SOLUCIONS NOVEMBRE 2016

Autor: Rafael Martínez Calafat (professor jubilat de Matemàtiques)

Novembre 1: Quines són les possibles longituds del tercer costat del triangle de costats 2016 cm i 2017 cm?

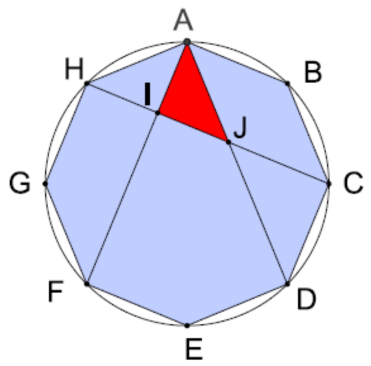
Nivell: 4ESO.

Solució: Siguen x, 2016 i 2017 les longituds dels costats d'un triangle. Com se deu complir la desigualtat triangular:

$$\left.\begin{array}{r} x+2016>2017 \;\Rightarrow\; x>1 \\ x+2017>2016 \;\Rightarrow\; x>0 \\ 2016+2017>x \;\Rightarrow 4033>x \end{array}\right\} \Rightarrow \; x \in \;]1;\; 4033[$$

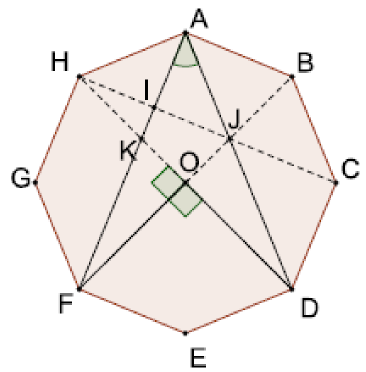
Novembre 2-3: En una circumferència de radi unitat s'inscriu un octògon regular ABCDEFGH.

Trobar els angles, l'àrea i el perímetre del triangle ΔAIJ



Nivell: Preparació OME i OMS

Solució: Comencem pels angles. L'angle central associat a l'arc FD és (360/4 =) 90°, pel que l'angle inscrit de l'arc FD, és a dir l'angle ÐIAJ, és 45°. Per idèntica raó (l'angle inscrit és la mitat de l'angle central) tindrem que l'angle assenyalat en cada un dels vèrtexs de l'octògon és de 22,5. Per tant, l'angle ∠OFK = 22,5° i com ∠FOK = 90°, tindrem que ∠FKO = 67,5°, d'on ∠HKI (= ∠FKO, al ser oposats pel vèrtex) = 67,5° i com ∠KHI = 22,5°, tindrem que ∠KIH = 90° (= ∠AIJ per ser oposats pel vèrtex). Per últim ∠IJA = (180° – 90° – 45° =) 45°. Es dir, el triangle ΔAIJ es un triangle 90-45-45, rectangle en I.



A més ∠HAF = 45° (al ser l'angle inscrit corresponent a l'angle central de l'arc HF). Por lo tant ΔHIA = ΔAIJ

Anem per els costats. Siga x el costat i (por Pitàgores) $\sqrt{2}\,x$, la hipotenusa. Siga ΔJCK el simètric del triangle ΔAIJ respecte FB. Com AE es un diàmetre de la circumferència tindrem que ΔADE es rectangle en D i al aplicar sobre ell el teorema de Pitàgores:

$$2^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 + \left(2x + \sqrt{2}x\right)^2$$

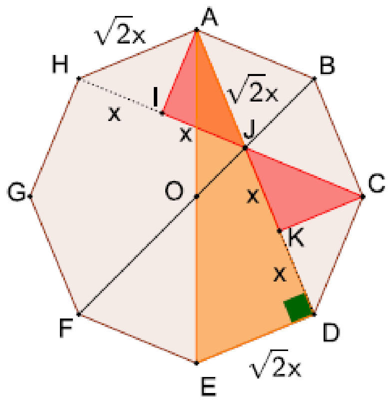
que té per solució:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Per tant:

$$\text{Perímetre} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$= \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{Àrea: } x^2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$



Novembre 4: Quatre amics llancen un dardo cada un d'ells. Si a, b, c i d son les probabilitats de encertar cada un d'ells; trobar la probabilitat de que encerten tres o més d'ells.

Nivell: 3ESO, 4ESO

Solució: La probabilitat de que encerten els quatre és a·b·c·d. La probabilitat de que encerten tres d'ells i l'altre no encerte és: a·b·c·(1 – d) + a·b·(1 – c)·d + a·(1 – b)·c·d + (1 – a)·b·c·d. La suma de totes elles serà la probabilitat sol·licitada:

Π = a·b·c·d + a·b·c – a·b·c·d + a·b·d – a·b·c·d + a·c·d – a·b·c·d + b·c·d – a·b·c·d = a·b·c + a·b·d + a·c·d + b·c·d – 3·a·b·c·d

Novembre 5-6: Resoldre:

$$\left(\mathbf{x^3 - 4x^2 + x}\right)^2 = \left(\mathbf{x^3 + 3x - 2}\right)^2$$

$$\mathbf{\log_{(3x^3)} 3 + \log_{27} x^2 = -4}$$

Nivell: 4ESO, Batxillerat

Solució: Per a la primera equació tenim:

$$(x^3 - 4x^2 + x)^2 = (x^3 + 3x - 2)^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + x = x^3 + 3x - 2 \\ x^3 - 4x^2 + x = -x^3 - 3x + 2 \end{cases}$$

Per a la primera possibilitat:

$$0 = 4x^2 + 2x - 2 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Per a la segon possibilitat:

$$2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = 0 = (x-1) \cdot 2 \cdot (x^2 - x + 1) \;\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Per tant, la equació sols té dues arrels reals x = 1 i x = - ½

Per a la segon equació, utilitzant la fórmula del canvi de base: $\log_A B = \frac{\log_C B}{\log_C A}$

$$\log_{3x^3} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 (3x^3)} = \frac{1}{1 + 3 \cdot \log_3 x} \quad , \quad \log_{27} x^2 = \frac{\log_3 x^2}{\log_3 27} = \frac{2\log_3 x}{3}$$

Amb això, l'equació queda :

$$\frac{1}{1 + 3\log_3 x} + \frac{2\log_3 x}{3} = -4$$

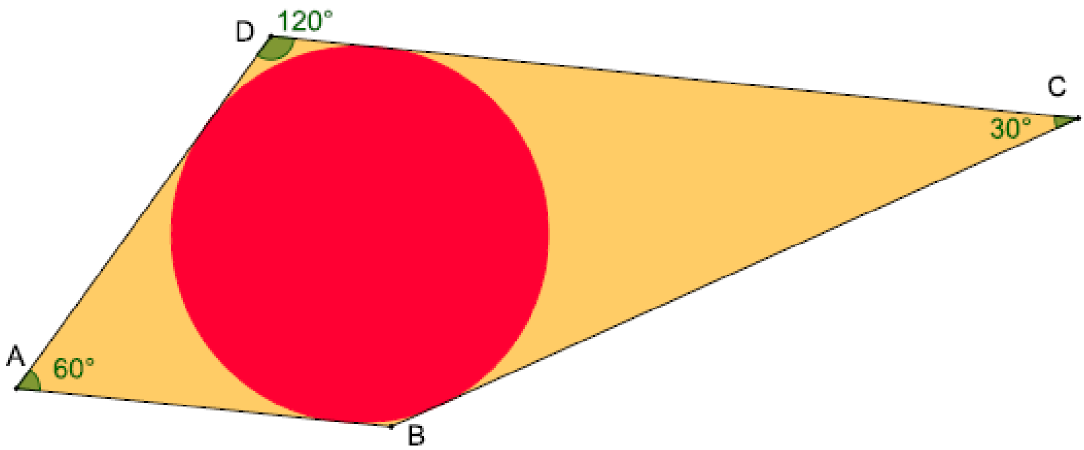
Amb el canvi $t = \log_3 x$ la equació es transforma en:

$$\frac{1}{1+3t} + \frac{2t}{3} = -4 \quad \Rightarrow \quad 3 + 2t(1+3t) = -12(1+3t) \quad \Rightarrow \quad 6t^2 + 38t + 15 = 0$$

Que té per solucions $t = \frac{-19 \pm \sqrt{271}}{6}$ i que porten a:

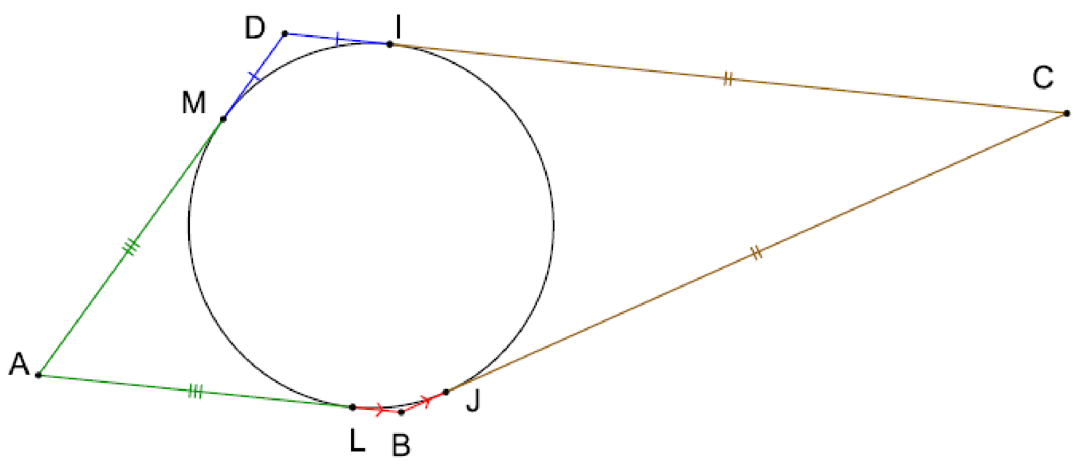
$$x = 3^{\frac{\sqrt{271}-19}{6}} \quad y \quad x = 3^{-\frac{19+\sqrt{271}}{6}}$$

Novembre 7-8: D'un quadrilàter ABCD se sap: $\angle A = 60°$, $\angle D = 120°$, $\angle C = 30°$ DC = $200 + 100\sqrt{3}$, AB = $100\sqrt{3}$ i que en el seu interior se pot inscriure un cercle. Trobar l'àrea i perímetre del quadrilàter i el radi del cercle



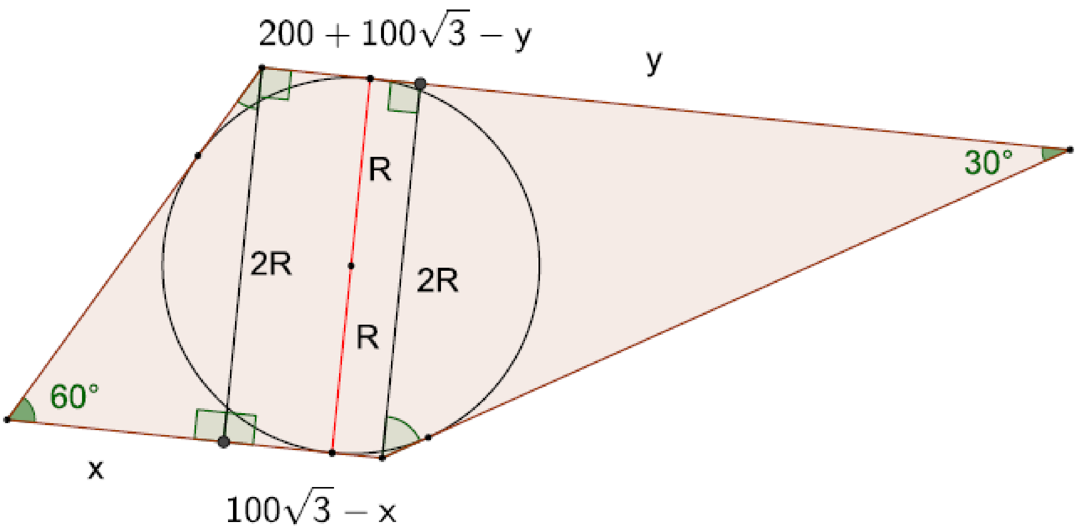
Nivell: Preparació OME

Solució: Comencen amb el perímetre. Com per un punt exterior hi ha dues tangents a una circumferència d'igual longitud, tenim



Perímetre = AM + AL + LB + BJ + JC + CI + ID + DM = $2\left(200+100\sqrt{3}\right)+2\left(100\sqrt{3}\right)=400\left(1+\sqrt{3}\right)$

Anem per el radi del cercle.



Podem descompondre el quadrilàter en tres polígons: dos triangles 60-30-90 i un rectangle de costats 2R y $100-\sqrt{3}-x=200+100\sqrt{3}-y$. D'ells tenim:

$$\mathrm{tg}60° = \frac{2R}{x} \;\Rightarrow\; x\sqrt{3}=2R$$

$$200+100\sqrt{3}-y=100\sqrt{3}-x \;\Rightarrow\; y-x=200$$

$$\mathrm{tg}30° = \frac{2R}{y} \;\Rightarrow y=2\sqrt{3}R$$

Les tres equacions formen un sistema amb solucions x = 100, y = 300 y R = $50\sqrt{3}$.

Per a l'àrea tindrem que l'àrea sol·licitada és suma de les àrees dels dos triangles i la del rectangle:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= x\cdot R+\left(100\sqrt{3}-x\right)\cdot 2R+y\cdot R \\ &= 100\cdot 50\sqrt{3}+\left(100\sqrt{3}-100\right)\cdot 100\sqrt{3}+300\cdot 50\sqrt{3}=10000\left(3+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Novembre 9: Donat un real x es defineix $\lfloor x \rfloor$ al major enter menor o igual a x. Si $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 3$ i $\lfloor y^3 \rfloor = 7$, ¿entre quins valors estarà $\lfloor xy \rfloor$?

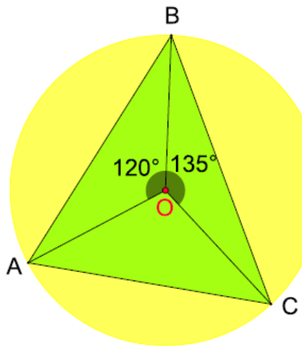
Nivell: Preparació OME, OMS, 3ESO, 4ESO

Solució: Tenim:

$$\left.\begin{array}{l} \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 3 \;\Rightarrow\; 3 \le \sqrt{x} < 4 \;\Rightarrow\; 9 \le x < 16 \\ \lfloor y^3 \rfloor = 7 \;\Rightarrow\; 7 \le y^3 < 8 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{7} \le y < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 17{,}21 \approx 9\sqrt[3]{7} \le xy < 32$$

Per tant, $\lfloor xy \rfloor$ oscila entre 17 y 31

Novembre 10-11: D'un triangle $\triangle$ABC se sap que el radi de la circumferència circumscrita és r=$2\sqrt{3}$ i si O és el centre de la circumferència circumscrita $\angle$AOB=120° i $\angle$BOC=135°. Trobar àrea i perímetre del triangle



Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OMS i OME

Solució: Tindrem: $A_{ABC} = A_{AOB} + A_{BOC} + A_{AOC}$ sent tots els triangles del segon membre isòsceles (i por tant els angles oposats a l'angle en O iguals).

Per a calcular l'àrea utilitzem el fet de que l'àrea d'un triangle es la mitat del producte de dos costats contigus per el sinus de l'angle que formen.

$$\left.\begin{array}{r} A_{AOB} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \cos(120°) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ A_{COB} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \cos(135°) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \\ A_{AOC} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \cos(105°) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} = \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{9\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{2}$$

Per a el perímetre utilitzem el teorema dels sinus:

$$\Delta AOB \;\Rightarrow\; \frac{r}{\mathrm{sen}(30°)} = \frac{c}{\mathrm{sen}(120°)} \;\Rightarrow\; c = \frac{\mathrm{sen}(120°)}{\mathrm{sen}(30°)} r = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} \cdot 2\sqrt{3} = 6$$

$$\Delta COB \;\Rightarrow\; \frac{r}{\mathrm{sen}(22{,}5°)} = \frac{a}{\mathrm{sen}(135°)} \;\Rightarrow\; a = \frac{\mathrm{sen}(135°)}{\mathrm{sen}(22{,}5°)} r = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}/2} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\Delta AOC \;\Rightarrow\; \frac{r}{\mathrm{sen}(37{,}5°)} = \frac{b}{\mathrm{sen}(105°)} \;\Rightarrow\; c = \frac{\mathrm{sen}(105°)}{\mathrm{sen}(37{,}5°)} r = (*) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{6+3\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

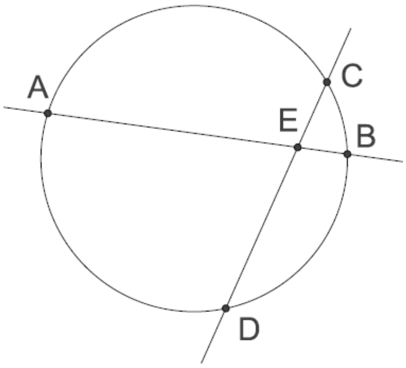
$$(*)\,\frac{\mathrm{sen}(105°)}{\mathrm{sen}(37{,}5°)}=\frac{\mathrm{sen}(75°)}{\mathrm{sen}(37{,}5°)}=\frac{2\mathrm{sen}(37{,}5°)\cos(37{,}5°)}{\mathrm{sen}(37{,}5°)}=2\cos(37{,}5°)$$

Por tant:

$$\text{Perímetre}=6+2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{6+3\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Novembre 12: Siguen AB i CD dues cordes de una mateixa circumferència que es tallen en E. Provar que:

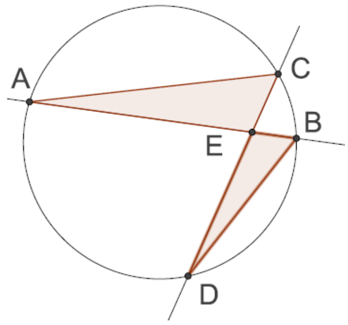
EA · EB = EC · ED



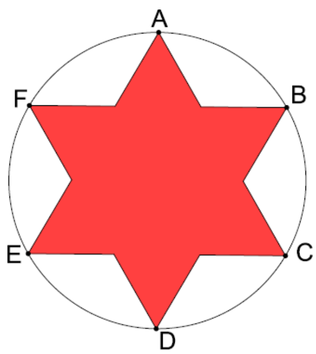
Nivell: 3ESO

Solució: Considerem els triangles ΔACE i ΔBED. Aquests dos triangles son semblants perquè tenen dos angles iguals (els angles en E (per oposats pel vèrtex) i els angles en C i en B (por comprendre el mateix arc AD)). Por tant:

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}}\ \Rightarrow\ \mathrm{CE}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{EB}\cdot\mathrm{AE}$$



Novembre 13-20: Calcular l'àrea i el perímetre d'una estrela regular de sis puntes inscrita en una circumferència de radi 1



Nivell: A partir de 3ESO. Preparació OMS

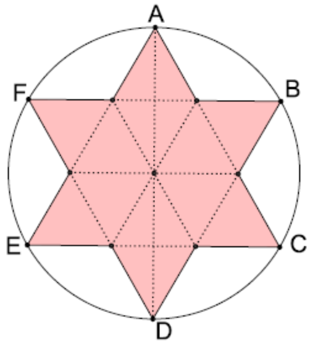
Solució: Podem descompondre la estrela en dotze triangles equilàters i per tant en 24 triangles 30°-60°-90°, cadascun dels quals té àrea:

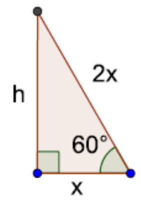
$$A = \frac{h \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Com en el diàmetre AD hi ha quatre altures h tenim:

$$h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} = x\sqrt{3} \ \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$





D’ací:

$$A_{\text{estrela}} = 24 \cdot A = 24 \cdot \frac{\frac{1}{12}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

El perímetre de la estrela està format por 12 segments de longitud 2x. Per tant:

$$P_{\text{estrela}} = 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Novembre 14: ¿Quin és el menor valor de k que fa que n^3+4n+k no siga múltiple de 5 per a qualsevol n natural?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Siga n = 5p + r amb r∈{0, 1, 2, 3, 4}, tenim:

$$\left.\begin{aligned} n^3 &= 5l + r^3 \\ 4n &= 5m + 4r \end{aligned}\right\} \ \Rightarrow \ n^3 + 4n + k = 5q + r^3 + 4r + k$$

Per tant $n^3 + 4n + k = \dot{\hat{5}} \Leftrightarrow \ r^3 + 4r + k = \dot{\hat{5}}$. Devem buscar k tal que per a qualsevol valor de r possible $r^3 + 4n + k$ no siga múltiple de 5. Per inspecció directa:

r	$r^3 + 4r + k$	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
0	k	0	1	2	3	4
1	5 + k	5	6	7	8	9
2	16 + k	16	17	18	19	20
3	39 + k	39	40	41	42	43
4	80 + k	80	81	82	83	84

(En roig els valors múltiples de cinc). La primera columna que aporta valors no múltiples de cinc es la corresponent a k = 2. Per tant, el menor valor de k natural tal que n^3+4n+k no siga múltiple de 5 per a qualsevol n natural es k = 2 (també k pot ser 3)

Novembre 15-16: Resoldre:

$$\sqrt{\mathbf{23-x^3}}+\sqrt{\mathbf{23+x^3}}=\mathbf{x^3}$$

$$\cos(\boldsymbol{\theta})\cdot\cos(\mathbf{2}\boldsymbol{\theta})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Per a la primera, tenim elevant els dos membres al quadrat:

$$23-x^3+23+x^3+2\sqrt{23^2-x^6}=\ x^6;\quad 46+2\sqrt{529-x^6}=x^6;\quad 2\sqrt{529-x^6}$$
$$=x^6-46;\quad 4(529-x^6)=x^{12}-92x^6+2116;\ -4x^6=x^{12}-92x^6;\ 0$$
$$=x^{12}-88x^6;\ \ 0=x^6(x^6-88)$$

I d'ací: x = 0 o $x=\pm\sqrt[6]{88}=\pm\sqrt{2}\sqrt[6]{11}$

Comprovació de solucions:

x = 0 no és solució perquè el primer membre porta a $2\sqrt{23}$, i el segon membre porta a 0.

x = $\sqrt{2}\sqrt[6]{11}$ és solució perquè el primer membre porta a $\sqrt{23-2\sqrt{22}}+\sqrt{23+2\sqrt{22}}$ i el segon membre porta a $2\sqrt{22}$, i estes expressions son iguals perquè son positives i al elevar al quadrat tenim:

$$\left(\sqrt{23-2\sqrt{22}}+\sqrt{23+2\sqrt{22}}\right)^2=23-2\sqrt{22}+23+2\sqrt{22}+2\sqrt{23^2-4\cdot 22}$$
$$=46+2\sqrt{441}=88=\left(2\sqrt{22}\right)^2$$

x = $-\sqrt{2}\sqrt[6]{11}$, no és solució, perquè el primer membre porta a un valor positiu i el segon membre porta a un valor negatiu.

Per a la segona, degut a que cos(2θ) = $\cos^2\theta$ - $\text{sen}^2\theta$ = $2\cos^2\theta$ - 1, tenim cosθ($2\cos^2\theta$ - 1) = ¼.

Fent z = cosθ, pleguem a:

$$z(2z^2-1)=\frac{1}{4};\ \ 8z^3-4x-1=0;\ \left(z+\frac{1}{2}\right)(8z^2-4z-2)=0$$

Que porta a

$$\begin{cases} z=-\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ z=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Per tant:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2};\ \ \theta = \text{arc}\cos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 120° + \text{k}360° \\ \cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ \ \theta = \text{arc}\cos\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 36° + \text{k}360° \\ \cos\theta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \ \theta = \text{arc}\cos\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 108° + \text{k}360° \end{cases}$$

On k es qualsevol enter.

Novembre 17: Siguen les successions: $a_n = 15n - 4$; $b_k = 6k + 7$, què elements tenen en comú?

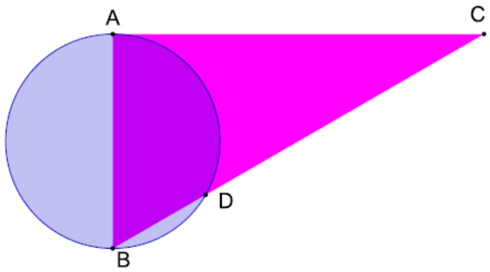
Nivell: A partir de tercer d'ESO. Preparació OMS.

Solució: Si suposem que les dues col·leccions tenen elements en comú tenim:

$$15n - 4 = 6k + 7;\ \ 15n - 11 = 6k;$$

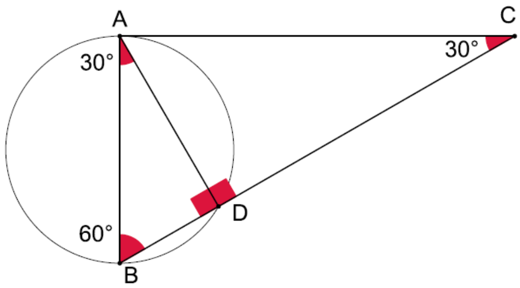
Es dir, 15n – 11 es múltiple de 6 i per tant de 3, i com 15n es múltiple de 3, tindrem que 11 és múltiple de tres, que es un absurd.

Novembre 18-19: En la figura hi ha una circumferència de diàmetre AB i el triangle △ABC es rectangle en A amb ∠B = 60°. Si BD = $\sqrt{3}$, calcular perímetres i àrees de △BAD, △ADC i △ABC

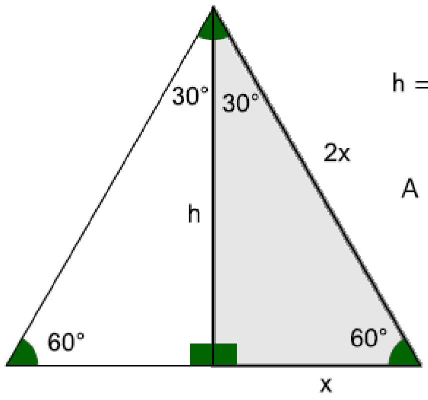


Nivell: A partir de 3ESO. Preparació OMS.

Solució: Al ser AB un diàmetre de la circumferència, tenim que ∠ADB = 90°, i com ∠ABD = 60°, tindrem que ∠BAD =30°. Es dir ΔABD es un triangle 30°-60°-90°. Anàlogament ∠ADC = 90° i com ∠DAC = 60°, tindrem que ∠DCA =30°. Es dir ΔADC es un triangle 30°-60°-90°



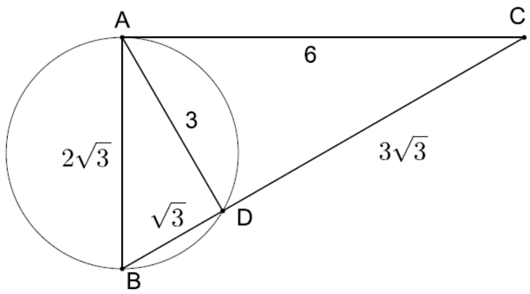
Recordem que en els triangles 30°-60°-90°, el catet petit mesura la mitat de la hipotenusa (perquè ell, junt amb el seu simètric respecte al catet gran formen un triangle equilàter) i que el catet gran mesura arrel de tres vegades el catet petit, per el que el àrea es arrel de tres vegades el quadrat del catet petit partit per dos



$$h = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3}x$$

$$A = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Aplicant l'anterior als dos triangles 30°-60°-90°, tindrem la figura adjunta, que permet calcular àrees i perímetres:

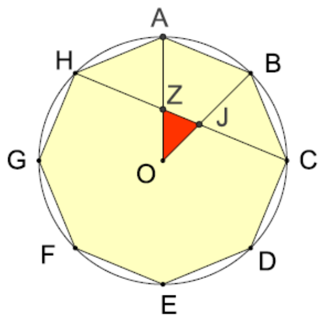


$$\Delta ABD \Rightarrow \begin{cases} P = 3 + 3\sqrt{3} \\ A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

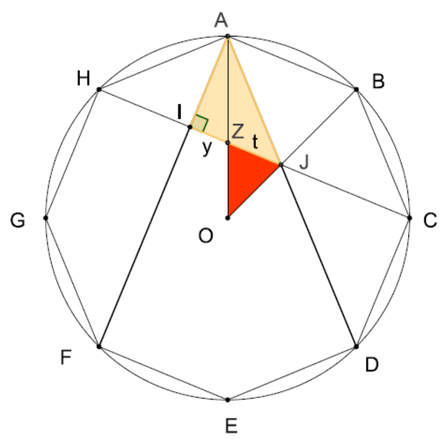
$$\Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} P = 9 + 3\sqrt{3} \\ A = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} P = 6 + 6\sqrt{3} \\ A = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Novembre 21-22: En una circumferència de centre O i radi unitat se inscriu un octògon regular ABCDEFGH. Calcular angles, perímetre i àrea del triangle △OZJ



Nivell: Preparació OME i OMS.



Solució: Comencem per els angles. L'angle en O mesura 45° (perquè és l'angle central associat a l'arc AB = 360°/8). A més ΔABO ≈ΔZJO (perquè estan en posició de Tales) i com ΔABO és isòsceles (perquè OA = OB = 1), tenim que OZ = OJ. D'ací ∠OZJ = ∠OJZ = 67,5°.

Per a els costats utilitzarem alguns resultats del triangle ΔAIJ. A saber, que és rectangle en I i isòsceles sent $\mathrm{AI} = \mathrm{IJ} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ i $\mathrm{AJ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Òbviament AO es la bisectriu de l'angle ∠IAJ (per simetria). Aplicant el teorema de la bisectriu tindrem: $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{t} = \sqrt{2}\mathrm{y}$ que junt amb $\mathrm{t} + \mathrm{y} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ forma un sistema amb solució

$$\mathrm{y} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \qquad \mathrm{t} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Ara, en ΔAIZ tenim al aplicar Pitàgores

$$\mathrm{AZ} = \sqrt{(\mathrm{AI})^2 + \mathrm{y}^2} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

Amb el que:

$$P = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

I, per últim:

$$\mathrm{OJ} = \mathrm{OZ} = \mathrm{AO} - \mathrm{AZ} = 1 - \frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Per a l'àrea del triangle ΔOZJ, utilitzem la fórmula que calcula l'àrea com la mitat del producte de dos costats consecutius pel sinus de l'angle que formen els costats. Tindrem:

$$\mathrm{A} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{sen}(45°)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12+8\sqrt{2}}$$

Novembre 23: Calcular el producte del natural format per m dosos i el natural format por m nous

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: Aportem dues solucions:

1.- Considerant els nombres com la suma dels termes d'una PG. Tenim:

$$\mathrm{a} = \overbrace{222\ldots2}^{\mathrm{m}} = 2\left(\overbrace{111\ldots.1}^{\mathrm{m}}\right) = 2\left(\overbrace{100\ldots0}^{\mathrm{m}} + \overbrace{100\ldots0}^{\mathrm{m}-1} + \cdots + 1\right) = 2\frac{10^{\mathrm{m}}-1}{10-1}$$

$$b = \overbrace{999\ldots9}^{m} = 9\left(\overbrace{111\ldots.1}^{m}\right) = 9\left(\overbrace{100\ldots0}^{m} + \overbrace{100\ldots0}^{m-1} + \cdots + 1\right) = 9\,\frac{10^m - 1}{10 - 1}$$

$$a \cdot b = 2\,\frac{10^m - 1}{10 - 1} \cdot 9\,\frac{10^m - 1}{10 - 1} = \frac{2 \cdot 9}{9 \cdot 9}(10^m - 1) \cdot (10^m - 1)$$

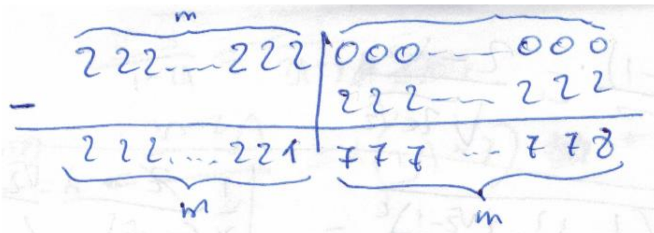
$$= \frac{2}{9} \cdot 10^m \cdot (10^m - 1) - \frac{2}{9}(10^m - 1) = 2 \cdot \frac{\overbrace{999\ldots9}^{m}}{9} \cdot 10^m - 2 \cdot \frac{\overbrace{999\ldots9}^{m}}{9}$$

$$= 2 \cdot \overbrace{111\ldots.1}^{m} \cdot 10^m - 2 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{m}$$

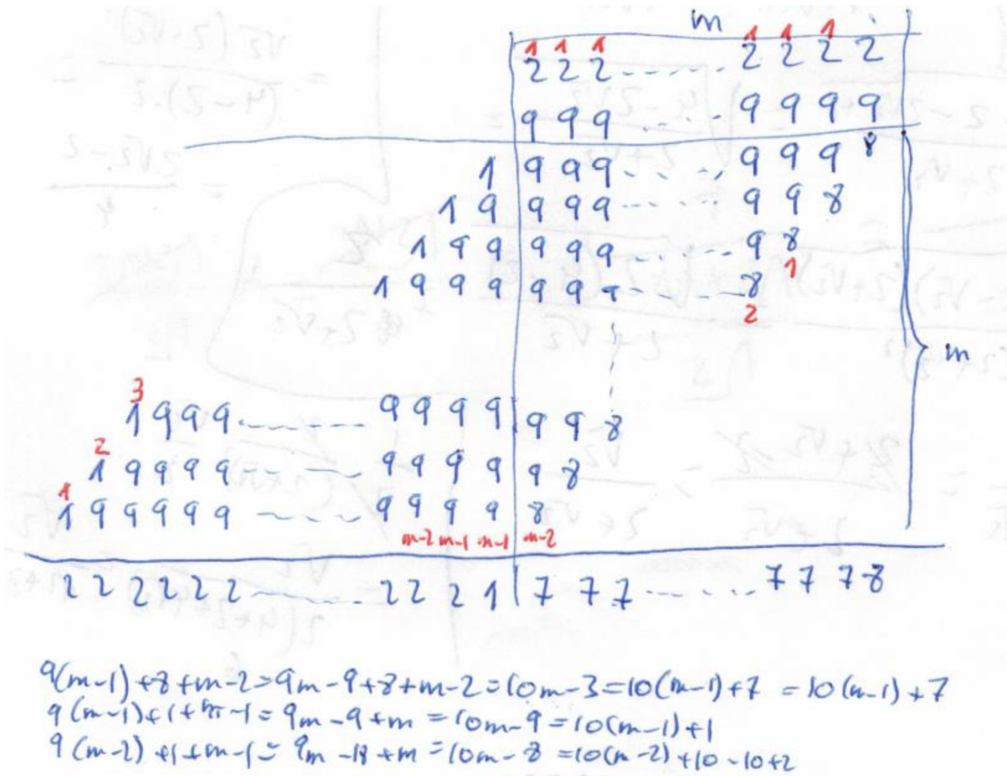
Es dir:

$$a \cdot b = 2 \cdot \overbrace{111\ldots.1}^{m} \cdot 10^m - 2 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{m} = \overbrace{222\ldots2}^{m} \cdot 10^m - \overbrace{222\ldots2}^{m}$$

Per tant:

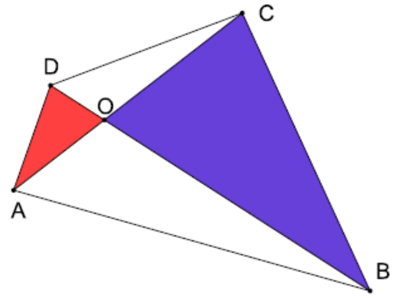


2.- Directament:



Novembre 24-25: En un quadrilàter ABCD siga O el punt de tall de les diagonals. Si l'àrea del △ADO és 2 i l'àrea del △COB es 11.

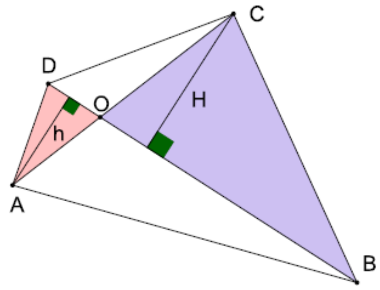
Esbrinar el menor valor possible de l'àrea del △DOC



Nivell: Preparació OME.

Solució: Primer provarem que en una situació com aquesta:

$$A_{\Delta DOC} \cdot A_{\Delta AOB} = A_{\Delta DOA} \cdot A_{\Delta COB}$$



De la il·lustració adjunta tenim:

$$A_{\Delta ADO} \cdot A_{\Delta COB} = \frac{OD \cdot h}{2} \cdot \frac{OB \cdot H}{2} = \frac{OD \cdot H}{2} \cdot \frac{OB \cdot h}{2}$$
$$= A_{\Delta DOC} \cdot A_{\Delta AOB}$$

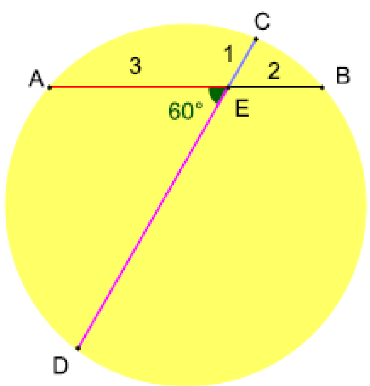
Per tant si x = $A_{\Delta DOC}$ i y = $A_{\Delta AOB}$ tenim: x·y =11·2 = 22

Per la desigualtat aritmètic-geomètrica tenim:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{22}$$

I la igualtat sols succeeix només si x = y. Per tant el menor valor de x i de y són aquells per a els que $x^2 = 22 \quad \Rightarrow \quad x = y = \sqrt{22}$

Novembre 26-27: De dos cordes AB i CD d'una circumferència se sap que es tallen en E amb un angle de 60°. Si AE = 3, EB = 2 i EC = 1, trobar el radi de la circumferència



Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OME i OMS

Solució: Utilitzarem geometria analítica. comencem per disposar un sistema d'eixos coordinats centrats en A(0, 0) i amb E(3, 0) i B(5, 0) en el eix X. Els passos a seguir són:

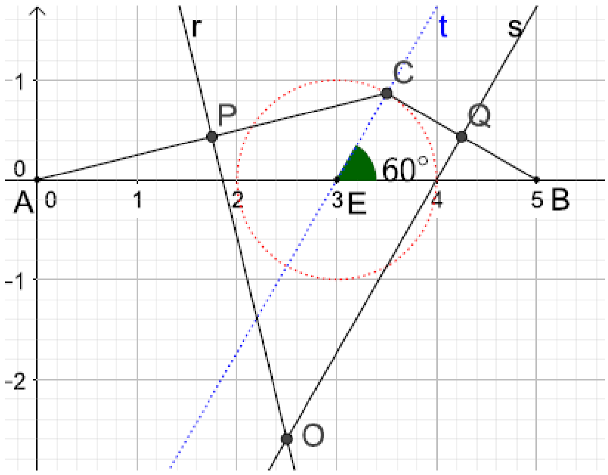
1.- Esbrinar les coordenades de C. Per a això calcularem la recta t que passa per E(3, 0) amb pendent m = tag 60° i calcularem la intersecció d'aquesta recta amb la circumferència de centre E(3, 0) y radi 1

2.- Càlcul de la recta r ⊥ al segment AC que passa per el punt mitjà de AC

3.- Càlcul de la recta s ⊥ al segment CB que passa per el punt mitjà de CB.

4.- Càlcul del centre de la circumferència sol·licitada: O = r ∩ s

5.- El radi és la distancia entre A i O



1.- Recta que passa por E(3, 0) i amb pendent tag 60° = $\sqrt{3}$: $y = \sqrt{3}(x-3)$

Circumferència centrada en E(3, 0) i radi 1: $(x-3)^2 + y^2 = 1$

$$\left.\begin{array}{r}(x-3)^2 + y^2 = 1\\ y = \sqrt{3}(x-3)\end{array}\right\} \Rightarrow x = \left\{\begin{array}{l}\frac{7}{2}\\ \frac{5}{2}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad C\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Degut a què x= 5/2 correspon al punt per sota de l'eix X.

2.- Punt mitjà de A(0, 0) i C $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $P\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Pendent de la recta que passa per A i C: $m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - 0}{\frac{7}{4} - 0} = \frac{\sqrt{3}}{7}$

Recta ⊥ al segment AC que passa per $P\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$: $y - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{7}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{7}{4}\right)$; $\quad y = -\frac{7}{\sqrt{3}}x + \frac{13}{\sqrt{3}}$

3.-Punt mitjà de C $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i B(5, 0): $Q\left(\frac{17}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Pendent de la recta que passa per C i B: $m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{7}{2} - 5} = \frac{\sqrt{3}/2}{-3/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Recta ⊥ al segment CB que passa per Q $\left(\frac{17}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$: $y - \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\left(x - \frac{17}{4}\right)$, $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$

4.- Intersecció de r i s:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{7}{\sqrt{3}}x+\frac{13}{\sqrt{3}} \\ y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{7}{\sqrt{3}}x+\frac{13}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}x-4\sqrt{3},\ \ \frac{13}{\sqrt{3}}+4\sqrt{3}=x\left(\sqrt{3}+\frac{7}{\sqrt{3}}\right),$$

$$x=\frac{25/\sqrt{3}}{10/\sqrt{3}}=\frac{5}{2},\ \ y=\sqrt{3}\frac{5}{2}-4\sqrt{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow O\left(\frac{5}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

5.- Càlcul del radi:

$$R=d(A,O)=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{13}$$

Novembre 28: Resoldre:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+xy+y=-9} \\ \mathbf{x^2+y^2=17} \end{array}\right\}$$

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Multiplicant la primera equació per 2 i sumant la segona equació obtenim:

$$x^2+y^2+2(x+xy+y)=17-18,\ \ x^2+y^2+2xy+2(x+y)=-1,$$

$$(x+y)^2+2(x+y)+1=0,\ (x+y+1)^2=0,\qquad x+y=-1$$

Substituint aquesta igualtat en la primera equació tenim:

$$xy-1=-9,\qquad xy=-8$$

El sistema proposat es equivalent a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-1 \\ xy=-8 \end{array}\right\}$$

Que passem a resoldre. De la primera aïllem y ($y=-1-x$) i substituïm y en la segona:

$$x(-1-x)=-8;\ x^2+x-8=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}=\begin{cases} x_1=-\dfrac{1+\sqrt{33}}{2} \\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

No és totalment necessari calcular els valors de y perquè al ser el sistema proposat simètric tenim que si (a, b) és solució també ho és (b, a). Per tant:

$$y_1=x_2=\frac{-1+\sqrt{33}}{2};\ \ y_2=x_1=-\frac{1+\sqrt{33}}{2}$$

No obstant, si se vol calcular els valores de y:

$$y_1=-1-x_1=-1+\frac{1+\sqrt{33}}{2}=\frac{-1+\sqrt{33}}{2},\ \ y_2=-1-x_2=-1-\frac{-1+\sqrt{33}}{2}=-\frac{1+\sqrt{33}}{2}$$

Novembre 29-30: Cinc persones tenen cada una d'elles una plaça d'aparcament en un mateix garatge. Com les cinc places estan juntes han decidit aparcar triant aleatòriament la plaça d'entre les que estan desocupades quan arriben a aparcar. Un determinat dia totes les places han sigut desocupades, quina és la probabilitat que cap dels vehicles aparcats en els extrems de les places aparque novament en una plaça que estiga en un extrem?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Els casos possibles seran les formes de triar cinc places entre els cinc cotxes disponibles, és a dir 5!. Per als casos favorables raonem de la manera següent: Si A i B van ser els cotxes que van ocupar les places extremes, llavors A pot aparcar en tres places no extremes i llavors B pot aparcar en dos places que no són extremes. Queden llavors 3 places que poden ser triades de 3! maneres entre els altres cotxes. Així que els casos favorables són 3·2·3!. La probabilitat sol·licitada és:

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$$