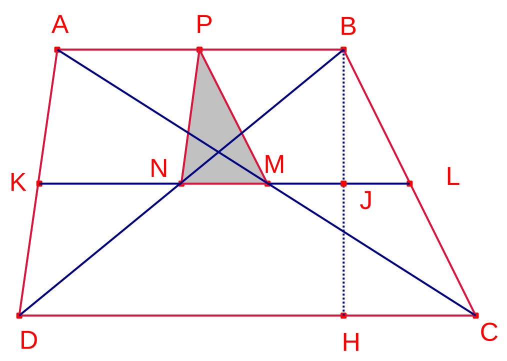
$$S_{XPYQ} = S_{ABCD} - (2 \cdot S_{ADX} + 2 \cdot S_{YDP}) = 3xb - \left(xb + \frac{4xb}{3} \right) = \frac{2xb}{3}.$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter gris i del rectangle ABCD és:

$$\frac{S_{XPYQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2xb}{3}}{3xb} = \frac{2}{9}.$$

- **PROBLEMA 18**

Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB} = 15$, $\overline{CD} = 24$ i altura $h = 14$. Siga M el punt mig de la diagonal , N el punt mig de la diagonal $\overline{BD}$ i P el punt mig del costat $\overline{AB}$. Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNP}$.



Solució:

$\overline{MN}$ pertany a la paral·lela mitjana del trapezi.
La paral·lela mitjana intersecta els costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ en els punts K, L, respectivament. $\overline{KJ} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{39}{2}$. Siga $h = \overline{BH} = 14$ altura del trapezi.
$\overline{BH}$ talla pa paral·lela mitjana $\overline{KL}$ en el punt J. $\overline{BJ} = 7$.
$\overline{KN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$: $\overline{KN} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{15}{2}$.
$\overline{ML}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\overline{ML} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{15}{2}$.
$\overline{MN} = \overline{KL} - (\overline{KN} + \overline{ML}) = \frac{39}{2} - \left(\frac{15}{2} + \frac{15}{2} \right) = \frac{9}{2}$. L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és:

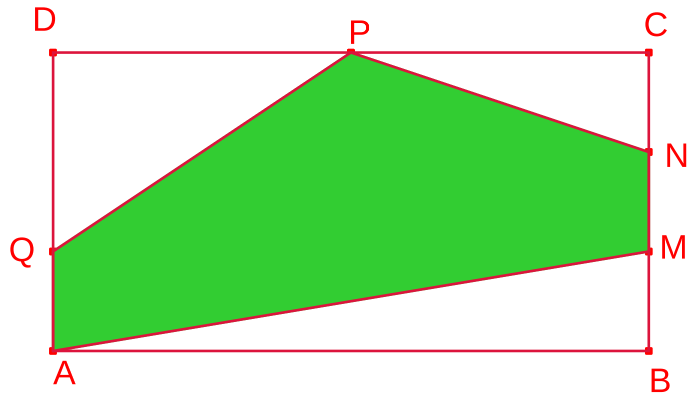
$$S_{MNP} = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{BJ}}{2} = \frac{\frac{9}{2} \cdot 7}{2} = \frac{63}{4}.$$

- **PROBLEMA 19**

En la figura ABCD és un rectangle de 108cm de perímetre.

$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AQ} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC}$, $\overline{DP} = \overline{PC}$.

Calculeu l'àrea del pentàgon AMNPQ.



Solució:

Siga $\overline{AQ} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC} = x$.

$\overline{BC} = 3x$, $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 6x$, $\overline{DQ} = 2x$.

El perímetre del rectangle ABCD és 108cm, aleshores:

$18x = 108$. Resolent l'equació:

$x = 6$.

$\overline{AB} = 36$, $\overline{BC} = 18$.

$\overline{DP} = \overline{PC} = 18$, $\overline{DQ} = 12$.

L'àrea del pentàgon AMNPQ és:

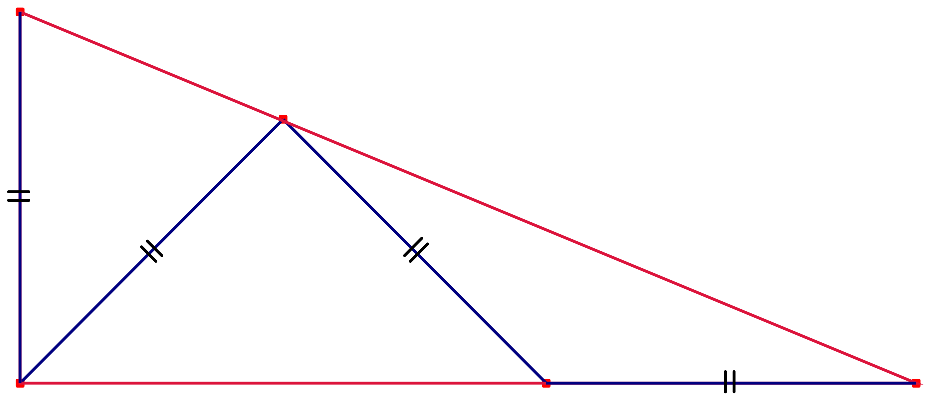
$$S_{AMNPQ} = S_{ABCD} - \left(S_{ABM} + S_{NCD} + S_{PDQ}\right)$$

$$S_{AMNPQ} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} - \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BM}}{2} + \frac{\overline{CP} \cdot \overline{CN}}{2} + \frac{\overline{PD} \cdot \overline{DQ}}{2}\right).$$

$$S_{AMNPQ} = 36 \cdot 18 - \left(\frac{36 \cdot 6}{2} + \frac{18 \cdot 6}{2} + \frac{18 \cdot 12}{2}\right) = 378\text{cm}^2.$$

- **PROBLEMA 20**

Calculeu els angles aguts del triangle rectangle de la figura el qual ha estat dividit en 3 triangles isósceles tots de costats iguals.



Solució:

Siga $\alpha = \angle ABC$. $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{DE} = \overline{BD}$

$\angle BED = \alpha$.

$\angle ADE = \angle DBE + \angle BED = 2\alpha$.

$\angle EAD = \angle ADE = 2\alpha$.

$\angle AEC = \angle ABE + \angle EAB = 3\alpha$.

$\angle ACB = \angle AEC = 3\alpha$.

$\angle ABC + ACB = 90^o$.

$\alpha + 3\alpha = 90^o$.

Resolent l'equació: $\alpha = 22'30'$. $C = 3\alpha = 67^o30'$.

PROBLEMES NIVELL B (SEGON CICLE ESO)

1.- TRES DÍGITS

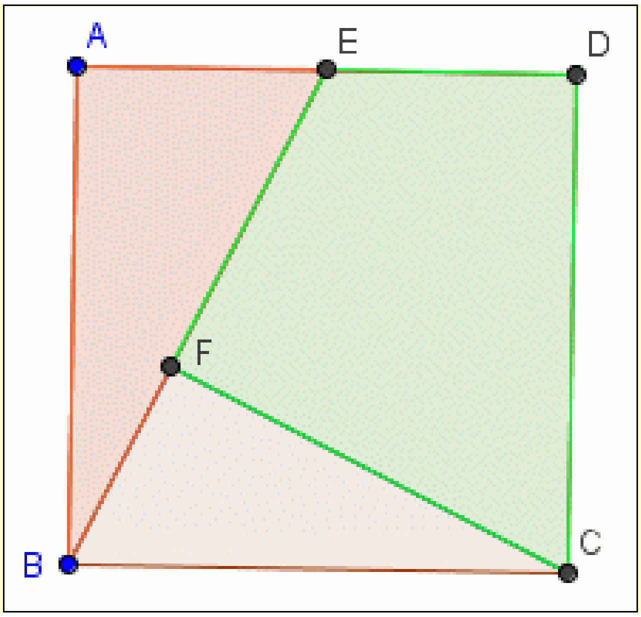
A la pissarra hi ha escrit un nombre de tres xifres, totes diferents. Ana intercanvia la primera xifra per l'última, obtenint un altre nombre de tres xifres. La suma del nombre escrit a la pissarra més el nombre d'Ana és igual a 92 vegades la suma dels dígits del nombre escrit. Determinar tots els valors possibles del nombre escrit a la pissarra.

2.- CONCURS DE TELEVISIÓ

En un concurs de televisió s'ha donat al concursant la possibilitat de triar una entre 3 portes (A,B,C) per quedar-se amb el que hi ha darrere d'ella. El presentador l'informa que només una d'elles té un bon regal (un ordinador portàtil), mentre que les altres dos estan buides. El concursant tria una i després de dir la seua elecció, el presentador (que coneix on està el regal exactament) li obri una de les altres dos portes no elegides pel concursant on no es troba el premi. Després li ofereix al concursant la opció de canviar la seua decisió inicial elegint l'altra porta encara tancada. Què ha de fer el concursant? Ha d'acceptar la nova possibilitat canviant la porta que va triar originalment, o no?

3.- L'HORTA DEL GRANGER

Un granger té un hort en forma de quadrat el costat del qual medix 8 metres. Ha dividit el seu interior en tres zones, tal com es mostra en la següent figura:



Sabent que el punt E coincideix amb el punt mitjà del segment AD i que CF és perpendicular al segment BE. Quina és l'àrea del quadrilàter CDEF?

4.- OVELLES I OQUES

Raúl per dormir solia comptar ovelles, per a això sumava les potes i després dividia per 4, però seguia amb el seu insomni, pel que va decidir afegir oques a les seves ovelles. Ara per comptar els animals, sumava les potes i dividia per 3,7.

Raúl es va adormir profundament; al dia següent es va acordar que el nombre d'animals no arribaven a 40. Quants animals són? Quants són oques?

5.- OPERACIÓ DELTA

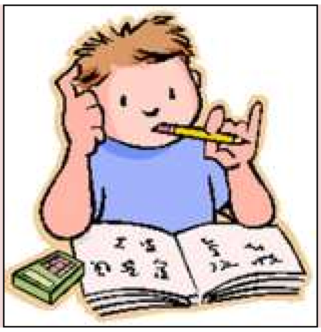
Sergi està encabotat en "inventar" matemàtiques. Ha decidit crear una nova operació aritmètica, que ha anomenat *operació delta* Δ.

L'operació Δ de Sergi es defineix de la següent forma: $a\Delta b = 1-\frac{a}{b}$, on $b \neq 0$.

Sabries dir quin és el resultat de l'operació (1Δ2) Δ (3Δ4)?

6.- QÜESTIÓ DE NOMBRES

Quants nombres enters positius de cinc xifres tenen la propietat que el producte de les seues xifres és 2000?

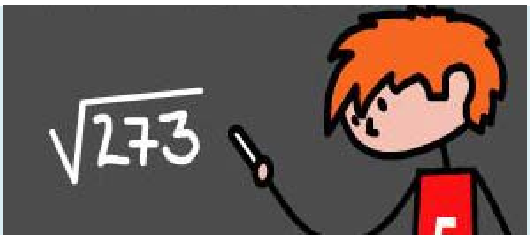


7.- SUMA RADICAL

El símbol $\lfloor x \rfloor$ indica el major nombre enter menor o igual a *x*. Per exemple: $\lfloor 5.3 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ i $\lfloor 4 \rfloor = 4$.

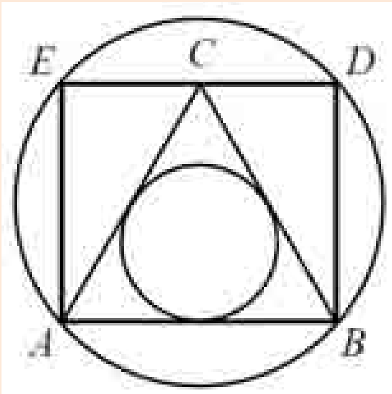
Calcula el valor de la suma:

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\lfloor\sqrt{4}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{48}\rfloor+\lfloor\sqrt{49}\rfloor+\lfloor\sqrt{50}\rfloor$$



8.- CERCLES INSCRITS

En la figura, ΔABC és equilàter i el radi del seu cercle inscrit és 1. Es dibuixa un cercle més gran que passa pels vèrtex del rectangle *ABDE*. Quin és el diàmetre del cercle gran?

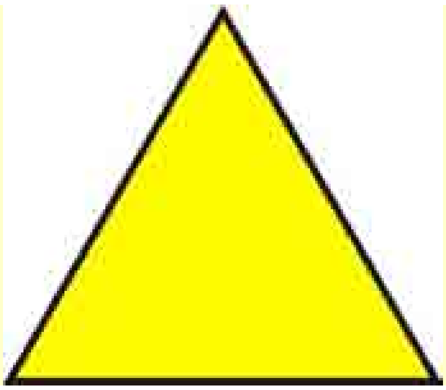


9.- El BALL DE FI DE CURS

Quan els participants en el ball de fi de curs es van alinear de 4 en 4, sobrava una persona; quan ho van intentar de 5 en 5, sobraven dues persones i quan anaven de 7 en 7, sobraven 3. Sabries dir, amb certesa, com de gran és el grup de ball?

10.- SECTORS EN UN TRIANGLE

Es dóna un triangle rectangle isòsceles ABC, amb l'angle recte en C, i els catets de longitud 2. Un arc de cercle m amb centre A divideix al triangle en dues parts de la mateixa àrea, mentre que l'arc de cercle n amb centre en B és tangent a l'arc m en un punt de la hipotenusa AB.
Trobar l'àrea de la porció del triangle no coberta pels sectors circulars corresponents als dos arcs.



11.- ELS TRENS

Dos trens viatgen a velocitat constant. El tren més lent recorre, en 15 minuts, 1 km menys que el més ràpid. El tren més lent tarda 15 segons més que el més ràpid a recórrer 4km.
A quants km/h marxa el tren més ràpid?

12.- LES CAMISES

Un majorista de camises, ha adquirit un model d'última moda en tres talles, la xicoteta S, la mitjana M i la gran G. La tercera part menys 2 són de talla gran; de la resta la tercera part menys 2 són de talla xicoteta, finalment es dóna compte que té 22 camises mes de talla mitjana que de talla gran.
Quantes camises d'este model ha adquirit en total?

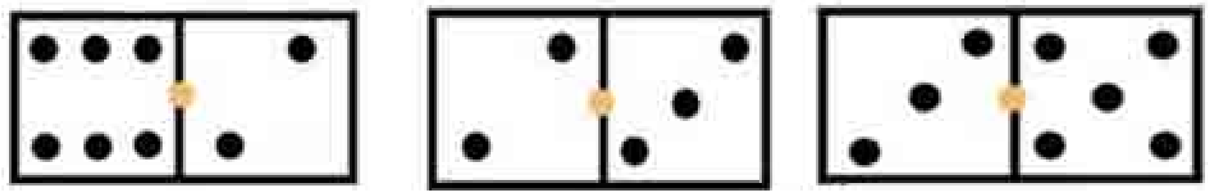
13.- LES FITXES DEL DÒMINO

En una partida del dòmino, observem en un moment donat una seqüència de tres fitxes contigües; i veiem que de les sis xifres que corresponen a les dos puntuacions de les tres fitxes:

- Les tres primeres formen un nombre primer.
- Les tres últimes formen un quadrat perfecte.
- La suma de totes les puntuacions és un quadrat perfecte.

Quina és la seqüència de tres fitxes observada?

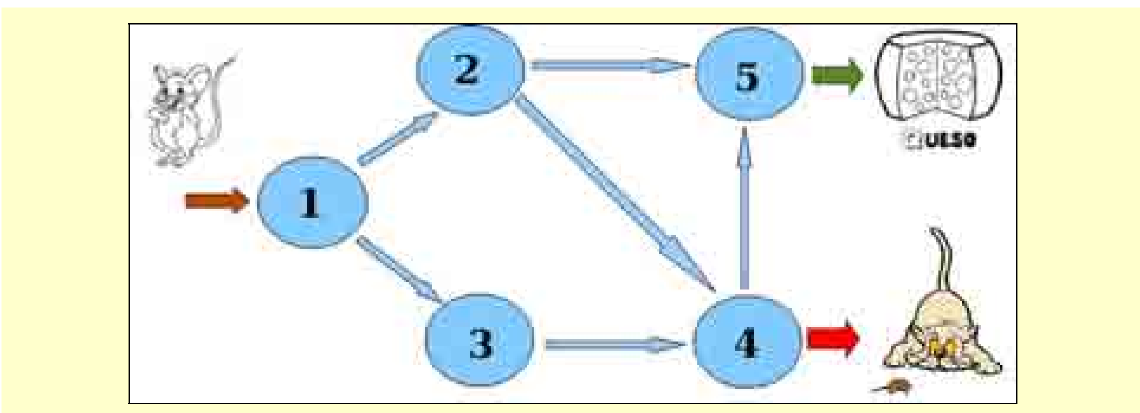
Per a aclarir l'enunciat, si la seqüència de fitxes observada fora la de baix, aleshores el número 622 hauria de ser primer, 335 un quadrat perfecte, i 21 també hauria de ser un quadrat.



NOTA: Recorda que en el dòmino, dues fitxes només poden anar juntes si tenen una cara del mateix valor.

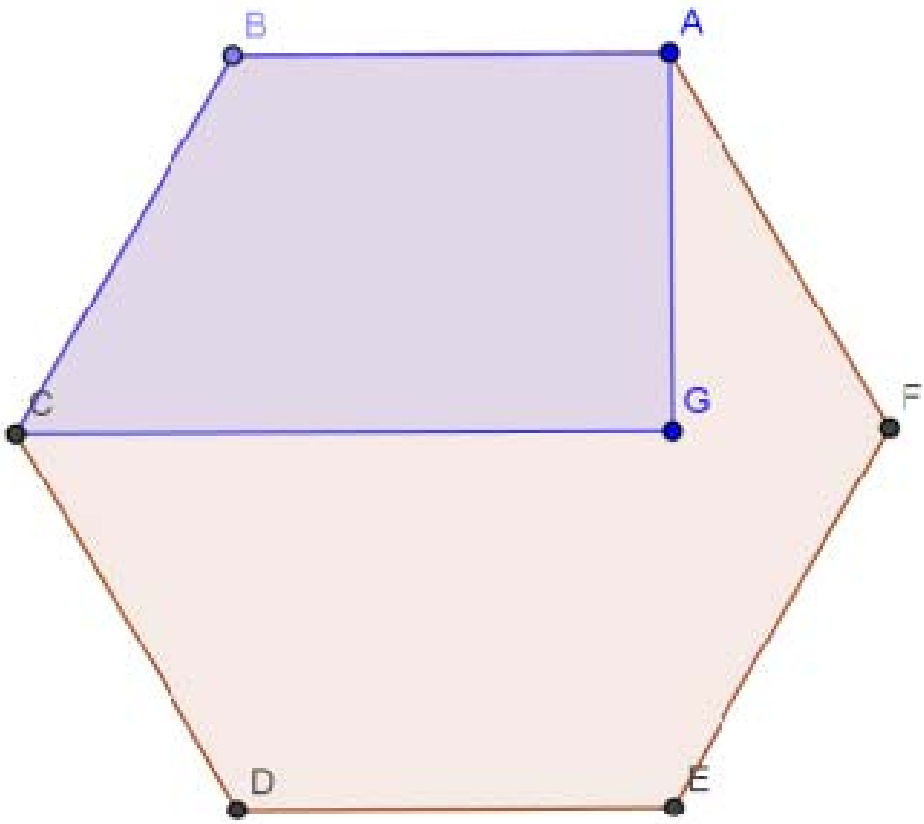
14.- EL FORMATGE DEL RATOLÍ

Quan un ratolí entra en un laberint (com el representat en la figura) pel node 1 tria a l'atzar un dels camins possibles indicats per les fletxes fins al node següent o fins a l'eixida. Només hi ha dos eixides posibles: o ix per on està el formatge, i en este cas obtindrà un suculent mos, o acaba en la gola d'un famèlic gat. Per descomptat, el ratolí no pot tornar enrrere, i res li indica el que hi ha al final del camí triat. Quina és la probabilitat que un ratolí qualsevol acabe menjant-se el formatge?



15.- L'HEXÀGON

Si *ABCDEF* és un hexàgon regular i *ABCG* és un trapezi rectangle amb una àrea de $10\sqrt{3}$ m^2, quina és l'àrea de l'hexàgon *ABCDEF*?
Quina és la longitud del costat de l'hexàgon?



SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL C (TERCER CICLE PRIMÀRIA)

1.- L'EXCURSIÓ

Solució:

Un múltiple comú a quatre, dos i tres, és 12. Anem a calcular quantes pizzes serien necessàries per a 12 alumnes: 3 per a esmorzar + 6 per a dinar + 4 per a berenar, en total són necessàries 13 pizzes per a cada 12 alumnes. Aleshores 65/13 = 5, així doncs 12 * 5 = 60 alumnes.

DIFICULTAT: 30

2.- EMBOLIC D'ANIVERSARIS

Solució:

Júlia i Carles varen nàixer en març; Antoni i Carles varen nàixer el dia 20, aleshores Carles va nàixer el 20 de març. Així doncs: Júlia l'1 de març, Antoni el 20 de juliol i Pau el 17 de maig.

DIFICULTAT: 20

3.- L'EDIFICI

Solució:

De la porta 1 a la 9 es varen utilitzar 9 taulellets -> 35 – 9 = 26
A partir de la porta número 10, en cada porta s'utilitzen dos taulellets, aleshores 26 / 2 = 13, així doncs en total hi ha 9 + 13 = 22 portes.

DIFICULTAT: 20

4.- QUIN HORA ÉS?

Solució:

El segon rellotge marca les 5:05, es a dir, 20 minuts més que el primer i 20 menys que el tercer. El quart rellotge no té diferència de 20 minuts amb cap altre. Aleshores la resposta és l'hora del segon rellotge: 5: 05 h

DIFICULTAT: 10

5.- DÍGITS DESAPAREGUTS

Solució:

Els dígits desapareguts sumen 21

DIFICULTAT: 10

6.- QUIN COL·LEGI!!

Solució:

El nombre d'alumnes en 3r d'ESO (any nové de dotze anys) és 103.

DIFICULTAT: 20

7.- ENCREUAT NUMÈRIC

Solució:

En cap casella de l'encreuat aparéix el dígit imparell 3. La solució és la següent:

	3	1	2
		5	1
3	2	1	6
4	7	2	9

DIFICULTAT: 30

8.- LA SÈRIE

Solució:

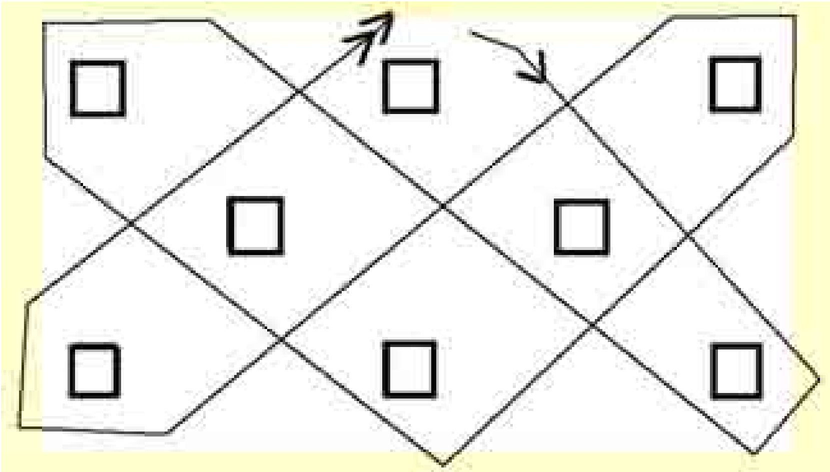
La solució es llegir literalment la línia de dalt. Per exemple, en la última línea tenim "tres (3) uns (1), un (1) tres (3) un (1) dos (2) un (1) uno (1) un (1) tres (3) un (1) dos (2) dos (2) uns (1)". Per tant, la següent línea és:

31131211131221

DIFICULTAT: 30

9.- ELS HUIT QUADRETS

Solució:



DIFICULTAT: 30

10.- A QUIN HORA VA ENTRAR LLUIS?

Solució:

Lluís va arribar a les dotze de la nit. En el precís moment d´ obrir la porta va sentir la darrera campanada de les dotze. Després la de les 12:30, la seguent la 01:00 y la ultima la de les 1:30 de la nit.

DIFICULTAT: 30

11.- LES NOU XIFRES

Solució:

Els números son : 219, 438, 657.

DIFICULTAT: 40

12.- EL PLANETA WI

Solució:

Al planeta WI utilitzen 220 paraules. La primera paraula de cada diccionari és AB.

DIFICULTAT: 20

13.- EL CAVALL

Solució:

El número de monedes és: $1+2^1+2^2+2^3+...+2^{22}+2^{23}=2^{24}-1=16777215$

DIFICULTAT: 40

14.- ANIMALS

Solució:

Vespa = 5, Pingüí = 2, Formiga = 0, Conill = 3, Tortuga = 1, Colom = 6

DIFICULTAT: 40

15.- QUADRAT MÀGIC

Solució:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

DIFICULTAT: 20

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL A (PRIMER CICLE ESO)

1.- QUADRAT MÀGIC

Solució :

2	7	5	70
8	6	1	48
4	3	9	108
64	126	45	

DIFICULTAT: 20

2.- CAMPIONAT DE FUTBOL

Solució :

Cada equip juga contra tots els altres, per tant si hi ha n equips cadascun jugara (n-1) partits. El nombre de partits serà doncs $n \cdot (n-1)$ si explicàrem 2 vegades cada partit (quan un equip juga de local i una altra de visitant), però com només ha de jugar un partit contra cada rival, dividirem entre 2 aquest resultat: $n \cdot (n-1)/2 = 91 \rightarrow n \cdot (n-1)= 182$

com $182 = 14 \times 13$, per tant en el campionat van participar 14 equips.

DIFICULTAT: 20

3.- BLANC I NEGRE

Solució :

B = caselles de color blanc; N = caselles de color negre

B	B	B	N
B	B	N	N
N	N	N	N
B	B	B	B

DIFICULTAT: 30

4.- EL MENTIDER

Solució :

No són possibles alhora les afirmacions "Ha sigut Juan" i "Ha sigut Luis", per tant Arturo o Juan menteixen.
Luis, per tant, no menteix.
Arturo menteix.
Juan diu la veritat, per això podem dir que ha sigut Luis.

DIFICULTAT: 20

5.- LA CLAU

Solució :

Representem el nombre amb: aabb
aabb=1100a + 11b = 11 (100a + b)

El nombre 100a + b = a0b ha de ser producte d'11 per un quadrat perfecte.
a0b, té tres xifres i la del centre és 0.

Es poden seguir diferents estratègies, per exemple:

a) Provar els productes d'11 per quadrats perfectes a partir de 16 i trobem: 11 x 64 = 704.

El nombre cercat és 7.744 = 882

b) Els quadrats perfectes acaben en: 1, 4, 5, 6, 9. i a+b ha de ser 11 per ser a0b múltiple d'11. Les possibles solucions para a0b són:

704 = 11 x 64 ; 605 = 11 x 55 ; 506 = 11 x 46 ; 209 = 11 x 19

L'únic producte d'11 per un quadrat perfecte és 704.

El nombre cercat és 7.744 = 882

DIFICULTAT: 30

6.- LA CAIXA FORTA

Solució :

La 4a i 5a xifra formen un nombre múltiple de cinc, per tant la 5a és 5.

La 6a, és 4 (54 múltiple de 6) , la 7a és 9, (49 múltiple de 7) l'octava és un 6 i la 9a és 3.

1o 2o 3o 4o 5o 6o 7o 8o 9o
5 4 9 6 3

Queden 1, 2, 7 i 8. En el 2n hi ha un 2 o un 8 i en el 4rt lloc un 8 o un 2 respectivament.

Si en el segon lloc hi ha un dos, en el tercer pot haver-hi un u o un set.
1o 2o 3o 4o 5o 6o 7o 8o 9o

2 7 5 4 9 6 3
2 1

Açò faria que en 4rt lloc estaria el 8, però ni 18 ni 78 són múltiples de 4. Per tant, en 2n lloc hi ha un 8 i en 4rt lloc un 2.

Les dues possibles solucions són:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
1	8	7	2	5	4	9	6	3
7	8	1	2	5	4	9	6	3

DIFICULTAT: 30

7- QUINA CREU!

Solució :

36 decímetres quadrats.

DIFICULTAT: 10

8.- CURIÓS JOC DE DAUS DE COLORS

Solució :

Amplien la taula amb una columna que correspon al producte dels resultats dels dos daus:

TIRADA	DAU ROIG	DAU BLAU	PRODUCTE
1ª	2	5	10
2ª	1	3	3
3ª	6	6	36

Els resultats de Ruben, Jose i Núria queden reflectits en aquesta taula expressats en tres valors enters (per les tres situacions, vector de tres coordenades)

TIRADA	PUNTS DE RUBEN		PUNTS DE JOSE		PUNTS DE NÚRIA	
		Total		Total		Total
1ª	(+3,-2,0)	+1	(-2,+3,0)	+1	(-2,-2, 0)	-4
2ª	(0,-2,-2)	-4	(0,+3,-2)	+1	(0,+3,+3)	+6
3ª	(+3, 0,-2)	+1	(-2, +0,-2)	-4	(-2,+0,3)	+1

En la 1ª tirada guanyen Ruben i Jose amb una puntuació de +1

En la 3ª tirada, la puntuació acumulada és:

- Per a Ruben: +1-4+1=-2
- Per a Jose: +1+1-4=-2
- Per a Núria: -4+6+1= 3

Per a empatar tots tres al final de la partida, en la 4ª tirada, en el dau roig ha de aparèixer parell, el dau blau imparell , i el producte de tots dos no siga ni impar ni quadrat perfecte, és adir, no ixquen les parelles (n,1) per a n=2,4,6 (observar que aquestes duples no donen productes que siguen valors primers) per a que Ruben tinga la puntuació (+3,-2,0) , Jose (-2, +3, 0) i Núria (-2,-2, 0) .

I suma final seria de -1 per a tots tres.

DIFICULTAT: 40

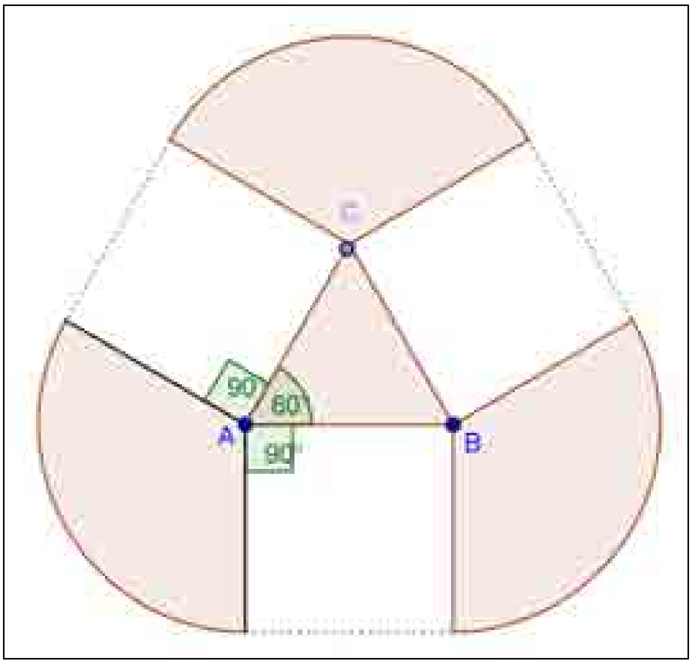
9.- CANTONADES REDONDEJADES

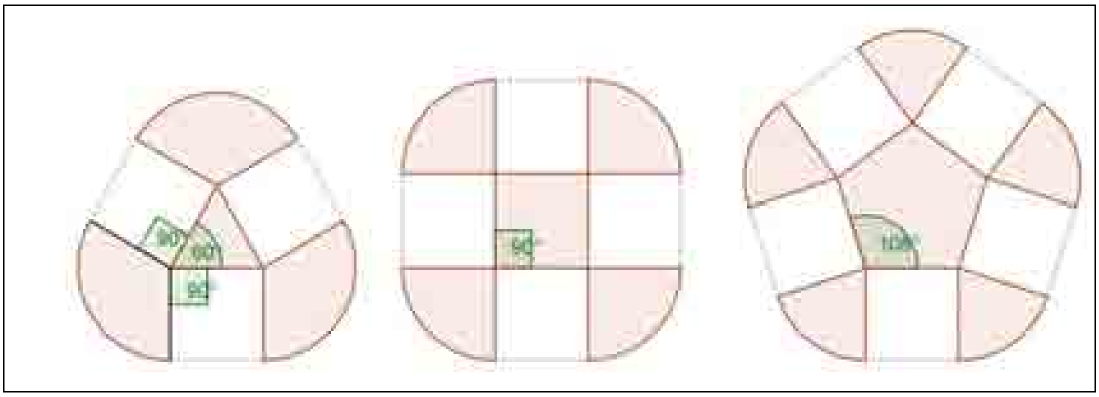
Solució :

En el triangle equilàter, l'angle interior del triangle és de 60º i en el vèrtex A, la suma dels angles és : 2·90º+60º=240º

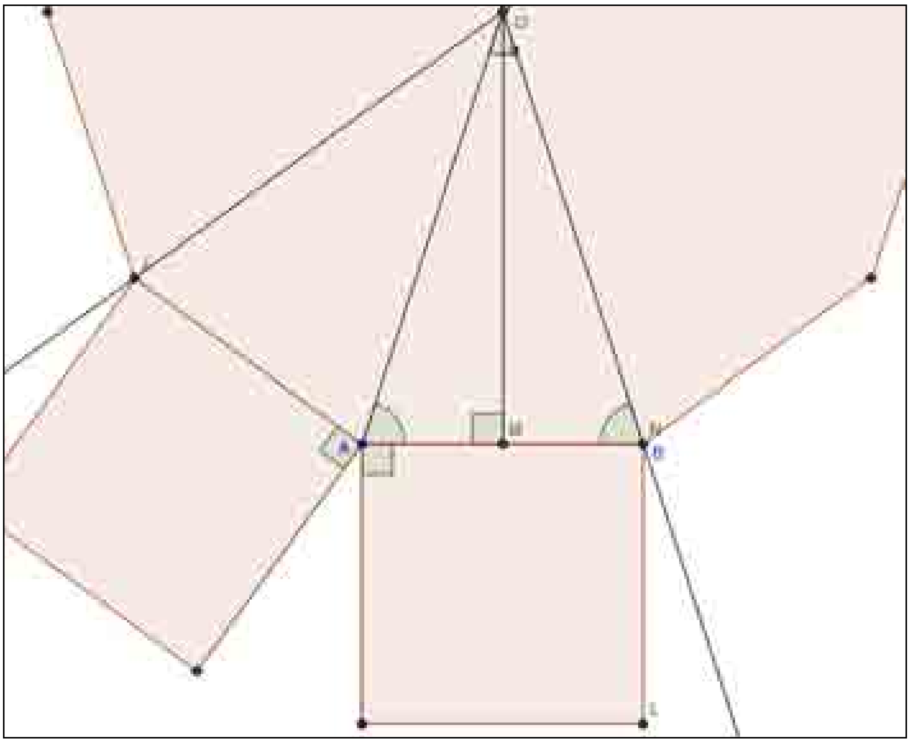
Per tant el sector circular en A té una amplitud α=360º -240º =120º

Al ser tres sectors circulars de mateixa amplitud l'àrea demanada és : $3\cdot\pi\cdot(\cdot 120º)= \pi$ cm^2





En el quadrat és evident que l'area dels Quatre sectors circulars també és π cm^2. En el pentàgon l'angle interior en un vèrtex és de 108º. Però 5·108º=360º i de nou es tracta de l'àrea del cercle de radi 1 cm. Per tant la suma de les cantonades és π cm^2.



Per a un decàgon, l'angle central α és $\alpha = \frac{360^o}{10} = 36^o$ i per tant l'angle A en el triangle rectangle OMA mesura $\widehat{A} = 90^o - \frac{36^o}{2} = 90^o - 18^o = 72^o$,

L'angle interior en el polígon en el vèrtex A mesura el doble que l'angle calculat en OMA:

$180^o - \frac{360^o}{10}$

Si calculem l'angle del sector circular que resulta de calcular

360º -(2·90º+$180^o - \frac{360^o}{10}$)=$\frac{360^o}{10}$ que és la mida de l'angle central.

Com n'hi ha "10" sectors circulars, tenim en total $10 \cdot \frac{360^o}{10} = 360^o$ que és l'angle que completa un cercle i per tant la seua àrea és π cm^2.

DIFICULTAT: 30

10.- SUMA DE LLETRES

Solució :

D= 1, E= 4, F= 8

DIFICULTAT: 20

11.- UNA RELACIÓ CURIOSA

Solució :

Si el divisor és 13, els residus de la divisió aniran de l'1 fins al 12:

$13 \cdot 1 + 1 = 14$
$13 \cdot 2 + 2 = 28$
$13 \cdot 1 + 3 = 42$
$13 \cdot 2 + 4 = 56$
$13 \cdot 1 + 5 = 70$
$13 \cdot 2 + 6 = 84$
$13 \cdot 1 + 7 = 98$
$13 \cdot 2 + 8 = 112$
$13 \cdot 1 + 9 = 126$
$13 \cdot 2 + 10 = 140$
$13 \cdot 1 + 11 = 154$
$13 \cdot 2 + 12 = 168$

Observem que són el dotze primers múltiples de 14, ja que $13 \cdot n + n = n \cdot (13+1) = n \cdot 14$, però no són tots els múltiples de 14 perquè els residus de les divisions per 13 són menors a 13.

DIFICULTAT: 30

12.- LES XULLES

Solució :

Per a entendre millor la solució de Clara, nomenem A, B i C a les xulles: cadascuna té dos costats 1 i 2. En els primers 10 minuts es torren els costats A1 i B1. Ara retirem la xulla B. En els 10 minuts següents posarem al foc els costats A2 i C1. La xulla A ja estarà acabada. En deu minuts mé posarem els costats B2 i C2.

DIFICULTAT: 30

13.- EL CUPÓ

Solució :

Per tempteig obtenim que el resultat és 31113.

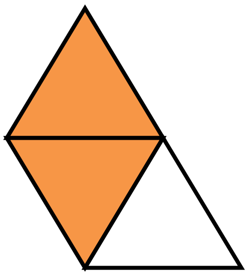
DIFICULTAT: 30

14.- DIAMANTS

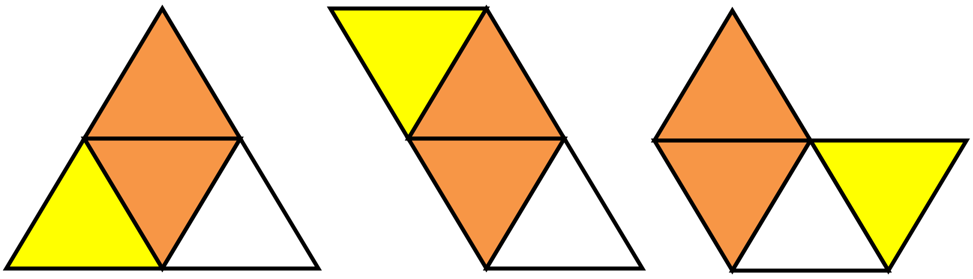
Solució :

Per a formar els tri-amants afegirem un triangle equilàter en cadascun dels costats possibles de la figura, eliminant les figures que siguen iguals.

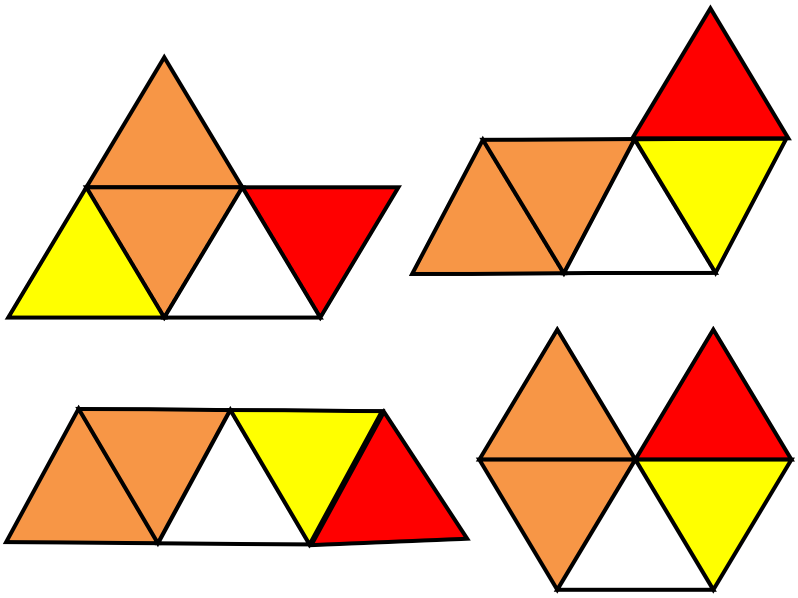
-Hi ha un únic tri-amant



-Hi ha tres tetra-amants



-I finalment hi ha quatre diferents penta-amants



DIFICULTAT: 30

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL B (SEGON CICLE ESO)

1.- TRES DÍGITS

Solució :

Siga *abc* el número de tres dígits escrit a la pissarra. *abc* + *cba* = 92(a+b+c)
Expressant els números de tres dígits en notació decimal, tindrem la equació: $100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 92(a + b + c)$.
Resolent esta equació tindrem: $9a + 9c = 72b$, o de manera equivalent: $a + c = 8b$
Com a, b *i* c són els dígits del 0 al 9, b únicament pot prendre els valors 1 i 2.
Cas 1. <u>Si $b = 1$,</u> $a + c = 8$ i per tant les possibilitats de a i c respectivament seran:
$a = 2, 6, 3, 5$ i $c = 6, 2, 5, 3$ sent els números buscats en aquest cas: 216, 612, 513 i 315.
Cas 2. <u>Si $b = 2$</u>, $a + c = 16$ i per tant les possibilitats de a i c respectivament seran:
$a = 9, 7$ i $c = 7, 9$. En aquest cas ixen dues possibilitats: 927 i 729.

D'acord amb els casos 1 i 2, e**ls números buscats són: 216, 612, 315, 513, 729 i 927**.

DIFICULTAT: 30

2.- CONCURS DE TELEVISIÓ

Solució :

En el moment original on el concursant ha de prendre la seua primera decisió, és evident que la probabilitat que esculla la porta on s'amaga el regal és igual a 1 / 3. Suposem que opta per una porta determinada. Es troba que el presentador li ofereix una nova informació: li redueix les tres possibilitats inicials a dos. Això canvia per tant les probabilitats, ja que la porta oberta pel presentador passa a tenir probabilitat 0, mentre que les altres dues es reparteixen l'1 / 3 que aquesta porta perd. Però, de quina manera? Per descomptat, no equitativament, ja que la porta triada pel concursant segueix tenint probabilitat 1 / 3 i l'altra que no va obrir el presentador passa a tenir probabilitat 2 / 3.

Per tant, el concursant sí hauria de canviar la seua elecció original, ja que amb això duplica la probabilitat d'obtenir el regal.

DIFICULTAT: 10

3.- L'HORTA DEL GRANGER

Solució :

Sabem que l'àrea de tot l'hort és igual a 8 x 8 = 64 metres quadrats. A més a més, el triangle ABE té per àrea 16 metres quadrats. Els triangles ABE i FCB són semblants i la raó de semblança és:

- Hipotenusa de ABE (h1): $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
- Hipotenusa de FCB (h2): 8
- Raó de semblança: $4\sqrt{5} / 8 = \sqrt{5} / 2$

Per tant la raó de les seues àrees és igual a 5 / 4. L'àrea del triangle FCB serà per tant igual a (4 / 5) per l'àrea del triangle ABE. Per tant, l'àrea del triangle FCB, és igual a: (4 / 5) 16 = 64 / 5 metres quadrats. Així tenim que l'àrea del quadrilàter demanat és igual a: 64-16 - (64 / 5) = **176 / 5 metres quadrats**

DIFICULTAT: 30

4.- OVELLES I OQUES

Solució :

Nosaltres utilitzarem el mètode algebraic, per això anomenem x al nombre d'oques i y al nombre d'ovelles, llavors podem plantejar la següent equació amb dues variables: $(2x + 4y) = 3{,}7\ (x + y)$

Si multipliquem per 10 les dues equacions i simplifiquem arribem a la relació:

$17x = 3y$

Atès que el nombre d'animals és menor que 40, l'única possibilitat és que Raúl tinga 20 animals, dels quals **17 són ovelles i 3 són oques.**

DIFICULTAT: 20

5.- OPERACIÓ DELTA

Solució :

Per definició de Δ:

1Δ2=$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3Δ4=$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

I per tant: (1Δ2) Δ (3Δ4) =$1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=1-2=-1$. El resultat és: -1

DIFICULTAT: 10

6.- QÜESTIÓ DE NOMBRES

Solució :

Diguem que el nombre de 5 dígits és de la forma a b c d e, on 0 ≤ a,b,c,d,e ≤ 9, a≠0. Com el producte dels dígits és 2000, hem de tindre el producte: abcde=2000=$2^4 5^{3.}$

Donat que els dígits són menors que 10, hi ha 3 xifres que han de ser 5. Les dues xifres restants han de tindre com a producte 16, o el que és el mateix, 2^4. Per tant, aquestes dues xifres han de ser 4 i 4, o 2 i 8.

Posibilitat 1:

Cas 1: Utilitzant els números 5, 5, 5, 4, 4 hi ha $\frac{5!}{3!2!}=10$ números possibles.

Cas 2: Utilitzant el números 5, 5, 5, 2 i 8 hi ha $\frac{5!}{3!}=20$ números possibles.

Per tant, en total hi ha 30 possibles números de 5 xifres els productes de les quals és 2000.

Posibilitat 2:

Triem 3 de les 5 posicions per als 5s en (5 3) maneres. Hi ha 3 posibilitats per als dos dígits que queden (inclosos l'ordre): 2,8 – 4,4 – 8,2.

Per tant, hi ha 3x(5 3)=3x10=30 casos possibles.

El resultat és: 30 números de 5 xifres.

DIFICULTAT: 30

7.- SUMA RADICAL

Solució :

Cal tindre en compte que per a tot valor de k enter positiu i $k^2 \le n \le (k+1)^2$, aleshores $k \le \sqrt{n} < k+1$ i per tant $[\sqrt{n}]=k$.

Per tant:

$1 \le n \le 3, \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$

$4 \le n \le 8, \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2$

$9 \le n \le 15, \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 3$

etc...

La suma es calcula de la següent manera:

(1+1+1)+(2+2+2+2+2)+(3+...+3)+...+(6+...+6)+(7+7)=

=3x1+5x2+7x3+9x4+11x5+13x6+2x7=

=3+10+21+36+55+78+14=

=217

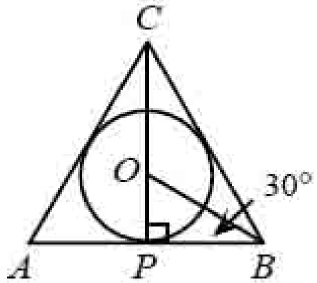
El resultat és: 217

DIFICULTAT: 10

4.- CERCLES INSCRITS

Solució :

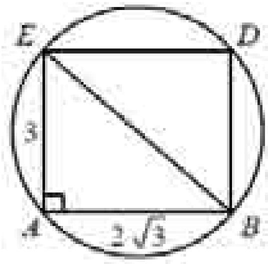
Primer, calculem la longitud del costat del triangle equilàter ABC.



Siga O el centre del cercle menut i P el punt de tangència del cercle amb el costat AB.

Unim OP i OB. Aleshores, donat que CBA=60º, OPB=90º per tangència i OBP=30º per simetria.

Com OP=1 i ΔBOP es 30º-60º-90º, aleshores OB=2 i BP=$\sqrt{3}$. Per tant, AB=$2\sqrt{3}$. També per simetria obtenim que CO=OB=2, i CP=3.



Com ABDE és un rectangle i CP⊥AB, AE=3. Ara ens fixem en el rectangle ABDE i en la seua circumferència. Com ABDE és un rectangle, EAB=90º. BE és un diàmetre.

Per Pitàgores:

$BE^2=EA^2+AB^2=3^2+(2\sqrt{3})^2=21$

El diàmetre és $\sqrt{21}$.

DIFICULTAT: 40

9.- El BALL DE FI DE CURS

Solució :

x-1 és múltiple de 4 → parell x → imparell

x-2 és múltiple de 5 → acaba en 0 o en 5. Llavors x acaba en 2 o en 7. No pot ser 2 perquè hem deduït prèviament que era imparell.
X → acaba en 7

Com a x-3 és múltiple de 7 el 17 serà el primer nombre buscat.

DIFICULTAT: 30

10.- SECTORS EN UN TRIANGLE

Solució :

Es r el radi de l'arc m. L'àrea del sector determinat així en el triangle és 1/8 de l'àrea del cercle. Per tant,

$$\frac{1}{8}\pi r^2 = 1 \Rightarrow r = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

El radi del cercle n és

$$r_1 = |AB| - r = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$$

L'àrea de la regió buscada és llavors

$$S = 1 - \frac{1}{8}\pi \cdot 8\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi$$

DIFICULTAT: 40

11.- ELS TRENS

Solució :

Anomenem:
R al tren més ràpid,
L al tren més lent i
x a la distància recorreguda per R en 15min.

Pel que tenim: en 15 min L recorrerà x-1 La velocitat de R=4x Km/h L=4x-4 Km/h 3600/x +15=3600/(x-1); .... x=16.
la velocitat del tren més ràpid és de 64Km/h

DIFICULTAT: 30

12.- LES CAMISES

Solució :

Anomenem x al número total de camises; aleshores $\frac{x}{3} - 2$ son el número de camisas de talla gran; i la resta són $\frac{2x}{3} + 2$. La tercera part d'esta quantitat són camises de talla menuda, per tant són $\frac{2x}{9} + \frac{2}{3} - 2$ camises, i en restar aquestes camises de talla menuda a les que quedaven tindrem $\frac{2x}{3} + 2$ - $(\frac{2x}{9} + \frac{2}{3} - 2)$ camises de talla mitjana.

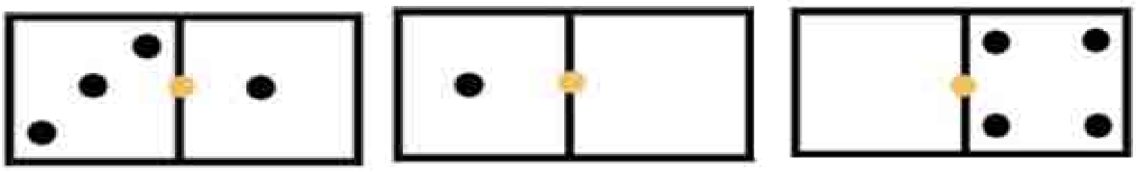
La resta ens dona l'expresió $\frac{4x}{9}+\frac{10}{3}$ camises de talla mitjana, com hi ha 22 més que de talla gran obtenim l'equació $\frac{x}{3}-2+22 = \frac{4x}{9}+\frac{10}{3}$ i reduint a denominador comú: $\frac{3x}{9}-\frac{180}{9}=\frac{4x}{9}-\frac{30}{9}$ d'on x = 150 camises.

DIFICULTAT: 20

13.- LES FITXES DEL DÒMINO

Solució :

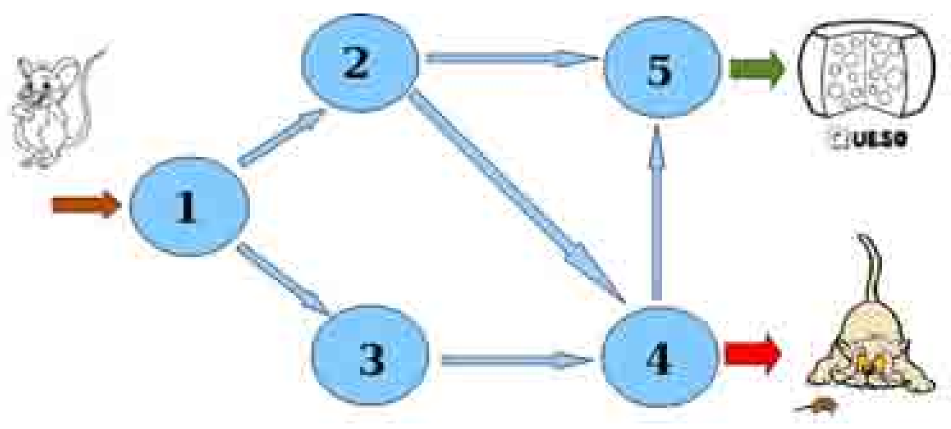
Els números primers de tres xifres que poden ser coherents amb l'enunciat i ser les tres primeres puntuacions són 011, 211, 233, 311 i 433.
A més, els únics quadrats que poden ser les tres últimes xifres són 004, 225 i 441.
Cal buscar una combinació d'ambdues de forma que la suma siga un quadrat. Aleshores veurem que l'única combinació posible consisteix a que les tres primeres xifres siguen 311 i les tres últimes siguen 004. Per tant, les fitxes són:



DIFICULTAT: 30

14.- EL FORMATGE DEL RATOLÍ

Solució :



De tots els ratolins que entren pel node 1, esperem que la mitat es dirigisquen al node 2, i l'altra mitat al node 3. De la mitat que està en el node 2, la mitat (és a dir la quarta part del total) triarà el camí del formatge, i l'altra quarta part passarà al node 3. Després pel node 3 passen les 3/4 parts dels ratolins. Veiem que entre el node 3, el 4 i el 2 s'establix un cicle, de manera que en cada pas pel cicle, la quarta part dels ratolins que han arribat al node 3 aconseguiran el formatge, una altra quarta part torna al node 3.

Açò genera una progressió geomètrica de raó 1/4, els infinits termes de la qual podem sumar. Si anomenem Q al succés "el ratolí va menjar el formatge" tenim:

$$\mathbf{P(Q)} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

DIFICULTAT: 40

15.- L'HEXÀGON

Solució :

Si des del centre de l'hexàgon tracem un segment a cada un dels vèrtexs de l'hexàgon, ho subdividim en 6 triangles equilàters, l'àrea del trapezi correspon exactament a 2 triangles i mig dels 6. Per tant podem plantejar una regla de tres simple:

Triangles	àrea	
2'5	10√3	
6	x	d'on x =24√3 m^2

Per a calcular el costat, tenim en compte la fórmula de l'àrea de l'hexàgon on p és el perímetre i Ap és l'apotema. A més en l'hexàgon Ap = l•cos30º, és a dir Ap = l x √3/2, on l és el costat de l'hexàgon.

Substituint tenim que $A=\frac{6\cdot l\cdot l\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{3\cdot l^2\cdot\sqrt{3}}{2}$ després $l^2=\frac{2\cdot A}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 24\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=16$

per tant l = 4 m.

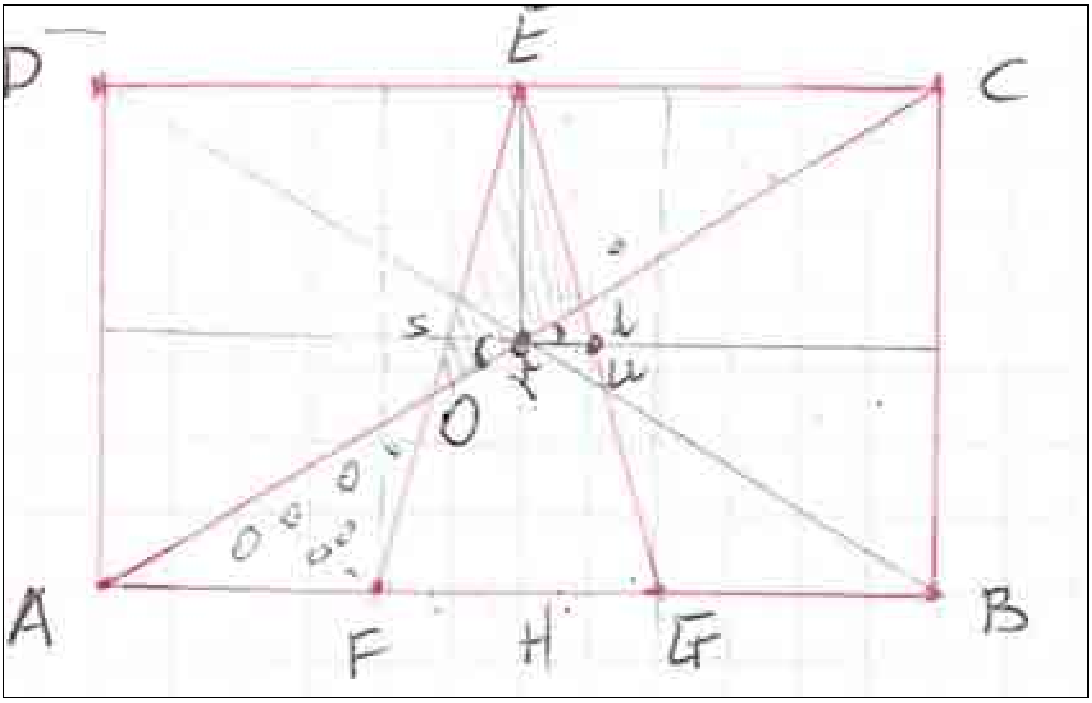
DIFICULTAT: 30

PROBLEMA OBERT

A continuació publiquem la solución al PROBLEMA OBERT de PROBLEMES OLÍMPICS NÚM 57, què ens ha enviat el nostre company Juan Pagés Segarra. Agraïm al company la seua col·laboració i us recordem què podeu enviar les vostres solucions al Problema Obert, així con qualsevol comentari per tal de millorar la revista.

PROBLEMES OLÍMPICS Nº 57.

PROBLEMA OBERT: UN TRIANGLE EN UN RECTANGLE.



Hem realitzat el dibuix suposant que el rectangle mesura 12·7= 84 Unitats quadràtiques.

En traçar l'altra diagonal s'observa que el triangle ORS=IRU per ser oposats pel vèrtex, en conseqüència es forma un triangle isòsceles SEU de base 2 i altura 3,5. L'àrea será 2 · 3,5 : 2= 3,5 unitats quadràtiques.

Ja que el triangle EOI= SEU.
Extrapolant l'àrea del problema original la superfície que s'ens demana seria: Àrea dibuix: Superfície triangle = Àrea real : x

Es a dir, l'àrea del dibuix és a la superfície del triangle com l'àrea real és a "X". → 84 : 3,5 = 70 : x → d'on X= 3,5 · 70 : 84= 2,916… unitats quadràtiques.

ACTUALITZEU ELS VOSTRES CORREUS ELECTRÒNICS...!!!

ATENCIÓ, SOCIS!! Per tal de facilitar la comunicación amb els socis de la SEMCV i actualitzar la nostra base de dades, us demanem que ens informeu de les posibles variacions en les vostres dades personals i bancàries, especialemnt en les vostres adreces de correu electrònic. És important tindre aquesta información per a un millor funcionament de la societat. És suficient que envieu un correu electrònic a **tresorer@semcv.org** amb les variacions de les vostres dades posant en el assumpte "ACTUALITZAR DADES PERSONALS". Gràcies per la vostra col·laboració.

CONTACTEU AMB NOSALTRES...!!!

Si vols enviar-nos solucions de Problemes Oberts, propostes de problemes o de temes, comentaris i suggeriments... pots enviar una carta a la nostra adreça:

SEMCV "AL-KHWARIZMI"
PROBLEMA OBERT
APARTAT 22.045
46071-VALENCA

També pots enviar un missatge al correu electrònic:

problemesolimpics@semcv.org

ESPEREM LES VOSTRES COL.LABORACIONS!!!

S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

XIII CONCURS DE FOTOGRAFIA "MATEMÀTICA A LA VISTA"

Primer Anunci. Extracte de les B A S E S

1. La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi" convoca el **XIII Concurs de Fotografia "Matemàtica a la vista"** amb dos apartats:

    - **Apartat I**: Poden participar totes les alumnes i tots els alumnes que cursen actualment estudis de Primària, Secundària, EPA, FP, Cicles formatius i Batxillerat.

    - **Apartat II**: Pot participar qualsevol persona no inclosa en l'apartat anterior.

2. Les fotografies, originals, en blanc i negre o en color*, en paper*, tindran una grandària de al menys 10 x 15 per a l'apartat I, i almenys A4 per a l'apartat II.

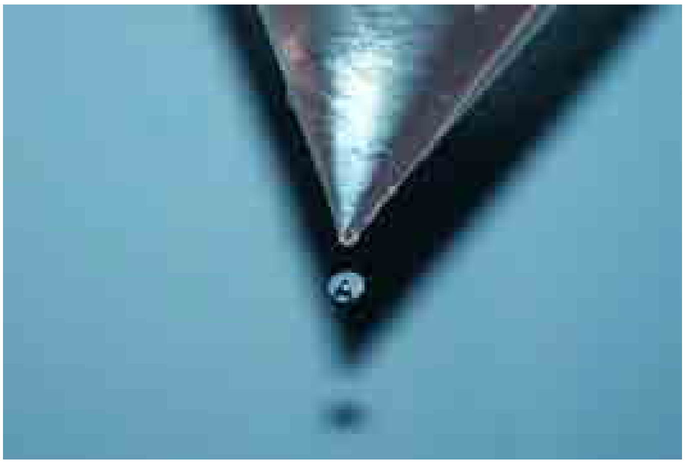
    Cada fotografia es presentarà muntada sobre cartolina amb un títol o peu de foto visible, que pose de manifest la condició matemàtica del concurs. Cada sèrie —tres o més fotos sobre un mateix tema— s'identificarà amb títol únic, si bé cada foto portarà subtítol.

3. Els premis, que contemplaran la fotografia i el seu peu de foto, seran:

    - **Apartat I**: 1r: 150 € 2n: 100 € 3r: 75 €
      4t: Tres premis iguals de 30 €
      Millor sèrie: 150 €.

    - **Apartat II**: (Premi a una fotografia o una sèrie)
      1r 250 € 2n 150 €

4. Les fotografies rebudes s'exposaran en Alacant durant la celebració de les X Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi,* en el mes d'octubre del 2012.



"GOTA+GOTA=OLA"
Primer premi del XII Concurs de fotografia matemática **Matemàtica a la vista**

Autora: Miriam Arabí Ribes
IES Gata de Gorgos

S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

X JORNADES DE LA SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA "AL-KHWARIZMI". *Matemàtiques dinàmiques* ALACANT 2012

Els dies 19, 20 y 21 d'octubre tindrà lloc en la Universitat d'Alacant les X JORNADES DE LA SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA "AL-KHWARIZMI", amb el lema ***Matemàtiques dinàmiques***. Hem obert ja el termini de presentació de propostes de comunicacions, pòsters o tallers relacionats amb l'Educació Matemàtica, Geogebra, les Tecnologies de la Informació i la Comunicació aplicades a les Matemàtiques, la Didàctica de les Matemàtiques, i en general, qualsevol apartat teòric, pràctic o aplicat de les matemàtiques. Tota la informació la tindreu a la web www.semcv.org

Podeu enviar les vostres propostes, ABANS DEL 19 de MAIG de 2012 a la següent adreça electrònica xjornades@semcv.org a l'atenció de Salvador Caballero Rubio, indicant en l'assumpte **X Jornades matemàtiques**.

Presentació de Comunicacions, Tallers i Panells

La presentació de comunicacions, tallers i panells haurà de realitzar-se **abans del dia 19 de maig,** trametent la fitxa corresponent, complimentada, juntament amb un breu resum (10 línies a doble espai en format DIN A-4) del seu contingut i estructura. La condició indispensable per a ser acceptada qualsevol presentació és que el seu autor estiga inscrit a les Jornades, i en cas de ser un grup, al menys que ho estiga un dels autors.

Amb la finalitat de poder agrupar els treballs presentats d'acord amb la seua afinitat temàtica, cadascun d'ells cal que vaja acompanyat de les paraules clau que millor l'identifiquen, com a exemple indiquem:

- Títol de la comunicació o panell.
- Objectiu general del treball (formació inicial del professorat, formació permanent, aprenentatge, currículum, ...)
- Nivell educatiu: primària, secundària, universitat...
- Temes específics que aborda: treballs pràctics, resolució de problemes, avaluació...

El treball complet no ha d'ocupar més de 5 DIN A-4 a doble espai i cal enviar-lo per correu electrònic. Els gràfics s'han de trametre en format TIFF o EPS, indicant la seua col·locació en el text o bé ja inserits en ell. Està prevista l'edició d'un **CDROM** en el que es recolliran, a més de les ponències i comunicacions, els treballs de tipus informàtic (programes, animacions,...) que es vulguen presentar acompanyant les ponències.

En el proper anunci vos inclourem la fitxa d'inscripció i model per a enviar presentacions. Podeu demanar més informació a l'adreça electrònica xjornades@semcv.org

Vols fer-te soci? Ompli la següent butlleta d'inscripció i ens l'envies a la nostra seu. Anima als teus companys o inscriu al teu centre a la nostra societat.

INSCRIPCIÓ I DOMICILIACIÓ BANCÀRIA

Societat d'**E**ducació **M**atemàtica de la **C**omunitat **V**alenciana

"Al-Khwārizmī"

Facultat de Magisteri "Ausiàs March"
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Apartat 22.045 46071VALÈNCIA

Cognoms:..Nom:...................................
DNI / NIF:.....................................

Domicili particular:

Població:...D.P.:...............
Carrer:...
Telèfon:...
Correu-e:...................................

Centre de treball:

Nom:...
Carrer:...Població:.................................D.P.:...........
Telèfon:..Correu-e:...

Entitat bancària (on es lliurarà el cobrament de quotes):

Nom:...
Carrer:...Població:.................................D.P.:..........
Codi Compte Client:

Entitat Oficina D.C. Nº Compte

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

✂ ____

Sr. Director de la Sucursal...
del Banc/Caixa d'estalvis...

Distingit Senyor:

Us pregue que atengueu, amb càrrec al meu compte nº: c/c - llibreta: ...., i fins a nova ordre, els rebuts que anualment siguen presentats a nom de .... per la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al Khwārizmī".

Atentament,

....a...........de.......................................de 2012.

(signatura)

El titular del compte:...
DNI:...

Esta revista es publica amb el suport de l'Acadèmia Valenciana de la Llengua

Amb la col·laboració de la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana

Trobaràs tota la informació en la nostra web.

Societat d'Educació Matemàtica
Comunitat Valenciana
Al-Khwarizmi

Visiteu-la: www.semcv.org

S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

Societat d'Educació Matemàtica de la

Comunitat Valenciana

"Al-Khwarizmi"