SOLUCIONES FEBRERO 2018

AUTOR: Rafael Martínez Calafat. Profesor jubilado de Matemáticas

Nivel: PROBLEMAS PARA PREPARACIÓN OME.

Febrero 1: ¿Cuáles son los más pequeños subconjuntos de A = {1, 2, .., 100} que permiten asegurar que la suma de al menos dos de los que quedan en el subconjunto sea un número impar?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Para que la suma de dos números resulte número impar, uno de ellos ha de ser par y el otro ha de ser impar. Por tanto, todos los subconjuntos que tengan un par y un impar cumplen el requisito de que al menos la suma de dos de los elementos sea impar. Como buscamos los subconjuntos más pequeños tenemos que estos son los subconjuntos con sólo dos elementos: uno par y otro impar, por ejemplo: {1, 2}.

Febrero 2: Hallar el menor valor de k de manera que A= {1, 2, 3, ..., 53, 54} se pueda particionar en k subconjuntos cumpliendo cada uno de ellos que la suma de dos cualesquiera de sus elementos no es múltiplo de 5

Nivel: Preparación OME.

Solución: Los múltiplos de 5 incluidos en A son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 y 50. Si dos cualesquiera de ellos están en un mismo subconjunto de la partición entonces que en ese subconjunto hay dos números cuya suma proporciona un múltiplo de 5. Por tanto, cada uno de los números anteriores debe estar en un único subconjunto de la partición. En otras palabras, el número k no puede ser menor que 10.

Por otra parte, con 10 subconjuntos podemos cumplir lo exigido en el enunciado pues:

$$A_1 = \{5, 1, 13, 26, 38, 51\}$$

$$A_2 = \{10, 2, 14, 27, 39, 52\}$$

$$A_3 = \{15, 3, 16, 28, 41, 53\}$$

$$A_4 = \{20, 4, 17, 29, 42, 54\}$$

$$A_5 = \{25, 6, 18, 31, 43\}$$

$$A_6 = \{30, 7, 19, 32, 44\}$$

$$A_7 = \{35, 8, 21, 33, 46\}$$

$$A_8 = \{40, 9, 22, 34, 47\}$$

$$A_9 = \{45, 11, 23, 36, 48\}$$

$$A_{10} = \{50, 12, 24, 37, 49\}$$

En definitiva, para cumplir con lo exigido es necesario y suficiente que k = 10

<u>Febrero 3-4:</u> Sea N el número formado por n unos. Si multiplicamos N por un número de m dígitos, obtenemos un número con n+m-1 o con n+m dígitos. Hallar el número S de m dígitos de manera que N·(S-1) tiene n+m-1 dígitos y N·S tiene n+m dígitos (n > m-1)

<u>Nivel:</u> Preparación OME.

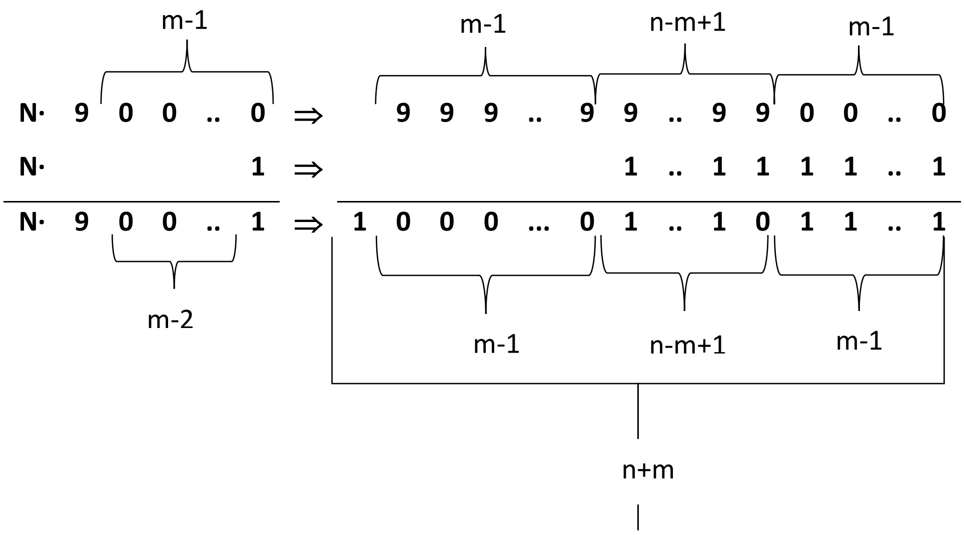
<u>Solución:</u> Sea

$$\mathrm{N} = \underbrace{111\ldots\ldots1}_{\mathrm{n}}$$

Tenemos que al multiplicar N por 9 conseguimos el mayor número con n dígitos: $\underbrace{999\ldots..9}_{\mathrm{n}}$ Si al 9 le añadimos m – 1 ceros obtenemos:

$$\mathrm{N}\cdot 9\underbrace{00\ldots.0}_{\mathrm{m-1}} = \underbrace{\overbrace{999\ldots9}^{\mathrm{n}}\underbrace{00\ldots.0}_{\mathrm{m-1}}}_{\mathrm{n+m-1}}$$

Y como n > m – 1, al sumar al número anterior el número N algunos de los últimos unos se solaparán con algunos nueves, añadiendo, al sumar, un dígito a los ya existentes, consiguiendo un número con n + m dígitos:



El número buscado es $9\underbrace{000..0}_{\mathrm{m-2}}1$

<u>Febrero 5:</u> Hallar los naturales que cumplen:

$$\sqrt[3]{\mathrm{x}} + \sqrt{\mathrm{y}} = 10$$

<u>Nivel:</u> Preparación OME.

<u>Solución:</u> Hagamos $\mathrm{u} = \sqrt[3]{\mathrm{x}}, \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{y}}$. Entonces la ecuación propuesta se transforma en: u + v = 10 cuyas soluciones son (1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6); (5, 5); (6, 4); (7, 3); (8, 2) y (9, 1). Por tanto, las soluciones para x e y son:

u	v	x = u^3	y = v^2
1	9	1	81
2	8	8	64
3	7	27	49
4	6	64	36
5	5	125	25
6	4	216	16
7	3	343	9
8	2	512	2
9	1	729	1

Febrero 6: ¿Cuántos naturales son solución de la inecuación:

$$(x-2017)^{2017}\cdot(x-2018)^{2018}<0$$

Nivel: Preparación OME.

Solución: Obviamente x = 2017 o x = 2018, no son soluciones de la inecuación, pues cualquiera de ellos hace que el producto sea 0. Tenemos, considerando valores de x diferentes de 2017 y 2018:

$$(x-2017)^{2017}\cdot(x-2018)^{2018}=(x-2017)\cdot(x-2017)^{2016}\cdot(x-2018)^{2018}$$
$$=(x-2017)\cdot((x-2017)^{1008}\cdot(x-2018)^{1009})^2$$

Y, puesto que, $((x-2017)^{1008}\cdot(x-2018)^{1009})^2>0$ (al ser un cuadrado con base no nula), la inecuación propuesta es equivalente a x – 2017 < 0, cuyas soluciones naturales son: {1, 2, 3, …. , 2016}. La inecuación tiene, pues, 2016 soluciones naturales.

Febrero 7: Demostrar que, dado un natural n, existe una sucesión de n naturales consecutivos de manera que ninguno de ellos es primo.

Nivel: Preparación OME.

Solución: Sea dado n. Consideremos (n + 1)! = N. Tenemos que N es múltiplo de 2, 3, 4, ……, n y n + 1. Entonces:

N + 2 es múltiplo de 2

N + 3 es múltiplo de 3

N + 4 es múltiplo de 4

……………………………..

N + n es múltiplo de n

N + n + 1 es múltiplo de n + 1

Es una colección de n naturales consecutivos todos y cada uno de ellos compuestos.

Febrero 8: Dado el conjunto A = {1, 2, ..., 84, 85}, ¿qué números hemos de quitar para que al extraer tres diferentes de los que queden, al menos, la suma de los cuadrados de dos de ellos sea múltiplo de 8?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Recordemos las congruencias módulo 8:

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$x = 1(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$
$$x = 2(8) \Rightarrow x^2 = 4(8)$$
$$x = 3(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$
$$x = 4(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$x = 5(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$
$$x = 6(8) \Rightarrow x^2 = 4(8)$$
$$x = 7(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$

Con ello:

$x^2 + y^2$	0(8)	1(8)	4(8)
0(8)	0(8)	1(8)	4(8)
1(8)	1(8)	2(8)	5(8)
4(8)	4(8)	5(8)	0(8)

Es decir, la suma de cuadrados de dos números es múltiplo de 8 sii los números son ambos de la clase 0(8) o de la clase 4(8).

Luego si extraemos de A todos los números de las clases 1(8), 3(8), 5(8) y 7(8), (es decir A queda formado por los números que al dividirlos por 8 dan resto 0 o 2 o 4 o 6, es decir por los números pares menores que 85) podemos asegurar que extraídos tres de los que quedan, al menos la suma de los cuadrados de dos de ellos es múltiplo de 8: Si de los tres, dos pertenecen a la misma clase la suma de los cuadrados de esos dos números es múltiplo de 8. Si los tres pertenecen a clases diferentes, tenemos:

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$y = 2(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 4(8) \Rightarrow z^2 = 0(8)$$

entonces $x^2 + z^2$ es múltiplo de 8

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$y = 6(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 4(8) \Rightarrow z^2 = 0(8)$$

entonces $x^2 + z^2$ es múltiplo de 8

$$x = 6(8) \Rightarrow x^2 = 4(8)$$
$$y = 2(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 4(8) \Rightarrow z^2 = 0(8)$$

entonces $x^2 + y^2$ es múltiplo de 8

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$y = 2(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 6(8) \Rightarrow z^2 = 4(8)$$

entonces $y^2 + z^2$ es múltiplo de 8

NOTA: Podría también utilizarse el hecho de que, si x = 2n, y = 2m y z = 2k con dos de los tres números n, m o k de la misma paridad proporcionan números que al elevarlos al cuadrado y sumar dos cuadrados, al menos una suma es múltiplo de 8.

Febrero 9: Hallar los naturales que cumplen:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = \sqrt{99}$$

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tendremos $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$. Si hacemos u = $\sqrt{x}$, v = $\sqrt{y}$, la ecuación se transforma en:

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = 3\sqrt{11} \quad (*)$$

De (*) tenemos:

$$\sqrt{u} = 3\sqrt{11} - \sqrt{v} \;\Rightarrow\; u = \left(3\sqrt{11} - \sqrt{v}\right)^2 = 99 + v - 6\sqrt{11v}$$

Como u$\in$N $\Rightarrow$ $\sqrt{11v}$ $\in$N $\Rightarrow$ v = $11z^2$ para algún z$\in$N.

Análogamente a como hemos hecho

$$\sqrt{v} = 3\sqrt{11} - \sqrt{u} \;\Rightarrow\; v = \left(3\sqrt{11} - \sqrt{u}\right)^2 = 99 + u - 6\sqrt{11u} \;\Rightarrow\; u = 11t^2 \text{ para algún } t \in N$$

Sustituyendo en (*):

$$t\sqrt{11} + z\sqrt{11} = 3\sqrt{11} \;\Rightarrow\; t + z = 3$$

que es una ecuación fácilmente resoluble en N: Las soluciones son: t = 1, z = 2 y t = 2, z =1. Deshaciendo los cambios:

t	z	u = $11t^2$	v = $11z^2$	x = u^2	y = v^2
1	2	11	44	121	1936
2	1	44	11	1936	121

Febrero 10: Hallar los reales que cumplen:

$$\left(\frac{9 - x^2}{8}\right)^{x^3 - 3x^2 + 2x} = 1$$

Nivel: Para primero de bachillerato.

Solución: Recordemos que:

$$a^b = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 1 \text{ y b cualquiera} \\ a = -1 \text{ y b par} \\ b = 0 \text{ y } a \neq 0 \end{cases}$$

En nuestro caso:

1. (base igual a 1 y exponente cualquiera) $\frac{9-x^2}{8} = 1 \;\Rightarrow\; 9 - x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$
2. (base igual a –1 y exponente par) $\frac{9-x^2}{8} = -1 \;\Rightarrow\; 9 - x^2 = -8 \;\Rightarrow x = \pm\sqrt{17}$. Como en este caso el valor del exponente es $\left(\pm\sqrt{17}\right)^3 - 3\left(\pm\sqrt{17}\right)^2 + 2\left(\pm\sqrt{17}\right) = \pm 19\sqrt{17} - 51$, que no es un natural par, tenemos que $x = \pm\sqrt{17}$ no son soluciones de la ecuación propuesta.
3. (exponente igual a 0 y base diferente de 0) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 = x \cdot (x^2 - 3x + 2)$, que lleva a x = 0, x = 1, x = 2. Y como para estos valores la base es no nula, todas ellas son soluciones de la ecuación propuesta.

En definitiva, las soluciones de la ecuación propuesta son: x = - 1, x = 0, x = 1, x = 2.

Febrero 11: ¿Para cuántos naturales, n, el resto de dividir 2017 por n es 1?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Si el resto de dividir 2017 por n es 1 es que 2016 (= 2017 – 1) es múltiplo de n (con n ≠ 1). Como 2016 = $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, 2016 tiene ((5 + 1)·(2 + 1)·(1 + 1)=) 36 divisores (del que debemos eliminar al divisor 1). Por tanto, hay 35 números que al dividir 2017 por ellos aparece resto 1. Para explicitarlos podemos proceder de la siguiente manera: Los divisores de 2016 son números de la forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$ con $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4, \text{ y } 5\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ y $\gamma \in \{0, 1\}$

α	β	γ	Divisores de 2016: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$
0	0	0	1
1	0	0	2
2	0	0	4
3	0	0	8
4	0	0	16
5	0	0	32
0	1	0	3
1	1	0	6
2	1	0	12
3	1	0	24
4	1	0	48
5	1	0	96
0	2	0	9

α	β	γ	Divisores de 2016: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$
0	0	1	7
1	0	1	14
2	0	1	28
3	0	1	56
4	0	1	112
5	0	1	224
0	1	1	21
1	1	1	42
2	1	1	84
3	1	1	168
4	1	1	336
5	1	1	672
0	2	1	63

1	2	0	18
2	2	0	36
3	2	0	72
4	2	0	144
5	2	0	288

1	2	1	126
2	2	1	252
3	2	1	504
4	2	1	1008
5	2	1	2016

Febrero 12: ¿Cuántos números con todas sus cifras iguales y menores que 10^{16} son múltiplos de 6?

Nivel: Preparación OME.

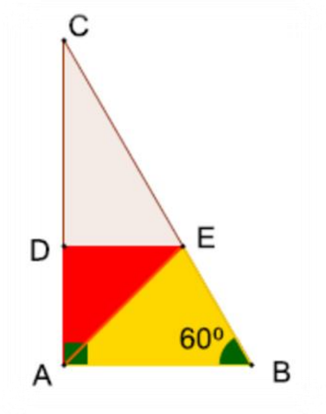
Solución: Buscamos números de la forma $\underbrace{\mathrm{kkk}\ldots.\mathrm{k}}_{\mathrm{n}}$ con n∈{1, 2, 3, 4, … , 16}; k∈{1, 2, …., 9} que sean múltiplos de 6, es decir, múltiplos de 2 (terminados en 2, 4, 6 o 8) y de 3 (la suma de sus cifras ha de ser múltiplo de 3) (0bviamente hemos de añadir el número 0). En símbolos:

$$\underbrace{\mathrm{kkk}\ldots.\mathrm{k}}_{\mathrm{n}} \text{ con } \mathrm{n}\in\{1, 2, \ldots., 16\} \mid \ \mathrm{n}\cdot\mathrm{k} = \dot{3},\ \mathrm{k}\in\{2, 4, 6, 8\}$$

Analicemos todos los casos:

1. k = 0, n = 0. El número 0. 1 número
2. k = 2, $2\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{n}=3 \ \Rightarrow \ 222 \\ \mathrm{n}=6 \ \Rightarrow 222222 \\ \mathrm{n}=9 \ \Rightarrow \ 222222222 \\ \mathrm{n}=12 \ \Rightarrow \ 222222222222 \\ \mathrm{n}=15 \ \Rightarrow \ 222222222222222 \end{matrix}\right\}$ 5 números
3. k = 4, $4\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{n}=3 \ \Rightarrow \ 444 \\ \mathrm{n}=6 \ \Rightarrow \ 444444 \\ \mathrm{n}=9 \ \Rightarrow \ 444444444 \\ \mathrm{n}=12 \ \Rightarrow \ 444444444444 \\ \mathrm{n}=15 \ \Rightarrow \ 444444444444444 \end{matrix}\right\}$ 5 números
4. k = 6, $6\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \text{n cualquiera} \left\{\begin{matrix} n=1 \ \Rightarrow \ 6 \\ n=2 \ \Rightarrow \ 66 \\ n=3 \ \Rightarrow \ 666 \\ n=4 \ \Rightarrow \ 6666 \\ n=5 \ \Rightarrow \ 66666 \\ n=6 \ \Rightarrow \ 666666 \\ n=7 \ \Rightarrow \ 6666666 \\ n=8 \ \Rightarrow \ 66666666 \\ n=9 \ \Rightarrow \ 666666666 \\ n=10 \ \Rightarrow \ 6666666666 \\ n=11 \ \Rightarrow \ 66666666666 \\ n=12 \ \Rightarrow \ 666666666666 \\ n=13 \ \Rightarrow \ 6666666666666 \\ n=14 \ \Rightarrow \ 66666666666666 \\ n=15 \ \Rightarrow \ 666666666666666 \\ n=16 \ \Rightarrow \ 6666666666666666 \end{matrix}\right\}$ 16 números
5. k = 8, $8\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{n}=3 \ \Rightarrow \ 888 \\ \mathrm{n}=6 \ \Rightarrow \ 888888 \\ \mathrm{n}=9 \ \Rightarrow \ 888888888 \\ \mathrm{n}=12 \ \Rightarrow \ 888888888888 \\ \mathrm{n}=15 \ \Rightarrow \ 888888888888888 \end{matrix}\right\}$ 5 números

En total: 1 + 5 + 5 + 16 + 5 = 32 números

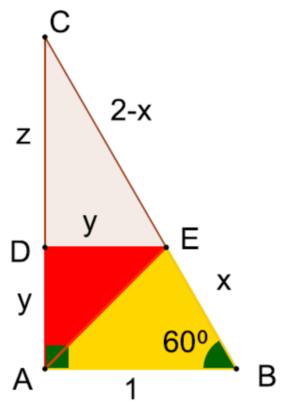


Febrero 13-14: Sea dado el triángulo ΔABC rectángulo en A, con el ángulo B de 60° y AB = 1. Sean E y D puntos de CB y AC, respectivamente, tales que AE es la bisectriz del ángulo A y DE//AB. Hallar ángulos, perímetros y áreas de los triángulos ΔABE, ΔAED, ΔCDE y ΔABC.

Nivel: Preparación OME.

Solución: En primer lugar ΔABC es un triángulo 30°-60°-90° y por tanto el cateto pequeño es la mitad de la hipotenusa (CB = 2·AB = 2·1 = 2): Para el cateto grande, tenemos al aplicar Pitágoras:

$$\mathrm{CA} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$



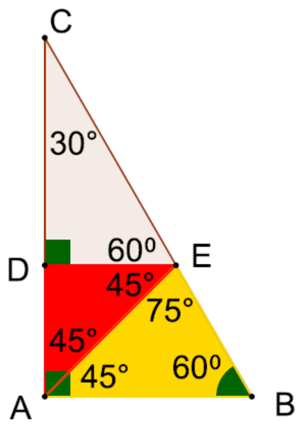
Al aplicar el teorema de la bisectriz al triángulo ΔABC, tenemos:

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2 - \mathrm{x}}{\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{x}\sqrt{3} = 2 - \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}},$$

$$2 - \mathrm{x} = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

Por otra parte ΔDCE y ΔABC son semejantes (al estar en posición de Tales), por tanto:

$$\frac{\mathrm{y}}{1} = \frac{{2\sqrt{3}}/{1 + \sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$



De forma alternativa, puesto que ΔCDE es 30°-60°-90°:

$$\mathrm{DE} = \mathrm{y} = \frac{\mathrm{CE}}{2} = \frac{{2\sqrt{3}}/{1 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

Por otra parte ΔADE es rectángulo isósceles, al cumplirse ∠ADE = 90° y ∠DAE = 45° = ∠DEA. Por lo tanto: DE = DA, y, además, al aplicar Pitágoras en ΔDEC:

$$z = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^2 - y^2} = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}$$

De forma alternativa, aplicando que ΔCDE es 30°-60°-90°:

$$\mathrm{CD} = \sqrt{3} \cdot \mathrm{DE} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}$$

También, de forma alternativa:

$$\mathrm{DA} = \sqrt{3} - \mathrm{z} = \sqrt{3} - \frac{3}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

Aplicando Pitágoras en ΔDAE, tenemos:

$$\mathrm{AE} = \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$$

PERÍMETROS:

$$\Delta\mathrm{ABC} \quad \Rightarrow \quad 1+2+\sqrt{3} = 3+\sqrt{3}$$

$$\Delta\mathrm{AEB} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\Delta\mathrm{ADE} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}+2\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\Delta\mathrm{CDE} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{1+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 3$$

ÁREAS:

$$\Delta\mathrm{ABC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta\mathrm{CDE} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \dfrac{\mathrm{y}\cdot\mathrm{z}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{1+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2} \\ \text{Si } \alpha \text{ es la razón de semejanza entre los triángulos } \Delta\mathrm{ABC} \text{ y} \\ \Delta\mathrm{CDE} \text{ entonces } \alpha^2 \text{ es la razón de semejanza entre sus áreas} \end{cases}$$

$$\Delta\mathrm{DEA} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{\mathrm{y}^2}{2} = \frac{\frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2} = \frac{3}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Delta\mathrm{AEB} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \dfrac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)} \\ \mathrm{A}_{\Delta\mathrm{ABC}} - \mathrm{A}_{\Delta\mathrm{CEA}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{3}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)} \end{cases}$$

Febrero 15: ¿Puede expresarse 20! como producto de cuadrados perfectos? ¿Cuántos cuadrados perfectos dividen a 20!?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos:

$$20! = 20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 =$$

$$(2^2\cdot5)\cdot19\cdot(2\cdot3^2)\cdot17\cdot2^4\cdot(3\cdot5)\cdot(2\cdot7)\cdot13\cdot(2^2\cdot3)\cdot11\cdot(2\cdot5)\cdot(3^2)\cdot(2^3)\cdot7\cdot(2\cdot3)\cdot5\cdot(2^2)\cdot3\cdot2\cdot1=$$

$$2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$$

Si 20! se pudiese escribir como producto de dos cuadrados perfectos tendríamos que los exponentes de la descomposición factorial de 20! como producto de primos serían todos pares. Como no es así, tenemos que 20! no se puede poner como producto de dos cuadrados perfectos. Habrá tantos cuadrados perfectos que dividen a 20! como potencias de exponentes pares de los primos 2, 3, 5 y 7 (que son las bases que aparecen elevadas a exponentes pares en 20!). Hay 10 posibilidades para el exponente de base 2: {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}. Hay 5 posibilidades para el exponente de base 3: {0, 2, 4, 6, 8}. Hay 3 posibilidades para el exponente de base 5: {0, 2, 4}. Hay dos posibilidades para el exponente de base 7: {0, 2}.

El número de cuadrados perfectos que son divisores de 20! es: 10·5·3·2 = 300.

Febrero 16: Hallar c y las soluciones de la ecuación

$$\mathbf{4x^2 - 200x + 148c = 0}$$

sabiendo que las raíces son números primos

Nivel: Preparación OME.

Solución: Recordemos que si x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Aplicado a nuestro caso tenemos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{200}{4} = 50 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{148c}{2} = 37c \end{cases}$$

Como 37 es primo por la unicidad de la descomposición factorial en factores primos tenemos que una raíz, pongamos x_1, es 37. De aquí:

$$x_1 + x_2 = 50 = 37 + c \;\Rightarrow\; c = 50 - 37 = 13$$

Así que, c = 13 y las soluciones de la ecuación son 13 y 37.

Febrero 17: Hallar el menor valor posible de k de manera que {1, 2, 3,...., 19, 20} se particione en k conjuntos cumpliendo cada uno de ellos que la suma de dos de sus elementos no es múltiplo de 5

Nivel: Preparación OME.

Solución: E l número k no puede ser menor que 4 puesto que dos cualesquiera de los números 5, 10, 15 y 20 no pueden estar en el mismo subconjunto (si lo estuvieran, la suma de esos dos números seria múltiplo de cinco, contradiciendo la exigencia del enunciado). Por otra parte, 4 subconjuntos son suficientes para efectuar la partición requerida, pues, por ejemplo:

A_1 = {5, 1, 6, 11, 16}; A_2 = {10, 2, 7, 12, 17}; A_3 = {15, 3, 8, 13, 18}; A_4 = {20, 4, 9, 14, 19}

Es decir, $A_i = \{5\cdot i\} \cup i\ (5)\ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, cumple lo requerido pues la suma de dos números con el mismo resto o uno de ellos con resto 0 al ser divididos por cinco no da un múltiplo de cinco excepto si los números son múltiplos de cinco.

	1(5)	2(5)	3(5)	4(5)	0(5)
1(5)	2(5)				1(5)
2(5)		4(5)			2(5)
3(5)			1(5)		3(5)
4(5)				3(5)	4(5)

Febrero 18: ¿Qué números hemos de quitar de A = {1, 2, 3, 4, …….., 75, 76} para asegurar que, la suma de los cuadrados de cualesquiera dos de los que queden, de resto 3 al dividir por 5?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos la siguiente tabla de congruencias módulo 5: primera columna (fila), congruencia de x (y); segunda columna (fila), congruencia de x^2 (y^2); las demás celdas, congruencia de $x^2 + y^2$

	y	0(5)	1(5)	2(5)	3(5)	4(5)
x	$x^2 \setminus y^2$	0(5)	1(5)	4(5)	4(5)	1(5)
0(5)	0(5)	0(5)	1(5)	4(5)	4(5)	1(5)
1(5)	1(5)	1(5)	2(5)	0(5)	0(5)	2(5)
2(5)	4(5)	4(5)	0(5)	3(5)	3(5)	0(5)
3(5)	4(5)	4(5)	0(5)	3(5)	3(5)	0(5)
4(5)	1(5)	1(5)	2(5)	0(5)	0(5)	2(5)

De ella obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x = 2(5) \text{ o } 3(5) \\ y = 2(5) \text{o } 3(5) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = 3(5)$$

Por tanto, de A hemos de quitar los números que no estén en las clases 2(5) o 3(5) para que se cumpla lo requerido.

Febrero 19: Hallar los naturales que cumplen:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 10$$

Nivel: Preparación OME.

Solución: Hagamos el cambio u = $\sqrt[3]{x}$ y v = $\sqrt[3]{y}$. Entonces la ecuación propuesta se transforma en la ecuación: u + v = 10 cuyas soluciones en N son

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Por tanto, las soluciones naturales en x e y son:

u	v	$x = u^3$	$y = v^3$
1	9	1	729
2	8	8	512
3	7	27	343
4	6	64	216
5	5	125	125
6	4	216	64
7	3	343	27
8	2	512	8
9	1	729	1

Febrero 20: Calcular el resto de dividir 2017^{2018} por 11

Nivel: Preparación OME.

Solución: Si representamos por $r_{11}(A)$ el resto de la división de A por 11, tenemos:

$$r_{11}(2017^{2018}) = (r_{11}(2017))^{2018} = (r_{11}(4))^{2018} = r_{11}(4^{2018})$$

Ahora:

n	$r_{11}(4^n)$
1, 6, 11, ... 1(5)	4
2, 7, 12, ... 2(5)	5
3, 8, 13, ... 3(5)	9
4, 9, 14, ... 4(5)	3
5, 10, 15, ... 0(5)	1

I como 2018 = 3(5) $\Rightarrow$ $r_{11}(4^{2018}) = 9 = r_{11}(2017^{2018})$

Febrero 21: Hallar b y c y las soluciones de la ecuación:

$$5x^2 – (65+5b)x + 185c = 0$$

sabiendo que las soluciones son números primos

Nivel: Preparación OME.

Solución: Recordemos que si x_1 y x_2 son las raíces de $Ax^2 + Bx + C = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$$

Aplicado a nuestro caso tenemos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{65+5b}{5} = 13 + b \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 = 13 + b \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{185c}{5} = 37c \quad\;\Rightarrow\; x_1 \cdot x_2 = 37c \end{cases}$$

La pregunta es si existen valores de b y c de manera que aporten valores de x_1 y x_2 primos. De la segunda ecuación por la unicidad de la descomposición factorial en números primos tenemos que una solución, pongamos x_1, es 37, de donde x_2 = c. Sustituyendo en la primera ecuación, llegamos a:

37 + c = 13 + b (con c primo) $\Rightarrow$ 24 + c = b (con c primo) (*)

Y esta ecuación tiene infinitas soluciones, tantas como números primos c pueda sustituirse en (*)

c	b	ecuación	soluciones
2	26	$5x^2 - 195x + 370 = 0$	$x_1 = 37$; $x_2 = 2$
3	27	$5x^2 - 200x + 555 = 0$	$x_1 = 37$; $x_2 = 3$
5	29	$5x^2 - 210x + 925 = 0$	$x_1 = 37$; $x_2 = 5$
…	…	…	…

Febrero 22: Sean x e y reales positivos no iguales a 1. ¿Cuál es el menor valor no negativo de

$\log_x(y) + \log_y(x)$?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos de la definición de logaritmo:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \log_x(y) = z \;\Rightarrow\; x^z = y \;\Rightarrow\; x = y^{\frac{1}{z}} \\ \text{Si } \log_y(x) = t \;\Rightarrow\; y^t = x \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; y^t = y^{\frac{1}{z}} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{z}$$

Por tanto:

$$\log_x(y) + \log_y(x) = z + t = z + \frac{1}{z} = 2 + \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2$$

Así, que, el menor valor posible de $\log_x(y) + \log_y(x)$ en $]0, +\infty[$ es 2.

NOTA: De manera alternativa, definimos:

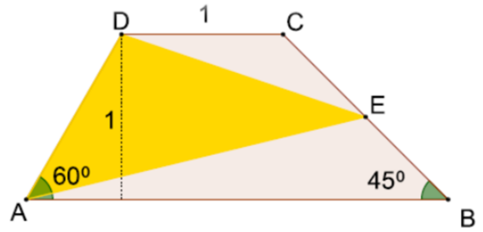
$$f(z) = \frac{z^2+1}{z}$$

Nos preguntan por el mínimo de esta función en $]0, +\infty[$. Por derivación:

$$f'(z) = \frac{2z^2 - z^2 - 1}{z^2} = \frac{z^2-1}{z^2};\;\; f'(z) = 0 \;\Rightarrow\; z^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow z = \pm 1$$

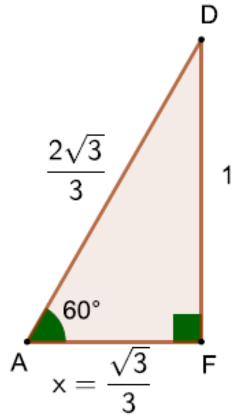
$$f''(z) = \frac{2z^3 - 2z(z^2-1)}{z^4} = \frac{2}{z^3} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(1) = 2 > 0 \;\Rightarrow\; z = 1 \text{ aporta mínimo} \\ f''(-1) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; z = -1 \text{ aporta máximo} \end{cases}$$

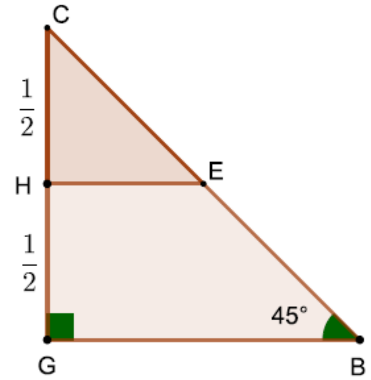
Febrero 23-24: Sea ABCD un trapecio con DC // AB, DC = 1 = distancia entre DC y AB, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$. Sea E el punto medio de CB. Calcular perímetro y área del triángulo ΔAED



Nivel: Preparación OME.

Solución: Sea F la proyección ortogonal de D sobre AB. Entonces ΔAFD es un triángulo





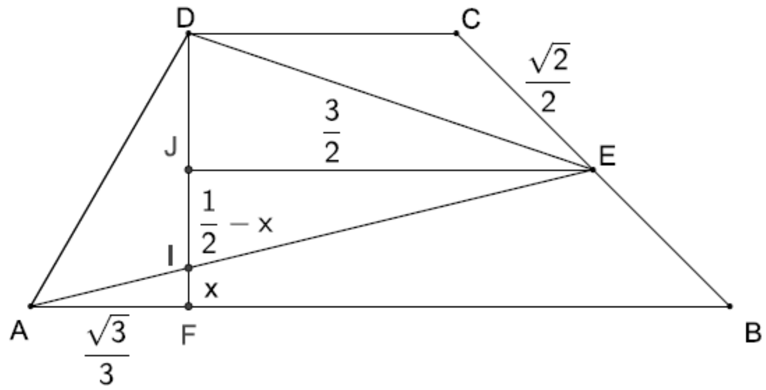
30°-60°-90°. Por tanto, si x = AF, 2x = AD y al aplicar Pitágoras:

$$4x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Consideremos ΔCGB, donde G es la proyección ortogonal de C sobre AB. Se trata de un triángulo 45°-45°-90°. Por lo tanto, GB = CG = 1 y CB = $\sqrt{2}$.

Si H es la proyección ortogonal de E sobre CG, queda formado el triángulo ΔCHE, que (al ser E el punto medio de CB) es semejante al ΔCGB con razón de semejanza ½. Por lo tanto, HC = HE = ½.

Consideremos la paralela a AB que pasa por E. Quedan generados los triángulos ΔAIF y ΔEIJ que son semejantes (los dos son rectángulos y tiene igual el ángulo en I por ser opuestos por el vértice)



$$\frac{\frac{1}{2} - x}{x} = \frac{3/2}{\sqrt{3}/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1 - 2x = 3\sqrt{3}x \Rightarrow x = \frac{1}{2 + 3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 2}{23} \Rightarrow 1 - x = \frac{25 - 3\sqrt{3}}{23}$$

Por último:

$$A_{\Delta ADE} = A_{\Delta DIE} + A_{\Delta DAI} = A_{\Delta DIE} + (A_{\Delta AFD} - A_{\Delta AIF})$$

$$A_{\Delta DIE} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1-x}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\left(25 - 3\sqrt{3}\right)}{92}$$

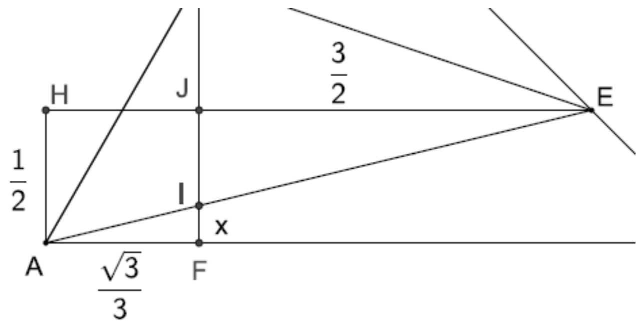
$$A_{\Delta AFD} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$A_{\Delta AIF} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} - 2}{23} = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{138}$$

$$A_{\Delta ADE} = \frac{3\left(25 - 3\sqrt{3}\right)}{92} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{9 - 2\sqrt{3}}{138} = \frac{9 + \sqrt{3}}{12}$$

Para el perímetro:

$$DA = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \qquad DE = \left\{\begin{matrix} \text{Pitágoras en } \Delta DJE \\ DJ = \frac{1}{2}, \qquad JE = \frac{3}{2} \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

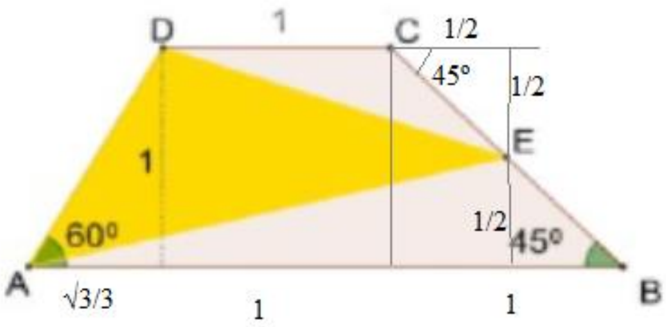


$$AE = \sqrt{HE^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17\sqrt{6} + 18\sqrt{2}}}{6}$$

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{17\sqrt{6} + 18\sqrt{2}}}{6} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{10} + \sqrt{\sqrt{2} \cdot \left(17\sqrt{3} + 18\right)}}{6}$$

<u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA DE Alef Subcero (@alefsubcero)</u>

Más corta y sencilla para calcular el área



$$\text{Área (ADE)} = \text{Área (ABCD)} - \text{Área (CDE)} - \text{Área (ABE)} =$$

$$= \frac{1+\frac{6+\sqrt{3}}{3}}{2} - \frac{1}{4} - \frac{6+\sqrt{3}}{12} = \frac{9+\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Perimetro (ABCD)} = AD + DE + EA =$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} + \sqrt{\left(\frac{9+2\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{1}{4}} = \ldots$$

<u>Febrero 25:</u> ¿Qué valores de n (entero) hacen que

$$\frac{n^4 - 2n^2 + 2n - 6}{n^3 - 2n + 2}$$

sea entero?

<u>Nivel:</u> Preparación OME.

<u>Solución:</u> Tenemos:

$$\frac{n^4 - 2n^2 + 2n - 6}{n^3 - 2n + 2} = n - \frac{6}{n^3 - 2n + 2} \ (*)$$

La fracción propuesta es un entero sii la fracción que aparece en el segundo miembro de (*) es un entero y esto ocurre sii $n^3 - 2n + 2$ es un divisor de 6 es decir sii $n^3 - 2n + 2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Tendremos:

$$n^3 - 2n + 2 = 1 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 1 = 0. \text{ Por Ruffini la única solución entera es } n = 1$$

$$n^3 - 2n + 2 = -1 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 3 = 0. \text{ Por Ruffini no tiene soluciones enteras}$$

$$n^3 - 2n + 2 = 2 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n = 0 \ \Rightarrow \ n = 0, \quad n = \pm\sqrt{2}$$

$$n^3 - 2n + 2 = -2 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 4 = 0. \text{ Por Ruffini la única solución entera es } n = -2$$

$$n^3 - 2n + 2 = 3 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n - 1 = 0. \text{ Por Ruffini la única solución entera es } n = -1$$

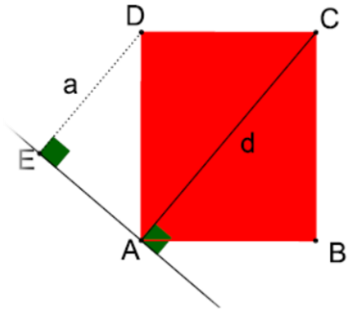
$$n^3 - 2n + 2 = -3 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 5 = 0. \text{ Por Ruffini sin soluciones enteras}$$

$$n^3 - 2n + 2 = 6 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n - 4 = 0. \text{ Por Ruffini la única solución entera es } n = 2$$

$$n^3 - 2n + 2 = -6 \quad \Rightarrow \quad n^3 - 2n + 8 = 0.\text{ Por Ruffini sin soluciones enteras}$$

Luego la fracción propuesta es un entero sii n = 0, n = ±1 o n = ±2

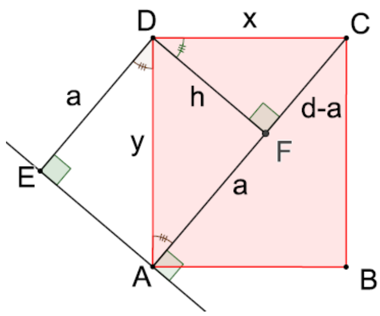
Febrero 26-27: De un rectángulo ABCD se conoce su diagonal d y la distancia a. Hallar su área y perímetro



Nivel: Preparación OME.

Solución: Empezamos por calcular el área de ABCD. Para ello trazamos el segmento DF paralelo a EA por D. Tendremos:

a. $A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\Delta ADC} = 2 \cdot (A_{\Delta AFD} + A_{\Delta DFC})$



b. $\Delta EDA = \Delta DAF$ pues son semejantes (son rectángulos y $\angle EDA = \angle DAF$ por alternos internos) y tienen en común la hipotenusa AD ⇒ AF = a y FC = d – a.

c. $\Delta AED \cong \Delta DFC$ (pues los dos son rectángulos y $\angle DAF = \angle FDC$ por tener los lados perpendiculares). De aquí:

$$\frac{h}{d-a} = \frac{a}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{a \cdot (d-a)}$$

Ahora del apartado a

$$A_{ABCD} = 2 \cdot (A_{\Delta AFD} + A_{\Delta DFC}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}h(d-a)\right) = ah + h(d-a) = hd$$
$$= d \cdot \sqrt{a(d-a)}$$

Para el perímetro, aplicamos Pitágoras a los triángulos ΔADF y ΔDFC:

$$y = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{a(d-a) + a^2} = \sqrt{ad};\ \ x = \sqrt{h^2 + (d-a)^2} = \sqrt{a(d-a) + (d-a)^2}$$
$$= \sqrt{d \cdot (d-a)}$$

Y, por último:

$$P = 2(x+y) = 2\left(\sqrt{ad} + \sqrt{d(d-a)}\right)$$

Febrero 28: 1.- ¿Qué naturales dan resto 17 al dividir a 2018? 2.- ¿Qué naturales dan resto 18 al dividir a 2018?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Para el apartado 1 buscamos los n tales que 2018 = nq + 17 ⇒ 2001 = nq. Es decir, buscamos los divisores de 2001 mayores que 17. Recordemos que: si $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ con $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ primos y exponentes naturales, es la descomposición factorial de N en producto de primos, el número de divisores de N es

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$$

Como 2001 = 3·23·29, tenemos que 2001 tiene ((1 + 1)·(1 + 1)·(1 + 1) =) 8 divisores de los cuales sólo el 1 y el 3 son menores que 17. Los naturales buscados son:

23; 29; (3·23 =) 69; (3·29 =) 87; (23·29 =) 667; (3·23·29 =) 2001.

Para el apartado 2, tenemos que buscamos los divisores de (2018 – 18 =)2000 mayores que 18. Como 2000 = $2^4 \cdot 5^3$ hay ((4 + 1)·(3 + 1) =) 20 divisores. De ellos 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 5 y (2·5 =) 10 son menores o iguales que 18. Luego los naturales solicitados son los (20 – 7 =) 13 siguientes:

5^2; 5^3; $2\cdot5^2$; $2\cdot5^3$; $2^2\cdot5$; $2^2\cdot5^2$; $2^2\cdot5^3$; $2^3\cdot5$; $2^3\cdot5^2$; $2^3\cdot5^3$; $2^4\cdot5$; $2^4\cdot5^2$; $2^4\cdot5^3$ (20; 25; 40; 50; 80; 100; 125; 200; 250; 400; 500; 1000; 2000).