

SOLUCIONS GENER 2017

Autor: José Miguel Bernabéu. IES "Mutxamel"

Gener 1, 8: Quant és el 5% del 10% del 20% del 40% del 80% de 2500?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: $0,05 \cdot 0,10 \cdot 0,20 \cdot 0,40 \cdot 0,80 \cdot 2500 = 0,8$

Gener 2: He repartit el 30% d'un premi de loteria entre familiars i m'han quedat 63000 €. A quant ascendia el premi?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: $0,7 \cdot x = 63000 \Rightarrow x = \frac{63000}{0,7} = 90000$

Gener 3: Després d'augmentar un 22% la longitud d'un bot, este va arribar a els 183 m. Quant mesurava el bot inicial?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: $1,22 \cdot x = 183 \Rightarrow x = \frac{183}{1,22} = 150 \text{ m}$

Gener 4: L'any passat cobrava 560 € al mes. Enguany cobraré 980 € al mes. Quin ha sigut el percentatge de pujada?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució:

$$\left(1 + \frac{x}{1000}\right) \cdot 560 = 980 \Rightarrow x = \left(\frac{980}{560} - 1\right) \cdot 100 = 75\%$$

Gener 5, 6: Al tapar una olla estalviem el 20% de temps de cocció. Quant tardarà a realitzar-se, amb l'olla tapada, un guisat que necessitava una hora i vint minuts amb l'olla destapada?. Quant tardarà a realitzar-se, amb l'olla destapada, un guisat que necessitava una hora i vint-i-huit minuts amb l'olla tapada?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució:

$$T_t = 0,8 \cdot T_a = 0,8 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15} = 1\text{h } 4', \quad T_t = 0,8 \cdot T_a \Rightarrow T_a = \frac{1\text{h } 28'}{0,8} = \frac{1 + \frac{7}{15}}{0,8} = \frac{11}{6} = 1\text{h } 50'$$

Gener 7 En les rebaixes vaig comprar uns pantalons, amb un 40% de descompte, que em van costar 63 €. Què costaven abans de rebaixes?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: $p = 0,6 \cdot P \Rightarrow 63 = 0,6 \cdot P \Rightarrow P = \frac{63}{0,6} = 105 \text{ €}$

Gener 9, 10 Els 3/7 dels alumnes d'un col·legi practica el futbol, i un de cada cinc alumnes practica el bàsquet. Sabent que no hi ha cap que practique els dos esports: Quin percentatge d'alumnes

practica futbol?. Quin percentatge practica el bàsquet?. Quin percentatge no practica cap dels dos esports?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució:

$$\frac{3}{7} = \frac{x}{100} \Rightarrow \frac{300}{7} = x = 42,857142\%$$

$$\frac{1}{5} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{100}{5} = 20\%$$

$$1 - \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{35} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{1300}{35} = 37,142857\%$$

Gener 11: Un dependent diu que s'obté un benefici del 150% en la venda de cada article, mentre que un altre diu que el benefici és només del 60%. Com pot ser açò?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Aquest es un exemple típic de que en el llenguatge dels percentatges ha de quedar clar quina és la base de referència. Imaginem un producte que es compra a 100 € i es ven a 250 €. Aleshores, el guany és de (250 – 100 =) 150 €, i:

$$\frac{150}{250} \cdot 100 = 60\% ; \quad \frac{150}{100} \cdot 100 = 150\%$$

Hi ha un 150% de benefici sobre el preu de compra, però un 60% de benefici sobre el preu de venda.

Gener 12: Si sumem 300 més el 50% de 300 més el 50% del 50% de 300 i així successivament, què obtenim?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: $300 + 0,5 \cdot 300 + 0,5^2 \cdot 300 + 0,5^3 \cdot 300 + \dots =$ Suma de tots els termes d'una PG de raó $r = 0,5$ i primer terme $300 = \frac{a_1}{1-r} = \frac{300}{1-0,5} = 600$

Gener 13 Si augmentem una quantitat en un 30% i el resultat ho reduïm un altre 30%, no es queda igual. Pots explicar què ocorre?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució:

$$x \rightarrow \left(1 + \frac{30}{100}\right) \cdot x \rightarrow \left(1 - \frac{30}{100}\right) \left(1 + \frac{30}{100}\right) \cdot x = \left(1 - \frac{9}{100}\right) \cdot x$$

Es dir, hi ha una disminució del 9%

Gener 14: Al nàixer vaig pesar 4,2 Kg. El primer any vaig augmentar un 175% i en el que porta del segon he augmentat un 24%. Quant pesa ara?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució:

$$4,2 \xrightarrow{175\% \uparrow} 2,75 \cdot 4,2 \xrightarrow{24\% \uparrow} 1,24 \cdot 2,75 \cdot 4,2 = 14,322 \text{ kg}$$

Gener 15: Si l'any en què es va descobrir Amèrica, algú haguera posat un euro a interès compost del 4%, quant tindria ara?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Amèrica fou descoberta en 1492 per Cristóbal Colón. Tenim:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = \left\{ \begin{array}{l} C_i = 1 \\ r = 4 \\ n = (2016 - 1492 =) 524 \end{array} \right\} = 1 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{524} = 842305802,7\text{€}$$

Gener 16: En un banc em donen el 8% anual acumulable any a any, en un termini fix. Si invertim 15.000 € durant deu anys, quants diners ens tornaran?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = \left\{ \begin{array}{l} C_i = 15000 \\ r = 8 \\ n = 10 \end{array} \right\} = 15000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{10} \cong 32383,88\text{€}$$

Gener 17, 18: Vaig invertir 5.000 € en accions i les vaig vendre al cap de tres anys. Si el primer any van pujar un 9%, en el segon van tornar a pujar un 17% i en el tercer van abaixar un 5%, quants diners vaig arregar de tota l'operació?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució:

$$5000 \xrightarrow{9\% \uparrow} 5000 \cdot 1,09 \xrightarrow{17\% \uparrow} 5000 \cdot 1,09 \cdot 1,17 \xrightarrow{5\% \downarrow} 5000 \cdot 1,09 \cdot 1,17 \cdot 0,95 \cong 6057,68\text{€}$$

Gener 19: Quants alumnes ha d'haver-hi, com a mínim, perquè la probabilitat que dos d'ells complisquen anys el mateix dia siga almenys del 50%?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Amb grups de 23 alumnes ja se compleix, perquè:

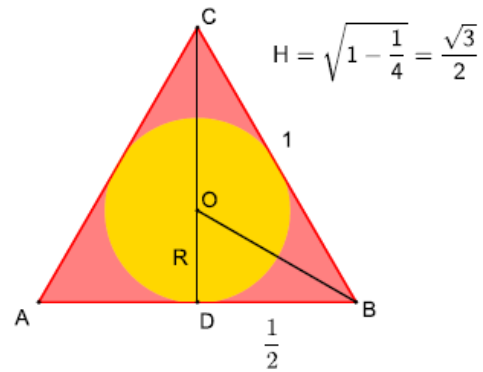
$$1 - \frac{V_{365,23}}{VR_{365,23}} = 0,5073 = 50,73\%$$

Gener, 20: Quin percentatge de l'àrea d'un triangle equilàter ocupa el seu cercle inscrit?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Aplicarem el fet de que l'incentre d'un triangle equilàter està en l'alçaria del triangle i dista un terç de la base, (aquest fet també pot obtenir-se de la semblança dels triangles $\triangle DCB$ y $\triangle DBO$ ja que ambos dos són 30° - 60° - 90°) amb el que:

$$R = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



I tindrem:

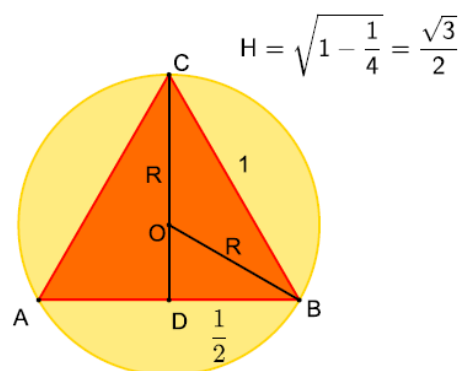
$$\frac{A_c}{A_t} \cdot 100 = \frac{\pi \cdot R^2}{\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi \cdot \frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 100 = 60,4599 \dots \%$$

Gener 21: Quin percentatge de l'àrea d'un triangle equilàter ocupa el seu cercle circumscrit?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Aplicarem el fet de que el circumcentre d'un triangle equilàter està en l'alçaria del triangle i dista dos terços del vèrtex, (aquest fet també és pot obtindre de la semblança dels triangles $\triangle DCB$ i $\triangle DBO$ ja que ambos dos són 30° - 60° - 90°) amb el que:

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



I tindrem:

$$\frac{A_t}{A_c} \cdot 100 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{3}} \cdot 100 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \pi} \cdot 100 = 41,3496 \dots \%$$

Gener 22: Obtín la fórmula que dona el percentatge d'àrea que ocupa un cercle inscrit en un polígon regular de n costats

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Siga $c = 1$ el costat del polígon, aleshores es compleix el que apareix en la figura 1. Queda format un triangle rectangle (Fig 2) en el que:

$$\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{1/2}{R} = \frac{1}{2R} \Rightarrow R = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg}(180^\circ/n)}$$

Per tant:

$$A_P = n \cdot A_t = n \cdot \frac{1 \cdot R}{2} = n \cdot \frac{1}{4 \cdot \operatorname{tg}(180^\circ/n)}$$

$$A_C = \pi \cdot R^2 = \frac{\pi}{4 \operatorname{tg}^2(180^\circ/n)}$$

$$\frac{A_C}{A_P} \cdot 100 = \frac{\pi \cdot 100}{n \cdot \operatorname{tg}(180^\circ/n)}$$

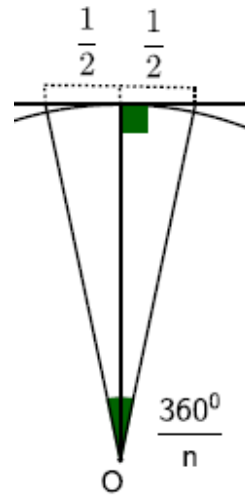


Fig 2



Gener 23: Obtén la fórmula que dona el percentatge d'àrea que ocupa un cercle circumscrit en un polígon regular de n costats

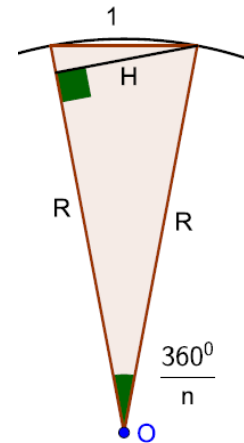
Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Tenim la figura adjunta formada per un triangle generador del polígon regular de base 1 i el cercle circumscrit. Aleshores:

$$A_P = n \cdot A_t = n \cdot \frac{R \cdot H}{2} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

$$A_C = \pi \cdot R^2$$

$$\frac{A_P}{A_C} \cdot 100 = \frac{n}{2} \cdot 100 \cdot \frac{\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{\pi} = \frac{50n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{\pi}$$



Gener 24: Quants costats deu tenir un polígon regular per a que la seua àrea i la del cercle circumscrit difereixen menys de l'1%?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Utilitzant la fórmula obtinguda en el problema anterior deurem trobar n tal que:

$$\frac{50n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{\pi} \geq 0,9$$

Utilitzant una fulla de càlcul obtenim

n	$(50 \cdot n \cdot \sin(2 \cdot \pi / n)) / \pi$
3	41,3496671566344
4	63,6619772367581
5	75,6826728640657
6	82,6993343132688
7	87,102641569756
8	90,0316316157106
9	92,0725428958529
10	93,5489283788639
11	94,6502243888316
12	95,4929658551372
13	96,1518870001444
14	96,6766385308552
15	97,1012209231763
16	97,4495358404433
17	97,7387746015442
18	97,9815536051016
19	98,187298532156
20	98,3631643083466
21	98,5146603197592
22	98,6400839127102
23	98,7608264477086
24	98,8615929465369
25	98,9505620981308
26	99,029504419782
27	99,0998706170726
28	99,1628584256033
29	99,2194637168532
30	99,2705199607207
31	99,3167289784997
32	99,3586851144206
33	99,3968943866298
34	99,4317897742822

Que aporta com solució $n \geq 26$

Gener 25: Des de 1990 fins 2000 la població de Taxçaxi va augmentar un 21%. Des de el 2000 fins el 2010 va disminuir un 14%. Si en 2010 la població era de 185.000 habitants, quants eren en 1990?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Tenim:

$$x \xrightarrow{\uparrow 21\%} 1,21 \cdot x \xrightarrow{\downarrow 14\%} 0,86 \cdot 1,21 \cdot x = 185000 \Rightarrow x = \frac{185000}{1,21 \cdot 0,86} = 177.782$$

Gener 26: El bor té dos isòtops: un amb massa atòmica 10 i una abundància del 20% i l'altre de massa atòmica 11 i una abundància del 80%. Quina serà la seua massa atòmica mitjana?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: $M = 0,2 \cdot 10 + 0,8 \cdot 11 = 10,8$

Gener 27: Si la base d'un rectangle augmenta un $x\%$ i l'alçaria disminueix un $y\%$, quina és l'àrea del nou rectangle?

Nivell: A partir de 3ESO.

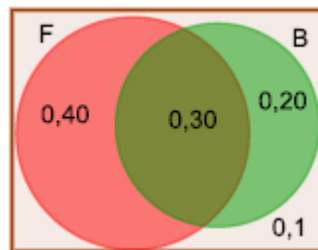
Solució: Si designem per B , H , (b i h) la base i l'alçaria després de la variació percentual (abans de la variació percentual), tindrem:

$$A_n = B \cdot H = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot b \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) \cdot h = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) \cdot A_a$$

Gener 28, 29: El 70% de l'alumnat d'un institut juguen al futbol; el 40% juguen al futbol, però no al bàsquet; el 10% no juga ni al futbol ni al bàsquet. Quant d'alumnat juga al bàsquet, però no al futbol? Quant d'alumnat juga als dos esports?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: Tindrem el següent diagrama de Venn:



D'on: $B \cap \bar{F} \rightarrow 20\%$; $B \cap F \rightarrow 30\%$

Gener 30: La base d'un triangle augmenta un $x\%$, quin percentatge deu disminuir l'alçaria per a que l'àrea siga la mateixa per a els dos triangles?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Si designem per B , H , (b i h) la base i l'alçaria després de la variació percentual (abans de la variació percentual), tindrem:

$$A_n = \frac{B \cdot H}{2} = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot b \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) \cdot A_a$$

Per la qual cosa, deu complir-se:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1$$

Aïllant y tindrem:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1 &\Rightarrow \frac{x}{100} - \frac{y}{100} - \frac{x \cdot y}{10000} = 0 \Rightarrow 100x - 100y - xy = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{100x}{100 + x} \end{aligned}$$

Gener 31: És cert que el $x\%$ de y és el mateix que el $y\%$ de x ?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució:

$$x\% \text{ de } y = \frac{x}{100} \cdot y = \frac{x \cdot y}{100} = \frac{y}{100} \cdot x = y\% \text{ de } x$$