LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO

Expresiones algebraicas

Para expresar un enunciado en **lenguaje algebraico**:

1º Leemos atentamente el enunciado.

2º Buscamos los valores desconocidos o incógnitas y los representamos con letras.

3º Expresamos el enunciado en lenguaje algebraico en función de la letra o letras elegidas.

Asocia cada enunciado de la izquierda con una expresión algebraica de la derecha.

a) La cuarta parte de los euros que tiene Laura.	I. $2(x+10)$
b) Un número entero menos el doble del anterior.	II. $3x+x^2$
c) La edad de una persona hace 5 años.	III. $3x/10$
d) El triple de un número más su cuadrado.	IV. $x-5$
e) Tres décimas partes de la cantidad de agua de un vaso.	V. $x-2(x-1)$
f) El doble de la edad que tendré dentro de 10 años.	VI. $x/4$

PROBLEMA EXTRAÍDO DEL CUADERNO "REFUERZO DE MATEMÁTICAS", DE LA EDITORIAL SM. Este problema no forma parte del concurso de resolución de actividades.

1 — 2 ES IGUAL A 1

Supongamos que **a** y **b** son iguales a uno, entonces podemos escribir: $a = b$

multiplicamos por **a** los dos términos: $a^2 = ab$

restamos **b** al cuadrado:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a-b)(a+b) = b(a-b)$$
$$a+b = b$$
$$2 = 1$$

2 — 4 ES IGUAL A 2

$4 = 4$

Restamos **4** a ambos lados de la ecuación:
$4 - 4 = 4 - 4$

En un lado factorizamos usando la "suma por su diferencia" y en el otro lado se factoriza por 2: $(2-2)(2+2) = 2(2-2)$

Cancelamos los términos iguales a cada lado de la ecuación: $(2-2)(2+2) = 2$

Nos queda como resultado: $4 = 2$

3 — 0 ES IGUAL A 1

$$0 = 0+0+0+\ldots$$
$$= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$
$$= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$$
$$\text{(ley asociativa)}$$
$$= 1+0+0+0+\ldots = 1$$

4 · 5 · 6 — UN NÚMERO Y SU SIGUIENTE SON IGUALES

Partimos del desarrollo del cuadrado de un binomio:

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad (n+1)^2 - (2n+1) = n^2$

restamos a cada término $n(2n+1)$:

$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$

sacando factor común $(2n+1)$ en el primer término nos queda:

$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$ **sumamos en cada término** $\frac{(2n+1)^2}{4}$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} \quad \left[(n+1) - \frac{(2n+1)}{2}\right]^2 = \left[n - \frac{(2n+1)}{2}\right]^2$$

que haciendo la raíz cuadrada nos queda: $\left[(n+1) - \frac{(2n+1)}{2}\right] = \left[n - \frac{(2n+1)}{2}\right]$

y simplificando nos queda que: $n+1 = n$

7 — 8 ES MENOR QUE 4

$2 > 3$ multiplicamos los dos términos por el mismo número:

$$2\log\frac{1}{2} < 3\log\frac{1}{2} \qquad \log\left[\frac{1}{2}\right]^2 < \log\left[\frac{1}{2}\right]^3$$

entonces:

$$\log\frac{1}{4} < \log\frac{1}{8}$$

de aquí se puede deducir que: $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$

y entonces $8 < 4$

8 — EL BARBERO

El barbero del pueblo afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos.

¿Quién afeita al barbero?

9 — 2 ES IGUAL A 1

$$x^2 = x + x + \ldots + x \ (x \text{ términos})$$

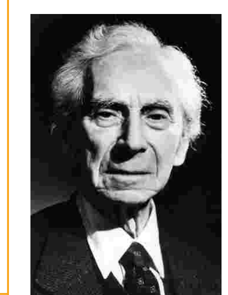
Es una fórmula cierta, puedes entretenerte en probarla. Derivando con respecto a x,

$2x = 1 + 1 + \ldots + 1$ (x términos)

Es decir: $2x = x$

Dividiendo ambos lados por x (lo cual es posible, pues $x \neq 0$), se tiene $2 = 1$

10 · 17 — YO SOY EL PAPA



Se cuenta que en una ocasión el filósofo y matemático Bertrand Russell estaba especulando sobre enunciados condicionales y sosteniendo que un enunciado falso implica cualquier cosa. Un filósofo escéptico le preguntó:

"¿Quiere usted decir que si $2 + 2 = 5$, entonces es usted el Papa?"

Russell contestó afirmativamente demostrándolo del siguiente modo:

"Si suponemos que $2 + 2 = 5$, entonces seguramente estará usted de acuerdo en que si restamos **2** de cada lado de la ecuación, nos da $2 = 3$.

Invirtiendo los términos, tenemos que $3 = 2$ y restando **1** de cada lado, nos da $2 = 1$.

De modo, que como el Papa y yo somos dos personas, y $2 = 1$, entonces el Papa y yo somos uno. Luego, yo soy el Papa".

11 — LOS POLÍTICOS

Partimos de la igualdad fundamental de la trigonometría: $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

haciendo la raíz cuadrada y sumando uno:
$1 + \cos x = 1 + (1 - \operatorname{sen}^2 x)^{1/2}$

elevando al cuadrado:
$(1 + \cos x)^2 = (1 + (1 - \operatorname{sen}^2 x)^{1/2})^2$ para:

$x = \pi$,
$\cos \pi = -1$
$\operatorname{sen} 2 = 0$
sustituyendo.

$$(1-1)^2 = (1 + (1-0)^{1/2})^2$$
$$0 = (1+1)^2$$
$$0 = 4$$

12 — 1 Y MENOS 1 SON LO MISMO

$(-1)^2 = 1$

Tomando logaritmos decimales en los dos términos de la igualdad:

$2\log(-1) = \log 1$

$$2\log(-1) = 0$$
$$\log(-1) = 0/2$$
$$\log(-1) = 0$$
$$\log(-1) = \log 1$$
$$-1 = 1$$

13 · 14 — 8 ES IGUAL QUE 80

Habéis oído decir muchas veces, que da lo mismo 8 que 80, pero es que son lo mismo:

Comenzamos por llamar:
$80 - 8 = r$

Elevamos al cuadrado ambos lados:
$80^2 - 2.80.8 + 8^2 = r^2$

Sustituimos $r^2 = r(80-8) = 80r - 8r$:
$80^2 - 2.80.8 + 8^2 = 80r - 8r$

Si lo reordenamos, obtenemos:
$80^2 - 80.8 - 80r = 80.8 - 8^2 - 8r$

Factorizamos ambos miembros:
$80(80 - 8 - r) = 8(80 - 8 - r)$

Dividimos ambos miembros por $(80 - 8 - r)$:

Por tanto: $80 = 8$

15 · 16 — GENERALIZACIÓN DEL RESULTADO ANTERIOR: 2 NÚMEROS DISTINTOS A Y B, RESULTA QUE SON IGUALES

Comenzamos con: $a - b = c$

Elevamos al cuadrado ambos lados:
$a^2 - 2ab + b^2 = c^2$

Como: $(a-b)(c) = c^2 = ac - bc$,
podemos reescribirlo como:
$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$

Si lo reordenamos, obtenemos:
$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$

Factorizamos ambos miembros:
$a(a - b - c) = b(a - b - c)$

Dividimos ambos miembros por $(a - b - c)$:

Al final: $a = b$

18 — DEMOSTRACIÓN DE QUE 1 EQUIVALE A -1

Partimos de la siguiente igualdad: $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$

Aplicando la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos: $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$

Que equivale a: $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$

Pero ya que $i = \sqrt{-1}$, podemos sustituirlo,

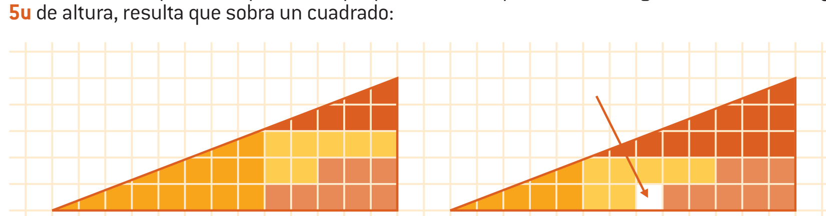
obteniendo: $1/i = i/1$

y multiplicando en cruz $1^2 = i^2$ y,

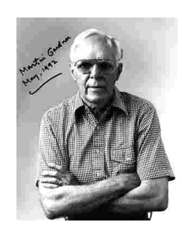
como $i^2 = -1$, resulta por tanto que: $1 = -1$

19 · 20 — APARECE UN CUADRADO NUEVO

Cuando se recomponen las piezas en que puede descomponerse el triángulo de **15u** de base y **5u** de altura, resulta que sobra un cuadrado:



21 — MARTIN GARDNER



"No conozco una manera mejor para que los profesores de matemáticas de secundaria hagan percibir a sus alumnos la importancia del rigor deductivo, que desafiar a la clase a que descubran dónde reside la falacia en cada una de estas demostraciones".

22 — TEOREMA DE WALLIS

Los números negativos son mayores que el infinito.

Demostración:

Puesto que, para **a** positivo, $\frac{a}{0} = \infty$, $\frac{a}{b} > \infty$,

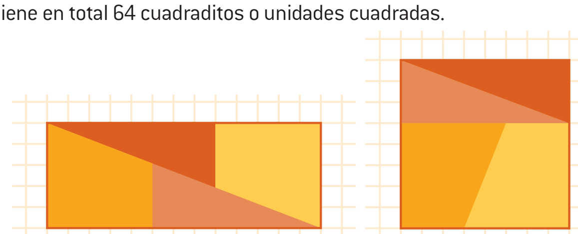
con **b** un número negativo.

Pues el denominador menor aumenta la fracción.

23 · 24 — 64 ES IGUAL QUE 65

Un cuadrado de lado **8 u**, tiene en total 64 cuadraditos o unidades cuadradas.

Una vez recompuestas las cuatro piezas en que puede dividirse el cuadrado, se puede formar un rectángulo de base **13 u**, y altura **5u** que tiene en total 65 cuadraditos o unidades cuadradas.



25 · 26 · 27 — 2 ES IGUAL QUE LA RAÍZ DE 2

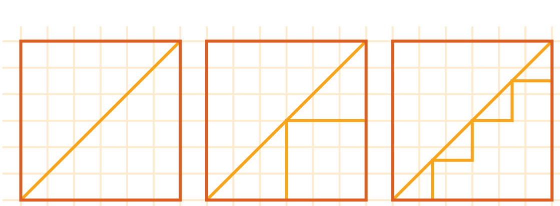
En un cuadrado de lado unidad, se define la sucesión de "escaleras" que permiten llegar de un vértice del cuadrado al opuesto:

$\mathcal{E}_0$ sería entonces la primera línea (un ángulo); $\mathcal{E}_1$ la segunda (dos ángulos); $\mathcal{E}_2$ la tercera (cuatro ángulos), y así sucesivamente.

Es sencillo comprobar que cada una de estas escaleras mide **2 unidades**. Si hacemos tender n a infinito, la distancia máxima de las escaleras a la diagonal tiende a cero, con lo que queda demostrado que la sucesión de escaleras tiene a la diagonal.

Usando el teorema de Pitágoras sabemos que la diagonal mide $\sqrt{2}$.

Conclusión $\sqrt{2} = 2$



28 · 29 · 30 · 31 — π ES IGUAL A 2

La circunferencia de la imagen tiene de diámetro **2**. Por tanto, la longitud de la circunferencia completa es 2π.
Y la longitud de la semi-circunferencia es π.
Tracemos ahora las dos semicircunferencias que forman la imagen del yin-yang (fig. 1), cada trozo en media circunferencia de diámetro **1**, por tanto cada una tiene de longitud $\pi/2$ y por tanto su longitud conjunta es π.
De modo análogo, la suma de los cuatro semicírculos siguientes (fig. 2, cada uno de longitud $\pi/4$) es π.
Y también la suma de las **8** siguientes semicircunferencias (de $\pi/8$, cada una) es también π.
La sucesión de semicircunferencias puede progresar indefinidamente y siempre la suma de las longitudes es π.
Por otra parte, vemos que la linea sinuosa que forman los semicírculos tiene como límite el diámetro **AB** que tiene de longitud **2**. Por consiguiente, π es igual a **2**.

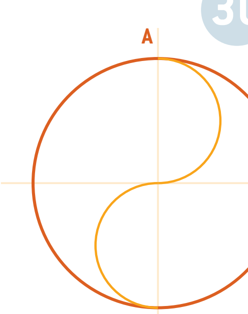


fig. 1

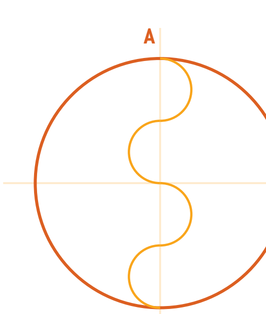


fig. 2

SELECCIÓN DE PROBLEMAS: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS (IES LEONARDO DA VINCI ALBACETE)
COORDINA: FLOREAL GRACIA. INSTITUTO POLITÉCNICO. CANTÓ DE CASTALIA, 1. 12006 CASTELLÓN. TEL.: 964 25 62 00