

## SOLUCIONS SETEMBRE 2017

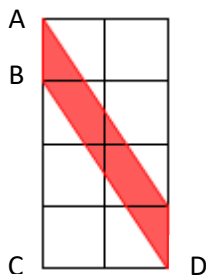
Solucions extretes del llibre:

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA 2014

Disponible en <http://www.concursoprimavera.es#libros>

NIVELL: Primer cicle de l'ESO

AUTORES: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid.



**Setembre 1-2:** En la quadrícula adjunta cada quadrat és de costat 1. Calcula l'àrea del paral·lelogram de color roig

**Solució:**

$$\text{Àrea} = \text{base} \cdot \text{alçada} = AB \cdot CD = 1 \cdot 2 = 2$$

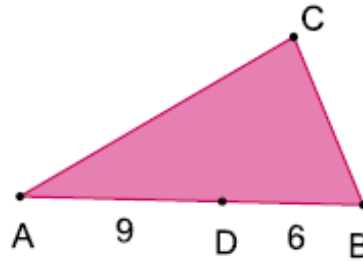
**Setembre 3:** Quants nombres de dues xifres tenen una xifra parell i l'altra imparell?

**Solució:** Si la primera xifra es parell, la podem elegir de quatre maneres (2, 4, 6, i 8) i la segona de cinc (1, 3, 5, 7 i 9). En total tenim  $(4 \cdot 5 =)$  20 nombres. Si la primera xifra es imparell, la podem elegir de cinc maneres (1, 3, 5, 7 i 9) i la segona de cinc (0, 2, 4, 6 i 8). En total tenim  $(5 \cdot 5 =)$  25 nombres. En conseqüència, hi ha  $(20 + 25 =)$  45 nombres que compleixen les condicions imposades

**Setembre 4-5:** Laia i Aitana son germanes de les quals una sempre diu la veritat i l'altra sempre menteix. Un dia, en la nevera, hi ha cinc pastissos. Elles els trauen i comencen a menjar-se'l. Son pare les sorprèn i les pregunta quants pastissos s'han menjat. Una contesta que quatre i l'altra contesta que un nombre parell. Quants pastissos s'han menjat entre les dues?

**Solució:** Degut a que una sempre menteix i l'altra sempre diu la veritat, està clar que la frase "ens hem menjat quatre" es falsa. Per tant, busquem un parell entre 1 i 5 que no siga quatre. L'única possibilitat és 2.

**Setembre 6:** L'àrea del triangle  $\triangle ABC$  és 30  $\text{cm}^2$ . Si D està en AB, dista 9 cm d'A i 6 cm de B, calcular l'àrea del triangle  $\triangle ADC$ .



**Solució:** Tenim:

$$30 = A_{\triangle ABC} = \frac{(9 + 6)h_C}{2} \Rightarrow h_C = 4 \Rightarrow A_{\triangle ADC} = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

També, degut a que tots dos triangles tenen la mateixa alçada, les seues àrees i bases són proporcionals. D'aquí:

$$\left. \begin{array}{l} \text{àrea} \quad - \quad \text{base} \\ 30 \quad - \quad - \quad 15 \\ x \quad - \quad - \quad 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 9}{15} = 18$$

**Setembre 7:** Laia va sumar tres costats d'un rectangle i va obtenir 44. Aitana va fer el mateix obtenint 40. Si les dues no es van equivocar, quin és el perímetre del rectangle?

**Solució:** Si les dimensions del rectangle són x i y tenim:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 44 \\ x + 3y = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow (\text{sumant}) 4(x + y) = 84 \Rightarrow \text{Perímetre} = 2(x + y) = 42$$

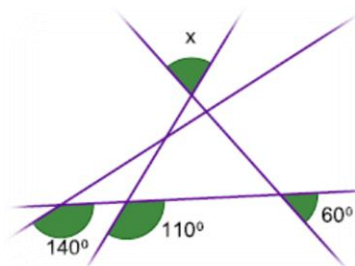
**Setembre 8:** Quin és el menor nombre natural que multiplicat per **35613,475** dona com resultat un natural?

**Solució:** Com

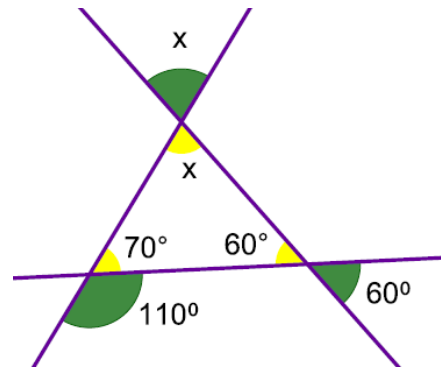
$$35613,475 \cdot n = \frac{35613475}{1000} \cdot n = \frac{1424539}{40} \cdot n$$

(sent l'última fracció irreductible), tenim que la contestació es 40.

**Setembre 9:** Quant mesura l'angle x?



**Solució:** Menyspreant la recta que origina l'angle de  $140^\circ$  tenim els angles en groc i recordant que la suma dels angles d'un triangle es  $180^\circ$  tenim que la contestació és  $x = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$



**Setembre 10:** Els naturals A, B i C son diferents y podem escollir-los des de l'1 fins al 100, ambdós inclosos. Trobeu el major valor possible de

$$\frac{A + B + C}{A - B - C}$$

**Solució:** Ens convé que el denominador siga 1 i que el numerador siga el més gran possible. Si  $A = 100$  y  $B + C = 99$  es compleixen les dues cosses i el resultat és 199. Como tal vegada creguis que podria haver-hi una solució millor, per acabar-hi de convèncer s'observa que si anomenes  $D = B + C$ , l'expressió s'escriu com  $\frac{A+D}{A-D}$  on A varia entre l'1 i 100 i D entre 3 i 199. Si D es major que A el número serà negatiu, així que convé agafar-lo entre 3 i 100 i ara està clar que el millor es agafar  $A = 100$  i  $D = 99$

**Setembre 11:** Aitana li diu a Laia: "La meitat del triple de la meua edat és justament el doble de la tercera part de la teua edat". Quant val el quocient de l'edat de la major entre l'edat de la menor?

**Solució:** Si la primera té x anys i la segona té y anys podem escriure que:

$$\frac{1}{2}(3x) = 2\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{2}{3}y$$

La major és la que té y anys i el quocient sol·licitat és:

$$\frac{y}{x} = \frac{3/2}{2/3} = \frac{9}{4} = 2,25$$

**Setembre 12:** Al dividir un número entre 60 obtenim de residu 42. Quin és el residu al dividir el nombre per 20?

**Solució:** Tenim:

$$N = 60 \cdot k + 42 = 3 \cdot 20 \cdot k + 2 \cdot 20 + 2 = 20 \cdot (3 \cdot k + 2) + 2$$

Per tant, el residu de dividir N per 20 és 2.

**Setembre 13:** ¿Para quins valors del real x, la mitjana aritmètica i la mediana del conjunt

$$\{x, 6, 4, 1, 9\}$$

es el mateix nombre?

**Solució:** Para la mitjana tenim:

$$M = \text{mitjana aritmètica} = \frac{x + 6 + 4 + 1 + 9}{5} = 4 + \frac{x}{5}$$

Si  $x \leq 1 \Rightarrow Me = 4$ . Si  $M = Me \Rightarrow x = 0$

Si  $1 < x \leq 4 \Rightarrow Me = 4 \neq M$

Si  $4 < x \leq 6 \Rightarrow Me = x = M \Rightarrow x = 5$

Si  $6 < x \leq 9 \Rightarrow Me = 6 = M \Rightarrow x = 10$  que està en contradicció amb  $x \in ]6; 9]$

Si  $9 < x \Rightarrow Me = 6 < 0 < M \Rightarrow x = 10$ .

Per tant, per a  $x \in \{0, 5, 10\}$  es compleix que la mitjana aritmètica es igual a la mediana

**Setembre 14-15:** A la quadrícula adjunta s'ha escrit a cada fila i en cada columna els dígits 1, 2, 3, 4, i 5, sense repetir cap, ¿quina xifra ocuparà el lloc marcat amb x?

	5	4		
1	3			
		5	3	
2		3	1	
				x

**Solució:** A simple vista es té que a la fila 1 columna 1 només pot estar el 3. Un cop col·locada aquesta xifra, observem que tant en les quatre primeres files com en les quatre primeres columnes hi ha el 3, per tant, en x només pot haver un altre 3.

**Setembre 16:** En un examen van aprovar la mateixa quantitat de xics que de xiques, però de xics van aprovar els 2/3 dels que hi havia, mentre que de xiques van aprovar el 75% de les que hi havia. Quina proporció de persones van aprovar l'examen?

**Solució:** Anomenem x al nombre de xics i y al nombre de xiques. Els xics que aprovaren foren:  $2x/3$ . Les xiques que aprovaren foren:  $75y/100$ . D'acord amb l'enunciat:

$$\frac{2x}{3} = \frac{75y}{100} \Rightarrow y = \frac{8x}{9}$$

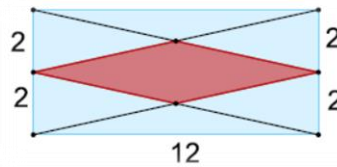
Per tant, la fracció proposada és:

$$\frac{\frac{2x}{3} + \frac{75y}{100}}{x + y} = \frac{\frac{4x}{3}}{\frac{17x}{9}} = \frac{12}{17}$$

**Septiembre 17:** Un cuadrado tiene 6 m de lado. Si disminuimos dos lados paralelos en 2 m cada uno, ¿cuántos metros hemos de aumentar cada uno de los otros lados para obtener un rectángulo de área 36 m<sup>2</sup>?

**Solución:** Sean  $(6 - 2 =)4$  y  $6 + x$  las dimensiones del nuevo rectángulo. Tendremos:  $4 \cdot (6 + x) = 36$ . De donde  $x = 3$ .

**Setembre 18-19:** En un rectangle de costats 4 cm i 12 cm hem format un rombe com indica la figura adjunta. Calcula l'àrea del rombe

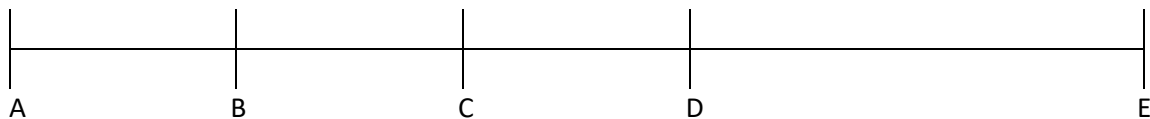


**Solució:** Retallant la figura per les línies marcades observem que es generen quatre rombes iguals al sol·licitat, per tant, l'àrea del rombe és:

$$\frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$$

**Setembre 20:** Els punts A, B, C, D i E estan col·locats en eixe ordre sobre una recta. Si AE = 20 cm, B es el punt mitja d'AC, C es el punt mitja de BD i D es el punt mitja de BE, quants cm mesura DE?

**Solució:** Fixem-nos en la figura:



Si B es el punt mitja d'AC i C es el punt mitja de BD, tenim que els segments AB, BC i CD mesuren el mateix, i si D es el punt mitja de BE, aleshores el segment DE mesura el mateix que el BD. Amb el que tenim que el segment AE divideix en cinc parts iguals de les que dues corresponen al segment DE. La longitud d'aquest últim és doncs:  $\frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ cm}$

**Setembre 21:** Per escriure les mesures dels tres angles d'un triangle hem utilitzat aquestes sis xifres: 7, 7, 7, 4, 5 i 6. Se sap que un angle és 20° més gran que un altre. Quant mesuren els angles del triangle?

**Solució:** Amb les xifres que tenim (7, 7, 7, 4, 5, 6) només hi ha dues formes d'aconseguir dos angles que difereixin en 20°.

Primera forma: 47° i 67°, de manera que el tercer angle ha de mesurar  $(180^\circ - 47^\circ - 67^\circ =) 66^\circ$ .

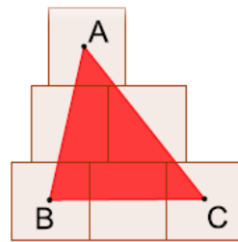
Però això últim contradiu l'enunciat

Segona forma:  $57^\circ$  i  $77^\circ$ , de manera que el tercer angle ha de mesurar  $(180^\circ - 57^\circ - 77^\circ =) 46^\circ$ .  
Com aquests angles si s'ajusten a l'enunciat són els angles del triangle.

**Setembre 22:** Quina és la diferència entre el major nombre de quatre xifres diferents, totes parells i el menor nombre de quatre xifres diferents, totes imparells?

**Solució:** El major nombre de quatre xifres parells totes diferents és 8642. El menor nombre de quatre xifres imparells totes diferents és 1357. La seua resta val  $(8642 - 1357 =) 7285$ .

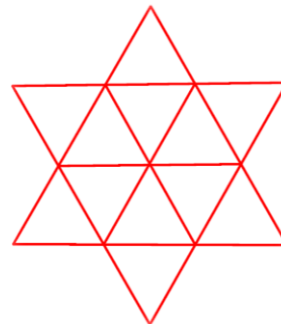
**Setembre 23-24:** En la il·lustració adjunta els quadrats tenen el mateix costat. El triangle  $\triangle ABC$  té els seus vèrtexs en els centres dels quadrats. Si la seua àrea és de  $24 \text{ cm}^2$ , quin és l'àrea d'un quadrat?



**Solució:** Siga  $c$  el costat d'un quadrat. La base del triangle és  $2c$  i la seua alçaria és també  $2c$ , amb el que:

$$24 = A_{\triangle ABC} = \frac{2c \cdot 2c}{2} \Rightarrow 12 = c^2$$

**Setembre 25:** Quants triangles hi ha en la figura?



**Solució:** Els triangles estaran formats per un o varis triangles (en roig). Triangles formats per un triangle hi ha 12. Triangles formats per quatre triangles hi ha 6 (tres amb el vèrtex cap a baix i altres tres amb el vèrtex cap a dalt). Triangles formats per 9 triangles hi ha dos (un amb el vèrtex cap a dalt i altre amb el vèrtex cap a baix). En total hi ha 20 triangles.

**Setembre 26:** Calcula el següent capicua al capicua **24942**

**Solució:** El següent capicua és 25052.

