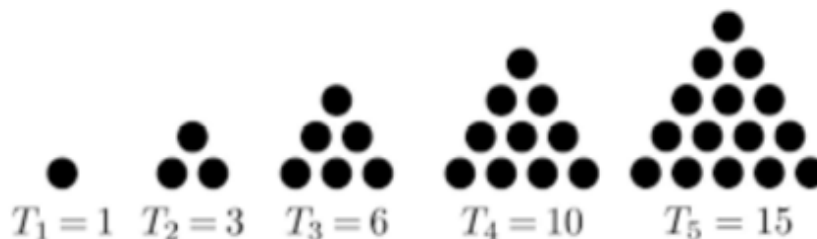


SOLUCIONS PROBLEMES OLIMPIADA AUTONÒMICA 2018 1r CICLE

PROBLEMA 1: NOMBRES TRIANGULARS

L'estudi dels nombres i les seues relacions ha estat tradicionalment una de les disciplines més boniques en matemàtiques. En aquest camp, els pitagòrics van fer grans progressos i se'ls atribueix, entre d'altres, l'estudi dels nombres triangulars. S'anomenen triangulars perquè, com descriu la figura, són el nombre



d'elements necessaris per a crear un triangle equilàter:

Per tal de trobar l'enèsim nombre triangular podem aplicar la fórmula:

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Per exemple, per a $n=5$, trobem que $T_5 = \frac{5 \cdot (5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15$, com ens mostra la figura de dalt.

Aquests nombres han resultat ser ben curiosos. Podries dir quins són els dos nombres triangulars consecutius que sumen 1764?

SOLUCIÓ:

La idea és que se n'adonen que la suma de dos nombres triangulars consecutius dóna un quadrat perfecte. A continuació comprovar que, efectivament, 1764 és un quadrat perfecte,

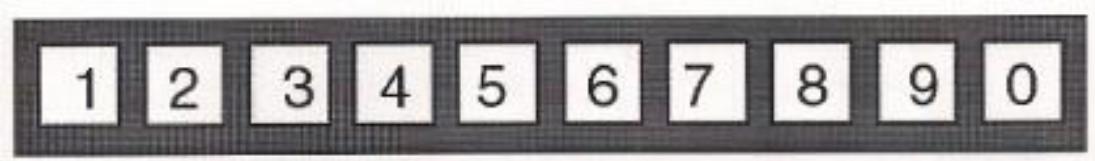
$1764=42^2$, i calcular els nombres triangulars 41 i 42:

$$T_{41} = \frac{41 \cdot (41+1)}{2} = \frac{41 \cdot 42}{2} = 861 \quad \text{i} \quad T_{42} = \frac{42 \cdot (42+1)}{2} = \frac{42 \cdot 43}{2} = 903.$$

Per tant, la solució seria $1764=861+903$.

PROBLEMA 2: SUMES DESCONEGUDES

Col·loca totes les xifres següents



de manera que facen aquesta suma. Sabent que el resultat no pot començar per zero.

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline \square \square \square \square \end{array}$$

SOLUCIÓ:

Hi ha diverses solucions, algunes són les següents:

$$\begin{array}{r} \square \square \square \quad \square \square \square \\ + \square \square \square \quad + \square \square \square \\ \hline \square \square \square \square \quad \square \square \square \square \end{array}$$

7 6 5 6 5 7
3 2 4 4 3 2
1 0 8 9 1 0 8 9

PROBLEMA 3: PESADES

Tenim 1 kg de sucre i necessitem pesar-ne 375 g per a fer-li el pastís d'aniversari a la Laia. Disposem d'una balança de platerets de precisió com podem veure en el dibuix i de dues peses; una de 200 g i l'altra de 50 g, com ho farem?



SOLUCIÓ:

Hi ha moltes solucions. Una d'elles és:

- 1r. Col·loquem les dues peses en un plateret. D'aquesta manera s'obtenen 250 g de sucre que es deixaran a part en una safata, prèviament preparada.
- 2n. Col·loquem la pesa de 50 g en un dels platerets i posem sucre en l'altre plateret fins equilibrar la balança. A continuació substituïm la pesa de 50 g per sucre, fins equilibrar, altra vegada, la balança. D'aquesta forma obtenim 100 grams de sucre, 50 g de cada plateret que es posen en la mateixa safata que abans. En aquest moment, tenim pesats 350 g, 250 g de la primera pesada i 100 g de la segona. Falten 25 grams.
- 3r. Per aconseguir els 25 grams que falten, pesem 50 g de sucre amb la pesa de 50 g. A continuació, llevem la pesa i repartim equitativament entre els dos platerets els 50 grams de sucre, fins que la balança estiga equilibrada. D'aquesta manera obtenim 25 g de sucre en cadascun dels dos platerets. Posem el contingut d'un dels platerets en la safata i així obtenim 375 g de sucre.

PROBLEMA 4: ESCURADENTS

Quants escuradents necessitarem per a formar **2018** triangles, com es veu en el dibuix, utilitzant un escuradent per a cadascun dels costats del triangle?



I si volguérem formar **x** triangles?

SOLUCIÓ:

Per a començar la resolució, podem fer una taula que relacione el nombre de triangles amb el nombre d'escuradents, com veiem a continuació:

Nombre de triangles, x	1	2	3	4	...	2018	...	x	
Nombre d'escuradents, N	3	5	7	9					

Veiem que el nombre d'escuradents sempre és el doble del nombre de triangles més 1:

Si $x=1$, aleshores: $N = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Si $x=2$, aleshores: $N = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

Si $x=3$, aleshores: $N = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Si $x=4$, aleshores: $N = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

....

Així, si $x=2018$, aleshores: $N = 2 \cdot 2018 + 1 = 4037$. Per tant, per a formar 2018 triangles necessitarem 4037 escuradents.

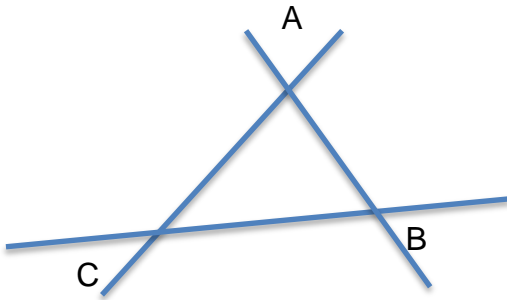
En general, si volguérem fer **x** triangles, necessitaríem $N = 2 \cdot x + 1$ escuradents.

PROBLEMA 5: VA DE RECTES

Quin és el nombre màxim de triangles que es poden formar amb 5 línies rectes?
I amb n línies rectes?

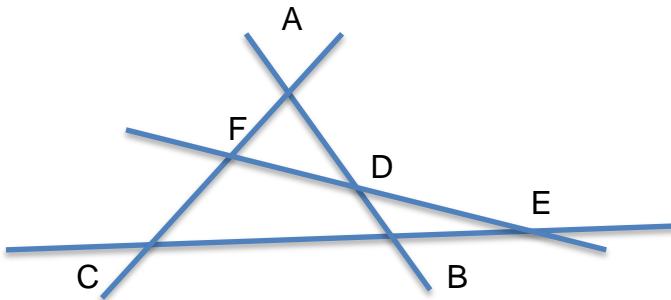
SOLUCIÓ:

Es necessiten almenys tres línies rectes per a formar un triangle:



El triangle format és el ABC.

Amb quatre línies es poden formar quatre triangles, que són: ABC, ADF, DEB i FEC.



Amb **cinc línies es poden formar deu triangles** i així dibuixant podríem completar una taula com la següent:

Nombre de rectes, n	1	2	3	4	5	...	n
Nombre de triangles, N_t	0	0	1	4	10	...	$N_t = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$