SOLUCIONES JUNIO 2018

Soluciones extraídas del libro:

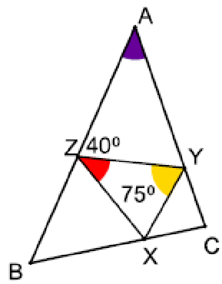
XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA 2014

Obtenibles en http://www.concursoprimavera.es#libros

NIVEL: Bachillerato y preparación OME

AUTORES: Colectivo "Concurso de Primavera". Comunidad de Madrid

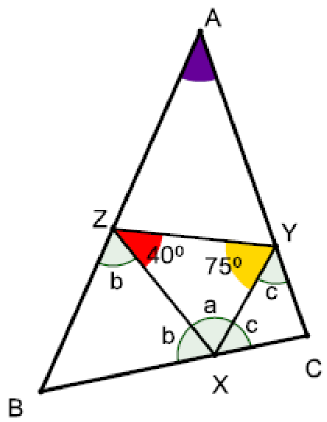
Junio 1: En el ΔABC, AY=AZ, BX=BZ, CX=CY, ∠XZY =40°, ∠XYZ=75° ¿Cuánto mide ∠BAC?



Solución 1: Teniendo en mente que la suma de ángulos internos de un triángulo es 180°, tenemos en la figura de abajo:

ΔXYZ ⇒ a = 180° – (40° + 75°) = 65°

a + b + c = 180° ⇒ b + c = 180° - 65° = 115°

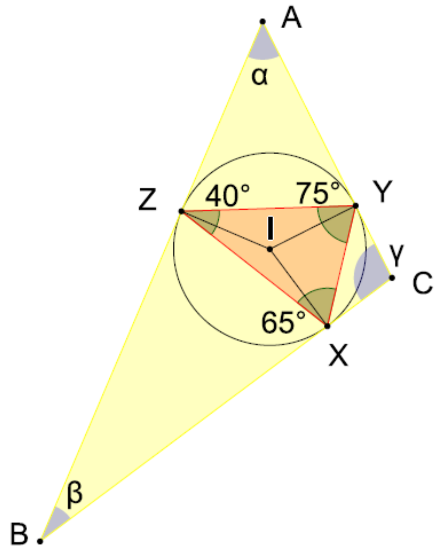


ΔABC ⇒ ∠A + ∠B + ∠C = 180° ⇒ ∠A + 180° - 2b + 180° - 2c = 180° ⇒ ∠A + 180° = 2 (b + c) ⇒ ∠A = 2·115° - 180° = 50°.

Solución de Ignacio Larrosa (@ilarrosac): Tendremos:

∠YXZ = 180° - (40° + 75°) = 65°

Como AY=AZ, BX=BZ, CX=CY las mediatrices del triángulo ΔXYZ coinciden con las bisectrices del triángulo ΔABC y por tanto la circunferencia circunscrita al ΔXYZ coincide con la circunferencia inscrita en el triángulo ΔABC con cent ro en I. Puesto que el ángulo central es doble que el ángulo inscrito tenemos:



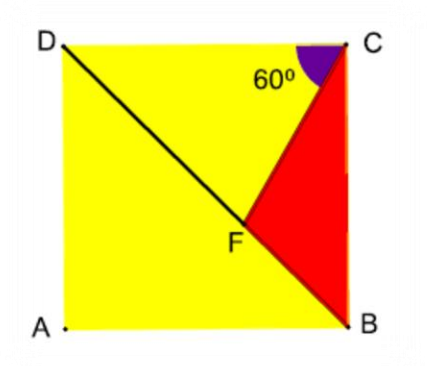
∠XYZ = 2·∠YXZ = 2·65° = 130°.

Además, puesto que la tangente es perpendicular al radio en la circunferencia: ∠IZA = ∠IYA = 90°.

Por lo tanto, en el cuadrilátero ZIYA:

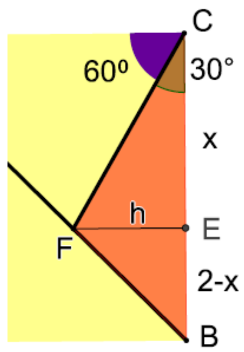
∠A = α = 360° - (∠YIZ + ∠IZA + ∠IYA) = 360° - (∠YIZ + 90° + 90°) = 180° - 2·65° = 50°.

De idéntica manera: β = 180° - 2·75° = 30° y γ = 180° -2·40° = 100°



Junio 2-3: En el cuadrado ABCD se considera el punto F definido como la intersección de la diagonal BC con la recta que forma 60° con el lado DC. Hallar el área del triángulo ΔFCB

Solución: Trazamos por F una paralela a AB, consiguiendo el segmento FE que es la altura del triángulo de interés.



Al ser ΔFCE un triángulo 30°-60°-90°, tenemos x = $\sqrt{3}$·h.

Por otra parte ΔFEB es un triángulo 45°-45°-90°, y de aquí que h = 2 – x.

Del sistema que forman las dos últimas expresiones obtenemos:

$$\mathrm{h} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

Y, por último:

$$\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{FEB}} = \frac{2\cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$$

Junio 4: Calcular N sabiendo que N es el menor entero positivo que al dividirlo entre 5 da resto 2, al dividirlo por 7 da resto 3 y al dividirlo por 9 da resto 4.

Solución: Del enunciado tenemos que debe cumplirse es sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{N} = 2(5)\\ \mathrm{N} = 3(7)\\ \mathrm{N} = 4(9)\end{array}\right\}$$

Para resolverlo, buscaremos soluciones al sistema que forman las dos primeras expresiones y veremos cuál de ellas es la primera en cumplir la tercera expresión

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{N} = 5\mathrm{p}+2\\ \mathrm{N} = 7\mathrm{q}+3\end{array}\right\} \Rightarrow\ 5\mathrm{p}+2 = 7\mathrm{q}+3 = (5+2)\mathrm{q}+3\ \Rightarrow\ 5\cdot(\mathrm{p}-\mathrm{q}) = 2\mathrm{q}+1\ \Rightarrow\ 5\mathrm{k} = 2\mathrm{q}+1$$

Como 5k termina en 0 o 5, 2q debe terminar en 9 o en 4. Como 2q es par no puede terminar en 9. Luego 2q termina en 4, luego q termina en 2 o 7. Es decir q puede ser 2, 7, 12, 17, 22, 27,...

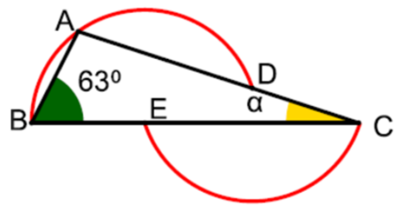
q	2q+1	k=$\frac{2q+1}{5}$	P = k + q	N = 5p + 2 = 7q + 3	resto módulo 9
2	5	1	3	17	17=8(9)
7	15	3	10	52	52=7(9)
12	25	5	17	87	87=6(9)

17	35	7	24	122	122=5(9)
22	45	9	31	157	**157=4(9)**

La solución es el número 157

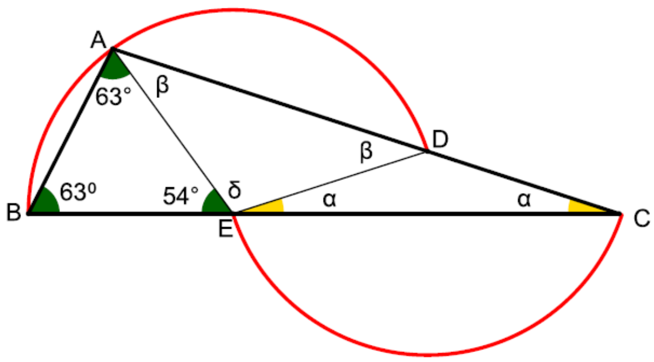
Mucho de los cálculos de la tabla pueden evitarse al darnos cuenta de que todas las columnas son PA. La primera y segunda de diferencia 5, la tercera de diferencia 2, la cuarta de diferencia 7, la quinta de diferencia 32 y la sexta de diferencia 1 (los restos)

<u>Junio 5-6:</u> En la figura adjunta se observa un triángulo ΔABC y dos arcos de circunferencia: uno de centro E que pasa por A, B y D y otro de centro D que pasa por E y C. Si el ángulo $\angle EBA = 63°$, ¿cuál es el valor del ángulo α?



<u>Solución:</u> Los triángulos de la figura son isósceles y se cumple:

$$\left.\begin{array}{r} (1)\quad \delta + 2\beta = 180° \\ (2)\ \ \beta = 2\alpha \\ (3)\ \alpha + 54° + \delta = 180° \end{array}\right\}$$



De (3): $\delta = 126° - \alpha$

Y sustituyendo en (1), teniendo en cuenta (2):

$$126° - \alpha + 4\alpha = 180°$$

Que lleva a $\alpha = 18°$

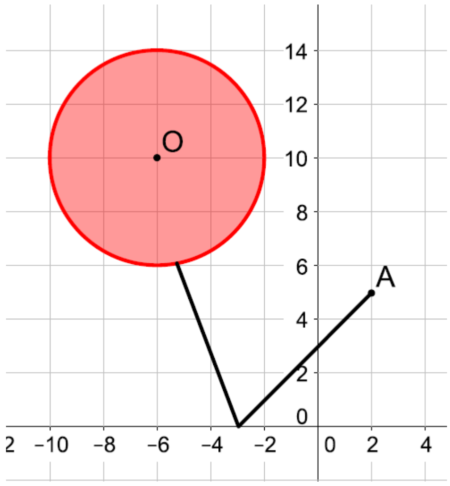
<u>Junio 7:</u> Sea n un natural mayor que 2018. Si n^2+4 y $n+3$ no son primos entre sí, ¿cuál es su máximo común divisor?

<u>Solución:</u> Tenemos:

$$n^2 + 4 = (n+3) \cdot (n-3) + 13$$

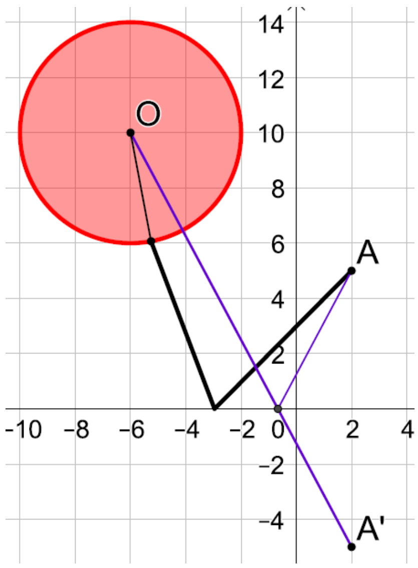
Por el algoritmo de Euclides, el mcd $(n^2 + 4; n + 3)$ divide al resto de dicha división, y como $n^2 + 4$ y $n + 3$ no son primos entre sí su máximo común divisor no es 1, luego debe ser 13.

Junio 8-9: Hallar la longitud más corta de la poligonal que une el punto A (2, 5), pasa por el eje X y corta a la circunferencia $(x + 6)^2 + (y – 10)^2 = 16$



Solución: Sea O (- 6; 10) las coordenadas del centro de la circunferencia. Si A’ (2; - 5) es el simétrico de A respecto del eje X, la longitud más corta que une O, con el eje X y el punto A es el segmento que une O y A’, cuya longitud es:

$$d(O; A') = \sqrt{(2+6)^2 + (-5-10)^2} = 17$$



Por último (por la desigualdad triangular) la distancia más corta entre cualquier punto de la circunferencia y A’ es la del segmento que pasa por el centro de la circunferencia, luego a la distancia anterior le hemos de quitar la del radio de la circunferencia. Por lo tanto, la longitud más corta de la poligonal que une el punto A (2, 5), pasa por el eje X y corta a la circunferencia $(x + 6)^2 + (y – 10)^2 = 16$ Es (17 – 4 =) 13

Junio 10: Hallar los valores de m para los que las rectas y = x – 2 y y = mx + 3 se cortan en un punto de coordenadas positivas

Solución: Obviamente $m \neq 1$, pues en caso contrario las rectas son paralelas y no se cortan (por tener distinta ordenada en el origen). Hallamos el punto de corte de las rectas resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de las rectas:

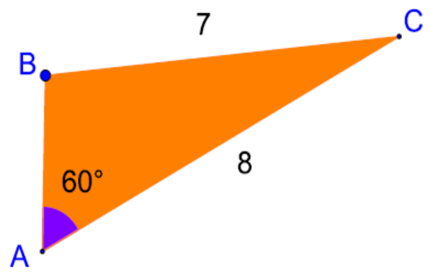
$$\left.\begin{matrix} y = x - 2 \\ y = mx + 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ x - 2 = mx + 3 \ \Rightarrow \ x = \frac{5}{1-m} \quad y = \frac{2m+3}{1-m}$$

Como las coordenadas han de ser positivas:

$$\frac{5}{1-m} > 0 \ \Leftrightarrow \ m < 1$$
$$\frac{2m+3}{1-m} > 0 \ \Leftrightarrow \ m > -\frac{3}{2}$$

Por tanto, debe cumplirse $m \in \,]-1,5;\, 1[$

<u>Junio 11:</u> De un triángulo ΔABC, obtuso en B se sabe que a = 7, b = 8 y ∠BAC = 60°. Hallar su área



<u>Solución:</u> Aplicando el teorema de los cosenos:

$$7^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot c \cdot \cos(60)$$

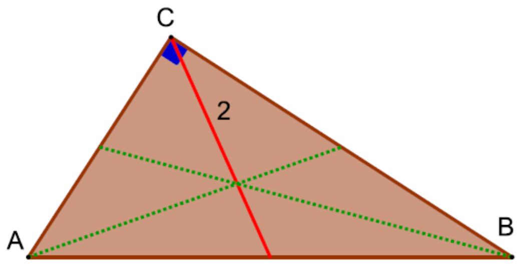
$$c^2 - 8c + 15 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} c = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Como el triángulo es obtusángulo: $b^2 > a^2 + c^2$ y ello conlleva que sólo sea admisible c = 3. Por último, utilizando la fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \left\{ s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+7+8}{2} = 9 \right\}$$

$$= \sqrt{9 \cdot (9-3) \cdot (9-7) \cdot (9-8)} = 6\sqrt{3}$$

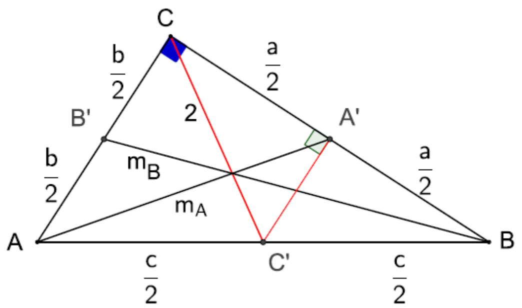
<u>Junio 12:</u> En un triángulo rectángulo ΔABC la mediana sobre la hipotenusa mide 2. Hallar la suma de los cuadrados de las otras medianas.



<u>Solución:</u> Aplicamos Pitágoras al ΔCC'A'

$$2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 16 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

Aplicamos Pitágoras al ΔCAA'



$$m_A{}^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Aplicamos Pitágoras al ΔCBB'

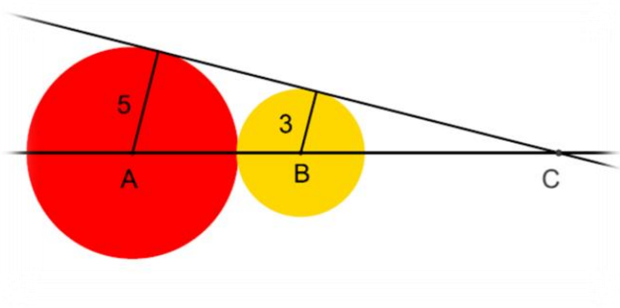
$$m_B{}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (3)$$

Sumando (2) y (3)

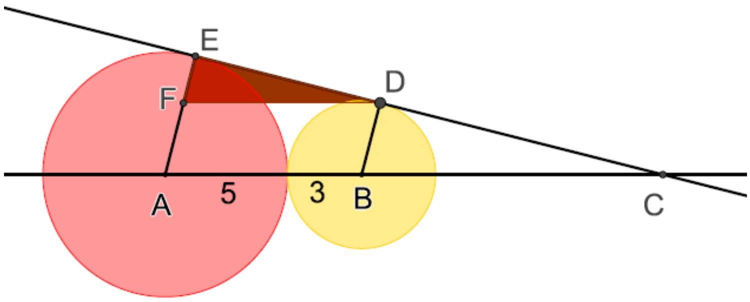
$$m_A{}^2 + m_B{}^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$$

teniendo en cuenta la ecuación (1)

<u>Junio 13-14:</u> Los radios de dos circunferencias tangentes exteriores son 5 y 3. Una recta tangente exterior a ambas circunferencias corta a la recta AB en C. ¿Cuánto mide el segmento BC?



Solución: Trazamos FD, paralela a AC. Queda formado el triángulo ΔEFD que es rectángulo en E



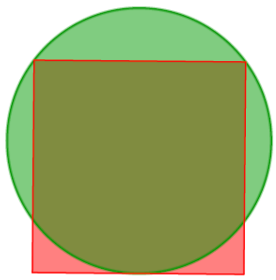
El triángulo ΔEFD es semejante al triángulo ΔEAC pues están en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{EF}{EA} = \frac{FD}{AC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = 20 \Rightarrow BC = AC - AB = 20 - 8 = 12$$

Junio 15: Tengo 6 pares de calcetines de diferentes colores, todos revueltos en un cajón. ¿Cuántos calcetines debo de sacar, como mínimo, para asegurar el sacar dos del mismo color?

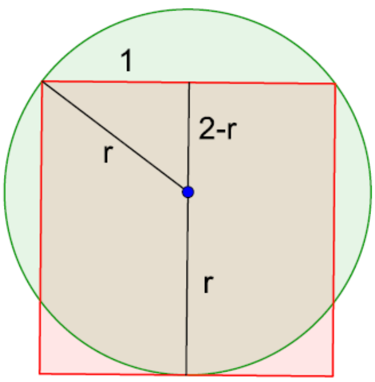
Solución: Si sacamos seis podemos ser tan desafortunados de extraer uno de cada color. El siguiente que saquemos ya será de alguno de los colores que ya tenemos. Luego hemos de sacar siete calcetines para asegurar que hay dos del mismo color.

Junio 16: Una circunferencia pasa por dos vértices contiguos de un cuadrado de lado 2 y es tangente al lado opuesto. Hallar su radio



Solución: Si r es el radio de la circunferencia, tenemos (ver figura a la derecha) aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 1^2 + (2 - r)^2 \Rightarrow r = \frac{5}{4}$$



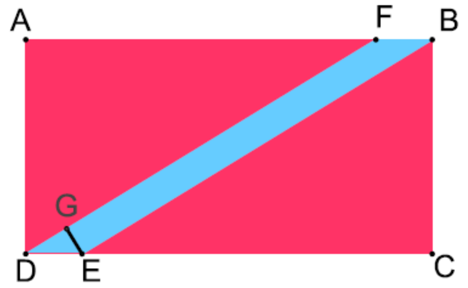
Junio 17: En la primera fase de un examen, la media de las puntuaciones fue de 76 sobre 100. La nota media de los estudiantes que se clasificaron para la segunda fase fue 83 y la media de los no clasificados fue 55. ¿Qué % se clasificó para la segunda fase?

Solución: Si hay un total de n personas, la suma de todas las puntuaciones es 76n. Supongamos que se clasifican c de ellos. La puntuación total de ellos es 83c y la puntuación total de los no clasificados es 55·(n – c). Con esto:

$$76\mathrm{n} = 83\mathrm{c} + 55(\mathrm{n} - \mathrm{c}) \quad \Rightarrow \quad 21\mathrm{n} = 28\mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}} = \frac{21}{28} = 0{,}75$$

Luego se clasificaron el 75% de los iniciales

Junio 18-19: En el rectángulo de la figura, de dimensiones 12 y 6, DF//BE y EG⊥DF. Si el área del paralelogramo DEBF es 12, hallar la longitud EG



Solución: Si tomamos DE como base del cuadrilátero DEBF tendremos que, su altura es 6 y al ser 12 su área, debe ser DE = 2. De donde:

EC = 12 – 2 = 10

Y al aplicar Pitágoras al triángulo ΔECB (rectángulo en C) conseguimos:

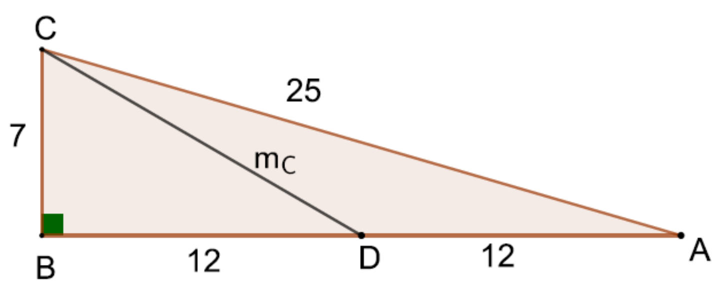
$$\mathrm{EB} = \sqrt{\mathrm{EC}^2 + \mathrm{CB}^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}$$

Por último, los triángulos ΔDEG y ΔEBC son semejantes pues ambos son rectángulos (en G y en C y ∠GDE = ∠BEC). Por tanto:

$$\frac{\mathrm{EG}}{2} = \frac{6}{2\sqrt{34}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{EG} = \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

Junio 20: En un triángulo ΔABC se tiene c=24, a=7, b=25. ¿Cuál es la longitud de la mediana por C?

Solución: Puesto que $25^2 = 24^2 + 5^2$ se tiene que ΔABC es rectángulo en B



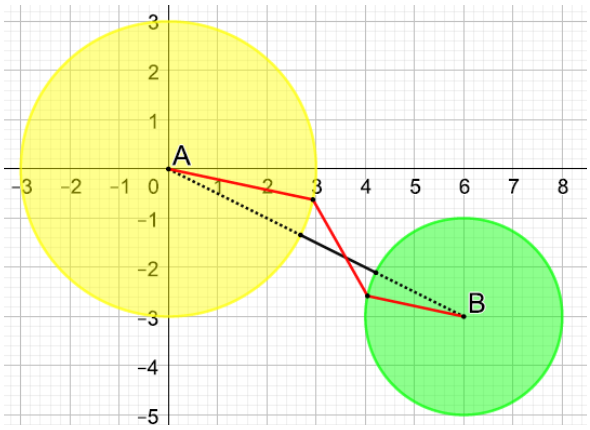
Ahora al aplicar Pitágoras al triángulo ΔBCD:

$$\mathrm{m_C} = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193}$$

Junio 21: ¿Cuál es la distancia más corta entre los puntos de las dos circunferencias:

$x^2 + y^2 = 9$

$(x – 6)^2 + (y + 3)^2 = 4$?

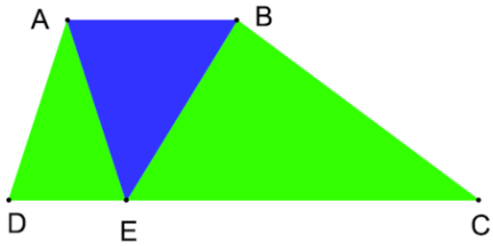


Solución: Se trata de una circunferencia de centro A(0; 0) y radio 3 y una circunferencia de centro B(6; - 3) y radio 2

Por la desigualdad triangular le menor distancia corresponde al segmento que une los centros de las circunferencias. Es decir, la menor distancia entre las circunferencias es:

$$\sqrt{(0-6)^2+\left(0-(-3)\right)^2}-3-2=3\sqrt{5}-5$$

Junio 22-23: El área del trapecio ABCD es 18, AB = 4 y DE = $\frac{1}{4}$ DC. Si la altura del trapecio es un entero y el lado DC es un entero impar, calcular el área del triángulo ∆ABE



Solución: La posición del punto E no va a Influir en nada (siempre y cuando E esté en el segmento DC), ya que todos los triángulos ∆ABE tienen la misma base: AB y la misma altura: la distancia entre los segmentos AB y DC. Sea h la altura del trapecio y 2k + 1 la base DC. Entonces:

$$18=\frac{2k+1+4}{2}\cdot h=\frac{2k+5}{2}\cdot h\quad\Rightarrow\quad 36=(2k+5)h=3^2\cdot 2^2$$

De esta última ecuación sólo nos interesa la incógnita h. Puesto que 2k + 5 > 3 la ecuación lleva a los siguientes sistemas

$$\left.\begin{array}{c}2k+5=3\\ h=3\cdot 4\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c}2k+5=2\cdot 2\\ h=3\cdot 3\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c}2k+5=3\cdot 3\\ h=2\cdot 2\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c}2k+5=2\cdot 2\cdot 3\\ h=3\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c}2k+5=3^2\cdot 2^2\\ h=1\end{array}\right\}$$

El único con soluciones admisibles es el tercero (h = 4, k = 2).

Por lo tanto, en el triángulo ∆ABE, la base mide 4 y la altura 4; por lo que su área es 8

Junio 24: Si $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$, hallar el valor de $\sin^3 x+\cos^3 x$

Solución: Tenemos:

$$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)\cdot(\cos^2x+\sin^2x-\sin x\cdot\cos x)=\frac{1}{2}\cdot(1-\sin x\cdot\cos x)\ (*)$$

Por otra parte:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \begin{cases} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ = \sin^2 x + 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x = 1 + 2\cos x \cdot \sin x \end{cases}$$

De donde:

$$\sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{8}$$

Sustituyendo en (*)

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16}$$

Junio 25: Simplificar: $A = \sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$

Solución: El primer radicando es menor que el segundo radicando, por tanto, la expresión es negativa.

Elevando al cuadrado la expresión tendremos:

$$A^2 = \left(\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}\right)^2 = 10 - 4\sqrt{6} + 10 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{\left(10 - 4\sqrt{6}\right) \cdot \left(10 + 4\sqrt{6}\right)}$$

$$= 20 - 2\sqrt{100 - 16 \cdot 6} = 20 - 2 \cdot 2 = 16$$

Luego A = - 4

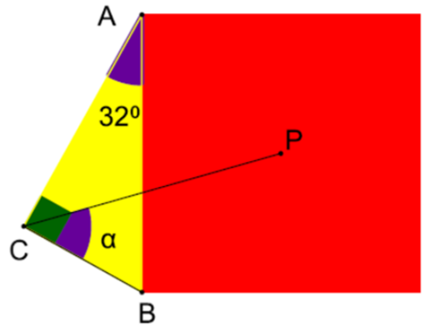
Junio 26: Se sabe que las raíces de $x^2 - 85x + c = 0$ son números primos. Hallar c.

Solución: Recordemos que si x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

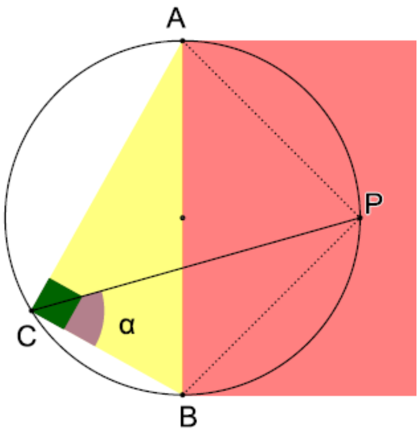
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Con ello, buscamos dos números primos cuya suma es 85, que es un número impar y por tanto suma de un par y un impar. Como solo hay un número primo par, el 2, uno de los números primos buscados es el 2. Necesariamente el otro número primo es (85 – 2 =) 83. Por lo que c debe ser (2·83 =) 166.

Junio 27-28: En la figura se observa un triángulo ΔABC, rectángulo en C, con ∠A = 32°, que comparte la hipotenusa AB con un cuadrado de centro P. Hallar el ángulo ∠PCB = α



Solución: El cuadrilátero ACBP se puede inscribir en una circunferencia de diámetro AB ya que AB es la hipotenusa de los triángulos rectángulos ΔABC y ΔABP. Los ángulos ∠PCB = α y ∠PABson iguales, pues ambos son inscritos y abarcan el mismo arco (el que une los puntos P y B). Luego:



α = ∠PCB = ∠PAB = 45°

Junio 29: ¿Cuál es el mayor entero n para el que $\frac{n^2-38}{n+1}$ es entero?

Solución: Se tiene que:

$$\frac{n^2-38}{n+1} = n - 1 - \frac{37}{n+1} \quad (*)$$

De donde, para n entero, la fracción es un entero sii n + 1 es un divisor de 37. Como esta fracción lleva delante el signo menos la fracción del enunciado es mayor cuanto más pequeña es la fracción del segundo miembro de (*). Esto es cuando n + 1 = 37. Es decir, cuando n = 36

Junio 30: Hallar los puntos comunes de las gráficas y = |x| e y = $|x^2 - 4|$

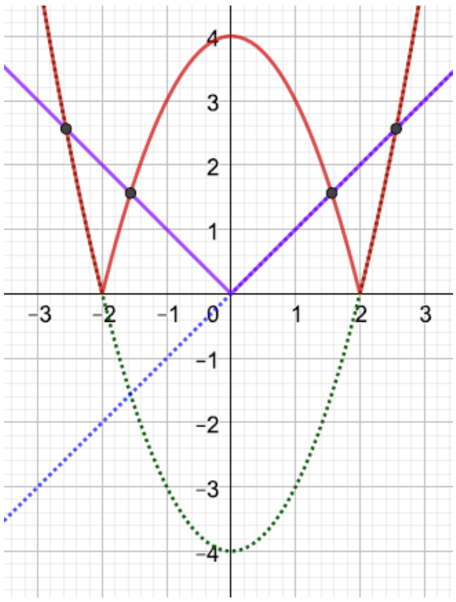
Solución: Trazando las gráficas de las funciones observamos que hay que distinguir cuatro casos:

x < - 2   -2 < x <0   0 < x < 2   x > 2

Para x < -2, tenemos:

$$\left.\begin{matrix} y = -x \\ y = x^2 - 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \qquad y_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

Para - 2 < x < 0, tenemos:



$$\left.\begin{array}{r} y = -x \\ y = -x^2 + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x = -x^2 + 4 \ \Rightarrow \ x^2 - x - 4 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = -\frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

Para los demás casos, podemos proceder como con los anteriores o debido a que las funciones son simétricas respecto al eje Y, calcular los simétricos de los puntos de corte hallados. Procediendo de esta última manera:

$$x_3 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \qquad ; \qquad x_4 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \qquad y_4 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$