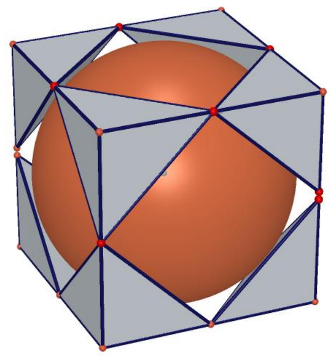
SOLUCIONES MAYO 2019

Problemas de Geometría (para utilizar programas de geometría: Cabri, Geogebra,...). Autor: Ricard Peiró i Estruch (IES "Abastos". València)

Mayo 1-2:



Un pisapapeles está hecho con un cubo de vidrio de lado 2 unidades truncado en ocho esquinas tetraédricas que se tocan en los puntos medios de las aristas del cubo. El resto del núcleo interior del cubo se descarta y es reemplazado por una esfera. Las ocho piezas de las esquinas que están ahora son tangentes a una esfera.

¿Cuál es el diámetro de la esfera?

Solución:
La diagonal del cubo es:

$$D=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}.$$

Hemos de calcular la altura h de la esquina tetraédrica sobre la base que es un triángulo equilátero. El volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}1^2\cdot 1=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 h.$$

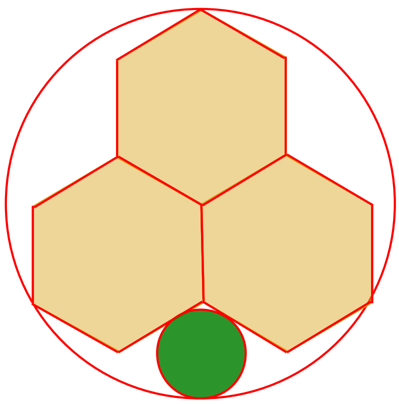
Resolviendo la ecuación:

$$h=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

El diámetro de la esfera es:

$$d=D-2h=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

Mayo 3-4:



En el interior de una circunferencia de radio R hay 3 hexágonos regulares iguales y una circunferencia tangente a la circunferencia de radio R y tangente al lado de dos hexágonos.

Determine el radio de la circunferencia sombreada

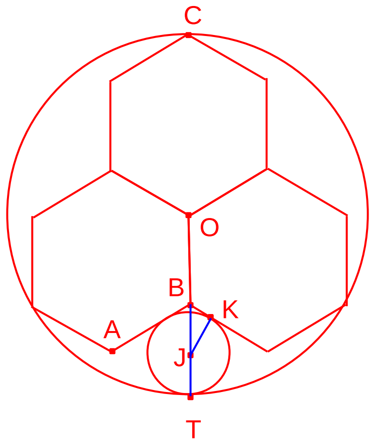
Solución: Sea T el punto de tangencia de las dos circumferencias.

Sea O el centro de la circunferencia exterior y $\overline{OC} = \overline{OT} = R$ el radio.

Sea $\overline{AB} = \overline{BO}$ lados del hexágono regular.

$$\overline{AB} = \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{1}{2}R.$$

$$\overline{BT} = \frac{1}{2}R.$$



Sea J el centrio de la circunferencia pequeña.

Sea $\overline{JT} = \overline{JK} = r$.

$$\angle JBK = 60^o.$$

El triángulo $\overset{\Delta}{BKJ}$ es rectángulo 30°-60°-90°.

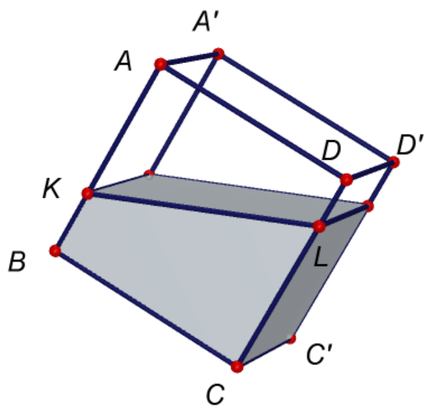
$$\overline{BJ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

$$\overline{BT} = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r.$$

Entonces, $\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r = \frac{1}{2}R$. Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}R.$$

Mayo 5-12:



Un cubo ABCDA'B'C'D' de arista 12 está lleno de líquido las 5/8 partes. El cubo se ha decantado sobre una arista CC'. El diagrama muestra el envase y el líquido en él. Dado que el segmento LC es el doble del segmento KB. Hallar la longitud del segmento LC.

Solución: Sean $\overline{BK} = x$, $\overline{CL} = 2x$.

El volumen del cubo ABCDA'B'C'D' es:

$$V_{cub} = 12^3.$$

El volumen que ocupa el agua es:

$$V_{aigua} = \frac{5}{8} V_{cub} = \frac{5}{8} 12^3 = 1080 .$$

$$V_{aigua} = S_{BCLK} \cdot \overline{CC'} .$$

$$V_{aigua} = \frac{2x + x}{2} 12 \cdot 12 = 216x .$$

Igualando los volúmenes:

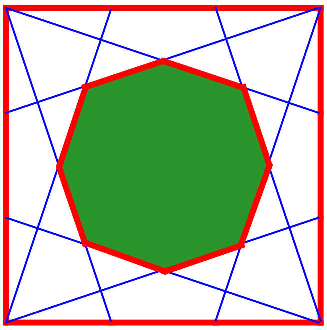
$$216x = 1080 .$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = 5 .$$

$$\overline{CL} = 2x = 10 .$$

Mayo 6-13:



Los lados de un cuadrado se han dividido en tres partes iguales y se han unido con los vértices con 8 segmentos formando en el interior un octógono. Determine la proporción entre las áreas del octógono y el cuadrado.

Solución: Sea ABCD el cuadrado exterior. Sea $JD_2KC_2LB_2MA_2$ el octógono interior. Consideremos el cuadrado $A_1B_1C_1D_1$ formado per la intersección de las rectas:

AU y DW, AU y BS, BS y CQ, CQ y DW.

Consideremos el cuadrado A'B'C'D'

$$\left(\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'B'}} \right)^2 = \frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} .$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{S_{A'B'C'D'} - 4S_{AD'D}}{16} = \frac{16 - 6}{16} = \frac{5}{8} .$$

Entonces:

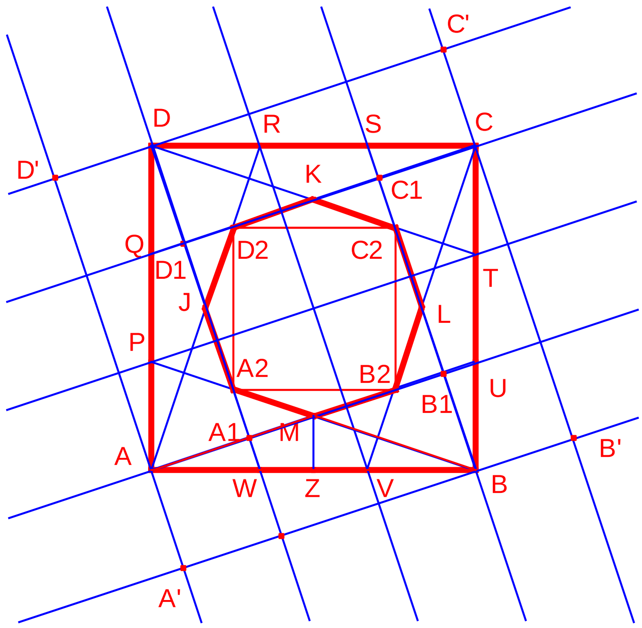
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{5} .$$

Notemos que $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{3} .$

Entonces,

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1B_2}} = \frac{1}{3} .$$

Además, $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$.



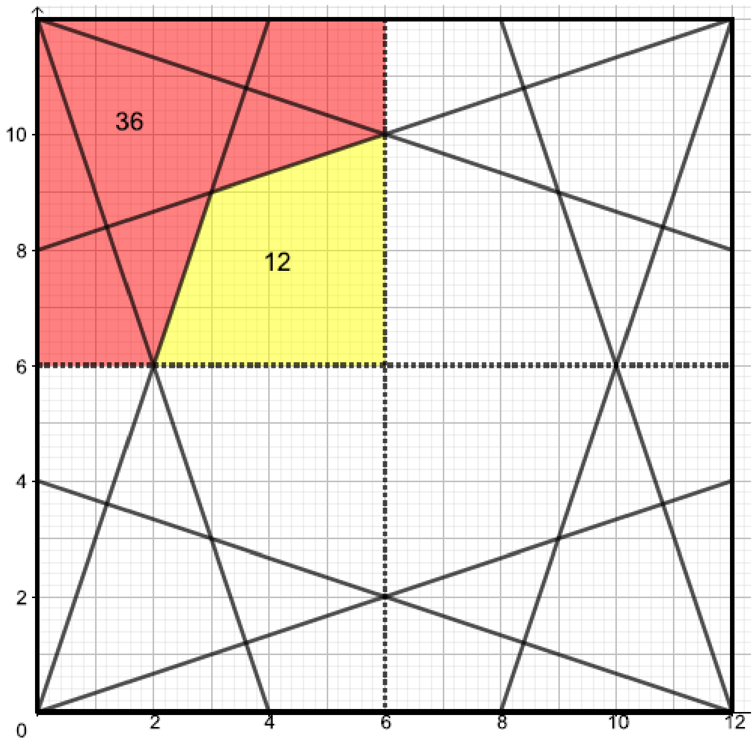
$$\frac{\overline{A_2B_2}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\left(\frac{3}{4}\overline{A_1B_1}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\overline{A'B'}\right)^2}=\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{1}{4}.$$

$S_{ABP}=\frac{1}{6}S_{ABCD}$, entonces, $S_{ZMB}=\frac{1}{4}S_{ABP}=\frac{1}{24}S_{ABCD}$. $S_{ABM}=2S_{ZMB}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$.

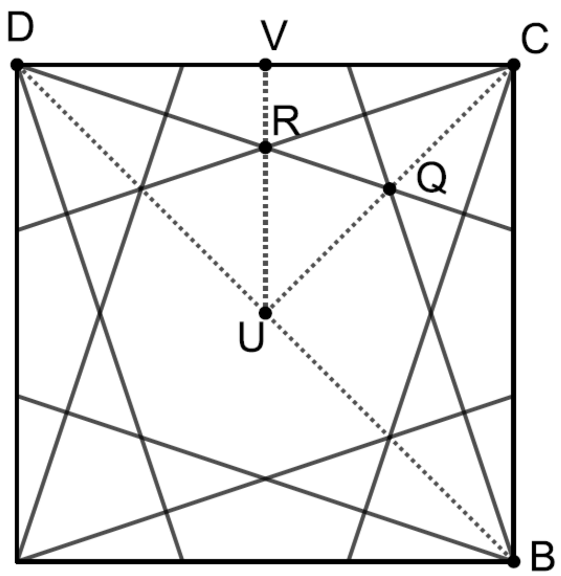
$\frac{S_{A_2B_2M}}{S_{ABM}}=\left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}}\right)=\frac{1}{4}$. Entonces: $S_{A_2B_2M}=\frac{1}{4}S_{ABM}=\frac{1}{48}S_{ABCD}$.

$$S_{\text{octògon}}=S_{A_2B_2C_2D_2}+4\cdot S_{A_2B_2M}=\frac{1}{4}S_{ABCD}+4\frac{1}{144}S_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

Solución gráfica de Nèstor Abad (@nabadvin)



Solución Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac)



Si $\mathcal{B}(A,B,\ldots;p,q,\ldots)$ es el baricentro de A, B,… con pesos p, q, …. Tenemos:

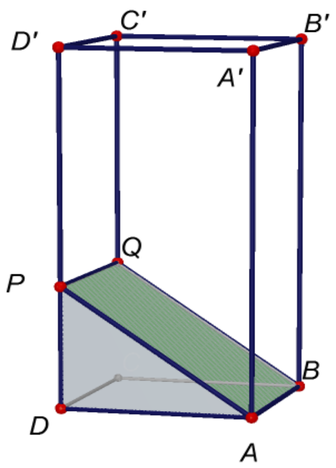
$$\begin{aligned} Q &= \mathcal{B}(D,B,C;1,1,2)\\ &= \mathcal{B}(U,C;2,2)\\ &\Rightarrow\ UQ=\frac{1}{2}UC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \mathcal{B}(D,U,C;1,1,1)\\ &= \mathcal{B}(U,V;1,2)\\ &\Rightarrow\ UR=\frac{2}{3}UV \end{aligned}$$

De donde:

$$A_{\Delta UQR} = \frac{1}{3} A_{\Delta UCV} \quad \Rightarrow \quad A_{oct} = \frac{1}{3} A_{cuad}$$

<u>Mayo 7-8:</u>



Sea el prisma recto regular cuadrangular ABCDA'B'C'D' que AB = 10, AA' = 20. Sean los puntos P de la arista DD' y Q de la arista CC' que DP = CQ = x. El plano que pasa por A, B, P y Q divide el prisma en dos poliedros.

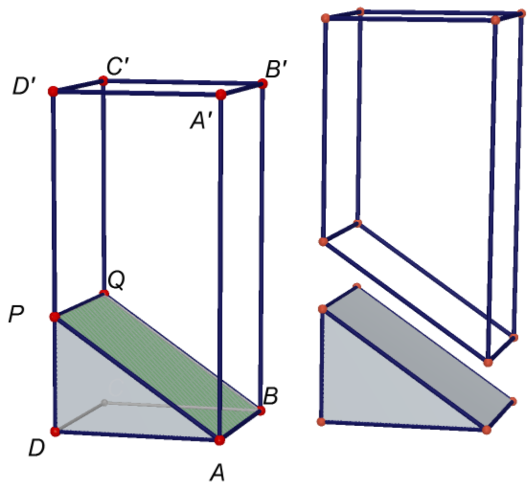
a) Determinar la función proporción entre los volúmenes del poliedro inferior y el superior.

b) Si la proporción de los volúmenes es 1/2, calcula el valor de x.

<u>Solución:</u>

a) El volumen del prisma ABCDA’B’C’D’ es:

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = 10^2 \cdot 20 = 2000 \ .$$



ABCDPQ es un prisma triangular de base el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADP}$. El volumen del prisma ABCDPQ es:

$$V_{ABCDPQ} = \frac{1}{2} 10^2 \cdot x = 50x \, .$$

El volumen del poliedro ABQPA’B’C’D’ es:

$$V_{ABQPA'B'C'D'} = V_{ABCDA'B'C'D'} - V_{ABCDPQ} \, .$$

$$V_{ABQPA'B'C'D'} = 2000 - 50x \, .$$

La proporción entre los volúmenes de los dos poliedros es:

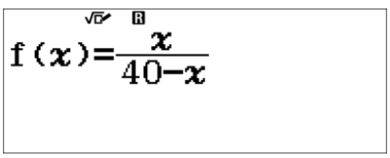
$$P(x) = \frac{50x}{2000 - 50x}, \quad x \in [0, 20] \, .$$

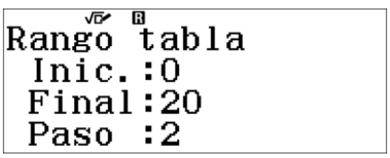
$$P(x) = \frac{x}{40 - x} \, .$$

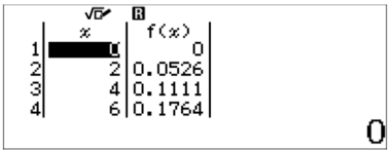
$$P(x) = -1 + \frac{-40}{40 - x} \, .$$

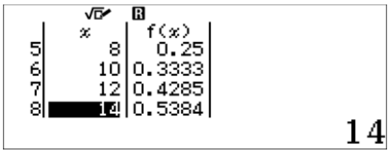
La función es una hipérbola.

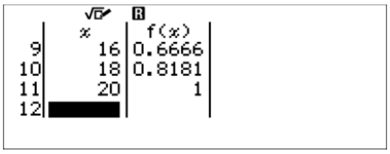
Para construir la tabla utilizaremos el menú TABLA de la calculadora:



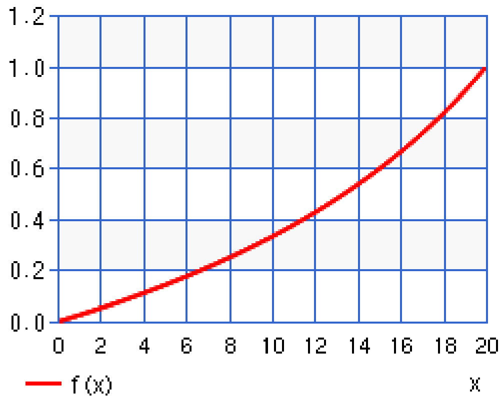








$$P(2) = \frac{1}{19} \approx 0.0526 .$$

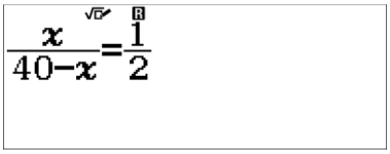


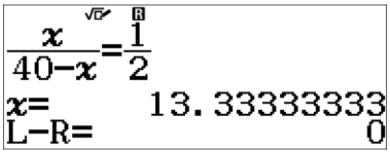
Para representar la función utilizaremos el código QR de la calculadora:

b) Para calcular el valor x tal que la proporción de los volúmenes es $\frac{1}{2}$, resolveremos la ecuación:

$$P(x) = \frac{1}{2}, \ \frac{x}{40 - x} = \frac{1}{2} .$$

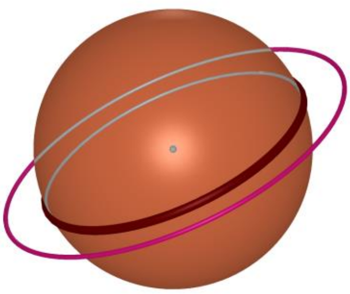
Para resolver la ecuación utilizaremos la función SOLVE de la calculadora:





La proporción de los volúmenes es $\frac{1}{2}$ cuando $x = \frac{40}{3} \approx 13.33$.

Mayo 9-10:



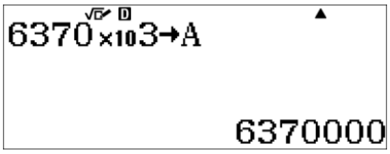
Imaginemos una cuerda que rodea una esfera del tamaño de la Tierra por el ecuador

A.- En cuanto se debería alargar la cuerda para llegar a que la distancia entre la cuerda y la superficie de la esfera sea de 1 metro.

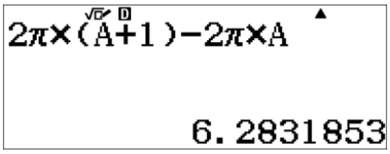
B.- En cuanto aumentaría el área del nuevo círculo.

C.- Si rodearemos la esfera inicial con una nueva esfera a la distancia de 1 metro, en cuanto aumentaría el volumen de la esfera. Radio de la Tierra 6370 km

Solución:

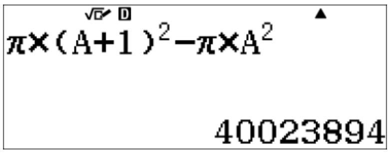


Calculemos el aumento de la longitud:



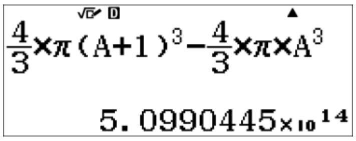
La cuerda aumenta aproximadamente $6.28\,\text{m}$.

Calculemos el aumento del área del circulo:



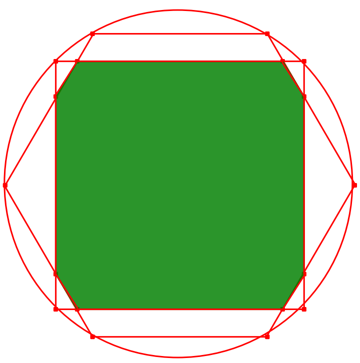
El área aumenta aproximadamente $40023894 \ \text{cm}^2$, es decir, $4002 \ \text{m}^2$.

Calculemos el aumento del volumen. Volumen de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



El aumento del volumen es $5.1 \cdot 10^{14} \ \text{cm}^3$, es decir, $5.1 \cdot 10^{8} \ \text{m}^3$.

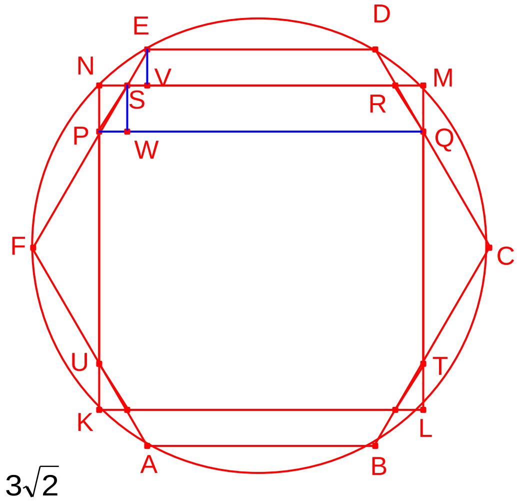
Mayo 11-18:



En una circunferencia de radio 6 hay inscrito un hexágono regular y un cuadrado. Un lado de un cuadrado es paralelo a un lado del hexágono regular.

Calcula el área intersección del hexágono regular y el cuadrado.

Solución: Sea ABCDEF el hexágono regular y $\overline{AB} = 6$. Sea KLMN el cuadrado de lado $\overline{KL} = \overline{TU} = \overline{KN} = 6\sqrt{2}$.



$$\overline{AE}=6\sqrt{3}\,.$$

$$\overline{EV}=\frac{\overline{AE}-\overline{KN}}{2}=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\,.$$

$\dfrac{\overline{SV}}{\overline{EV}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, entonces, $\overline{SV}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)=3-\sqrt{6}\,.$

$$\overline{SR}=\overline{DE}+2\overline{SV}=6+2\left(3-\sqrt{6}\right)=12-2\sqrt{6}\,.$$

$$\overline{PW}=\frac{\overline{PQ}-\overline{SR}}{2}\frac{6\sqrt{2}-12+2\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}\,.$$

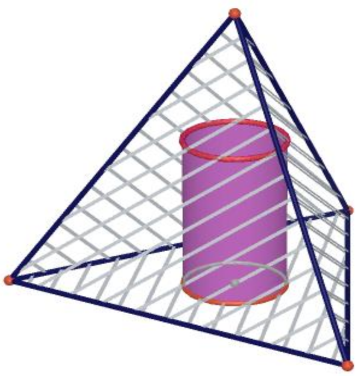
$\dfrac{\overline{SW}}{\overline{PW}}=\sqrt{3}$, entonces, $\overline{SW}=\sqrt{3}\left(3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}\right)=3\sqrt{6}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

$$\overline{PT}=\overline{KN}-2\overline{SW}=6\sqrt{2}-2\left(3\sqrt{6}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)=-6\sqrt{6}+12\sqrt{3}\,.$$

El área de la intersección del cuadrado y el hexágono regular es igual al doble del área del trapecio PQRS más el área del rectángulo TUQP:

$$S_{ombrejada}=2\frac{6\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}}{2}\left(3\sqrt{6}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)+6\sqrt{2}\left(-6\sqrt{6}+12\sqrt{3}\right)=72\sqrt{2}+72\sqrt{6}-120\sqrt{3}\approx 70.3405$$

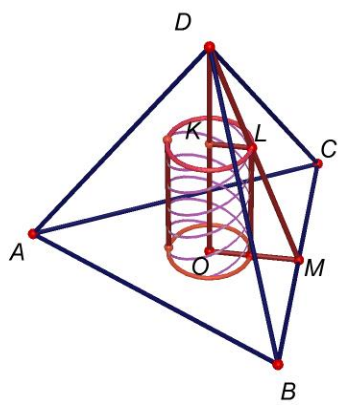
Mayo 14-21:



En un tetraedro regular de arista 1 se ha inscrito un cilindro que tiene una base en una cara y la otra base es tangente a las otras caras.

De todos los cilindros inscritos determinar las dimensiones y el volumen de aquel que tiene volumen máximo.

Solución: Sea el tetraedro regular ABCD de arista 1. Sea O el centro de la cara ABC. Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$. Sea K el centro de la base superior del cilindro. Sea L el punto de tangencia del cilindro y la cara BCD. Sea $\overline{KL}=R$ el radio del cilindro y $OK=h$ la altura del cilindro. L pertenece al segmento $\overline{DM}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BMD}$:

$$\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

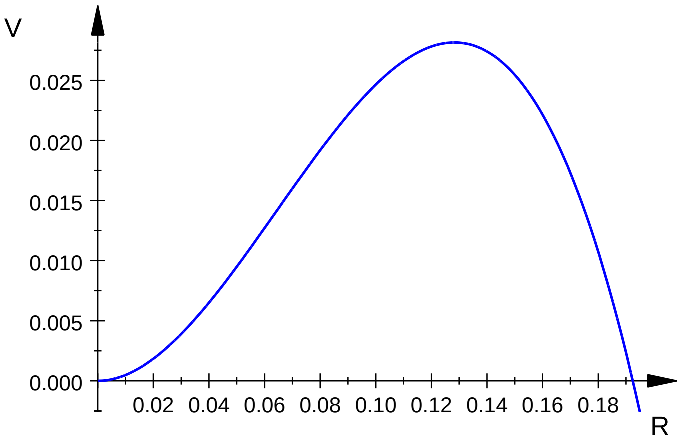
Aplicando la propiedad del baricentro al punto O: $\overline{OM}=\dfrac{1}{3}\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DOM}$: $\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{DOM}$, $\overset{\Delta}{DKL}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$\frac{\frac{\sqrt{6}}{3} - h}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{6}}$. Simplificando: $h = \frac{\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{2} \cdot R$. El volumen del cilindro es:



$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3} R^2 - 2\sqrt{2}\, R^3\right)$.

Derivando la función respecto de R:

$V' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} R - 6\sqrt{2}\, R^2\right)$.

$V' = 0$. Resolviendo la ecuación: $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

En este caso la altura del cilindro es $h = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

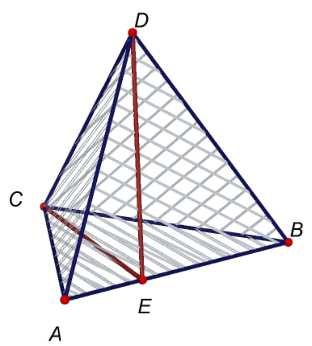
Calculando la segunda derivada:

$$V'' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - 12\sqrt{2}\, R^2\right). \quad V''\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{-2\sqrt{6}}{3}\right) < 0.$$

Entonces, en $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$ se consigue el máximo del volumen.

El volumen máximo es: $V\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \pi \frac{\sqrt{6}}{243}$.

Mayo 15-16:



Consideramos el tetraedro regular ABCD. Sea E un punto de la arista AB. Determinar el máximo del ángulo $\angle CED$ cuando E recorre la arista AB

Solución: Se tiene $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle CAE = \angle DAE = 60^o$. Los triángulos $\overset{\Delta}{CAE}$, $\overset{\Delta}{DAC}$ son iguales.

Entonces, $\overline{CE} = \overline{DE}$. El triángulo $\overset{\Delta}{CED}$ es isósceles. El mayor ángulo $\angle CED$ se alcanza en el menor valor para los lados CE y ED. Es decir, en la mínima distancia de D a la arista $\overline{AB}$ es decir, cuando E es el punto medio.

El ángulo máximo es igual al ángulo diédrico del tetraedro regular. En este caso $\overline{CE} = \overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculemos el ángulo diédrico. Sea $\alpha = \angle CED$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{CED}$:

$$\cos\alpha = \frac{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3}.\ \alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

<u>Solución 2:</u>

$\overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle CAE = \angle DAE = 60^o$. Los triángulos $\overset{\Delta}{CAE}$, $\overset{\Delta}{DAC}$ son iguales. Entonces, $\overline{CE} = \overline{DE}$. Sea $\overline{AE} = x$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{AED}$:

$$\overline{DE}^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 60^o = x^2 - x + 1.$$

Si $\alpha = \angle CED$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{CED}$:

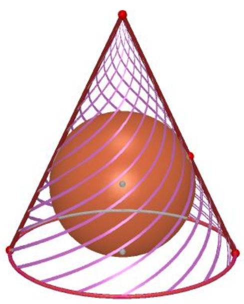
$$\cos\alpha = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x^2 - x + 1)}.$$

Como la función $f(x) = \cos x$ es decreciente en $[0, \pi]$.El valor máximo del ángulo se alcanza en el valor mínimo de la función $g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x^2 - x + 1)}$.

$$g'(x) = \frac{2x - 1}{2(x^2 - x + 1)^2}.\ g'(x) = 0, \text{ cuando } x = \frac{1}{2}.$$

$g''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. Entonces, $x = \frac{1}{2}$ es un mínimo de la función g(x) y, por tanto, el valor donde se alcanza el máximo del ángulo. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

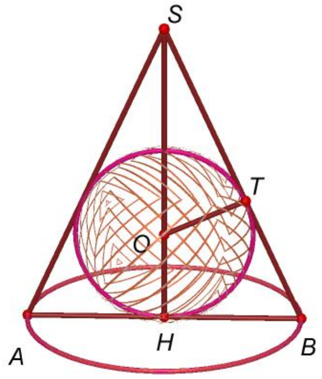
<u>Mayo 17:</u>



En un cono recto, el ángulo entre la altura y la generatriz es α. Calcular la razón entre los volúmenes de la esfera inscrita y el cono

Solución: Sea el cono recto de diámetro de la base $\overline{AB} = 2R$ y altura $\overline{AH} = h$.

Sea $\alpha = \angle HSB$ el ángulo que forma la altura y la generatriz.



Sea la esfera inscrita en el cono de centro O y radio $\overline{OT} = \overline{OH} = r$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{SHB}$:

$$R = h \cdot tg\alpha .$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{STO}$:

$$\frac{r}{h-r} = \sin\alpha .$$

$$r = \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} h .$$

El volumen de la esfera es:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^3 h^3 .$$

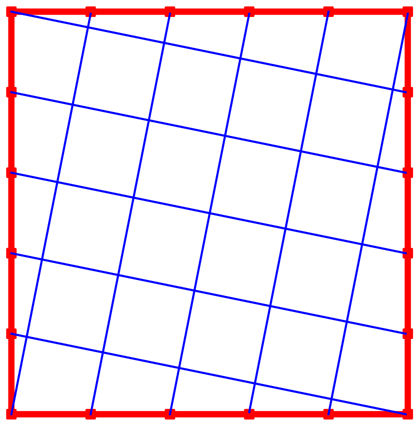
El volumen del cono es:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi(h \cdot tg\alpha)^2 h .$$

La proporción entre los dos volúmenes es:

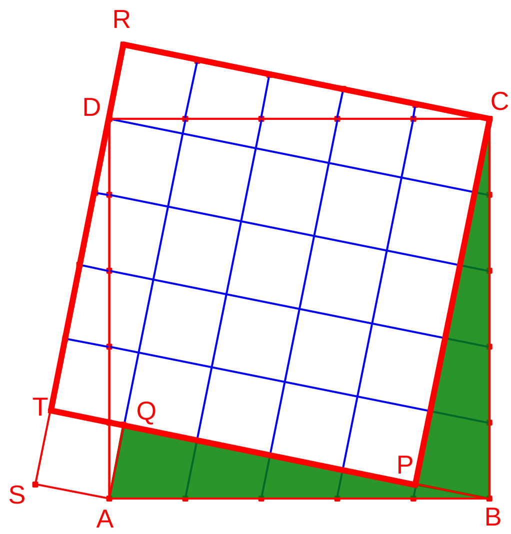
$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^3 h^3}{\frac{1}{3}\pi(h \cdot tg\alpha)^2 h} = \frac{4\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^3} .$$

Mayo 19-26:



Cada lado de un cuadrado se divide en n partes iguales. Los puntos de lados opuestos están conectados de una manera desplazada como muestra la figura (en la figura se representa el caso n = 5). Demostrar que es posible obtener n^2+1 cuadrados iguales.

Solución:



Sea el cuadrado inicial ABCD.

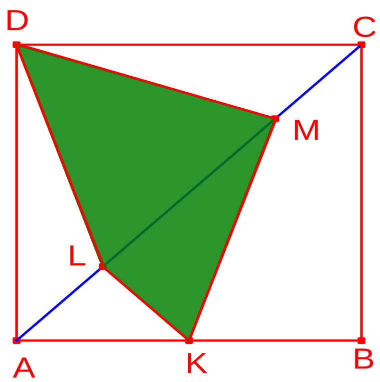
El triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BCP}$ lo giramos 270º con centro C, dando lugar al triángulo $\overset{\Delta}{DCR}$.

El triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABQ}$ lo giramos 90º con centre A, dando lugar al triángulo $\overset{\Delta}{ADS}$.

El área del cuadrado ABCD es igual al área del cuadrado PCRT más el área del cuadrado AQTS.

El área del cuadrado PCRT más el área del cuadrado AQTS es n^2+1.

Mayo 20-27:



Sea ABCD un cuadrado de diagonales AC = BD = 68. Los puntos L y M en la diagonal AC son tales que AL = MC = 17, y K es el punto medio de AB. Calcular la proporción entre las áreas del cuadrilátero KLDM y el cuadrado ABCD

Solución: Sea P el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$ (mirar figura abajo).

$$\overline{LM}=34.$$

$$\overline{AL}:\overline{AC}=1:4.$$

Aplicando el teorema inverso de Tales:

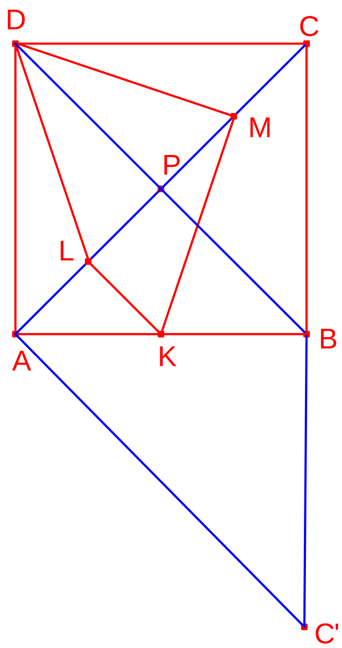
$\overline{KL}$ es paralela a $\overline{BP}$ y $\overline{LK}=\frac{1}{2}\overline{BP}=\frac{1}{2}34=17$.

$$S_{KLDM}=S_{LMD}+S_{LMK}=\frac{1}{2}\overline{LM}\cdot\overline{DP}+\frac{1}{2}\overline{LM}\cdot\overline{LK}=\frac{1}{2}34\cdot 34+\frac{1}{2}34\cdot 17=867.$$

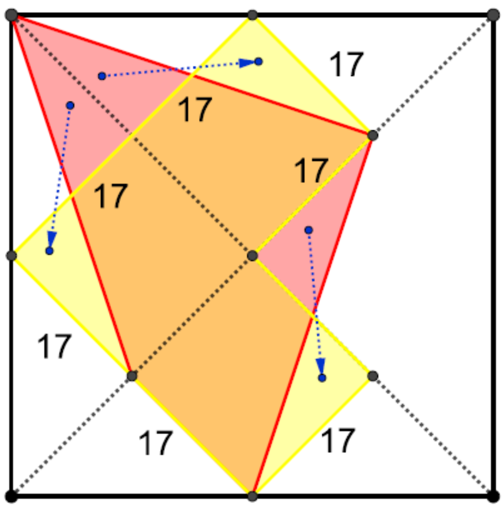
Sea C’ el simétrico de C respecto de B.

$$S_{ABCD} = S_{CAC'} = \frac{1}{2}68^2 = 2312 \; .$$

$$\frac{S_{KLDM}}{S_{aBCD}} = \frac{867}{2312} = \frac{3}{8} \; .$$



Solución Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac):



Tendremos:

$$\begin{aligned} A_{roja} &= A_{amarilla} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot (34 + 17) \\ &= 3 \cdot 17^2 = 867 \end{aligned}$$

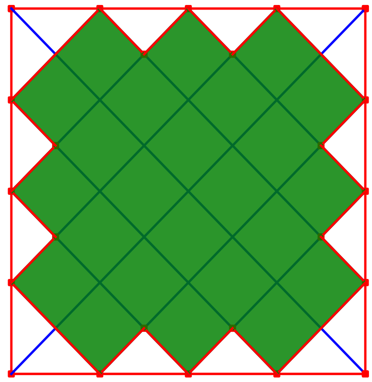
En el cuadrado inicial de diagonal 68, tenemos:

$$A = 4 \cdot \frac{\frac{68}{2} \cdot \frac{68}{2}}{2} = 2312$$

Luego:

$$\frac{A_{roja}}{A} = \frac{867}{2312} = \frac{3}{8}$$

Mayo 22-23:



Los lados de un cuadrado se dividen en n partes iguales (en la figura n = 4). Los puntos se unen de la forma indicada, para formar varios cuadrados más pequeños (24 en el ejemplo de la figura) y algunos triángulos. ¿Cuántos cuadrados se forman si n = 100?

Solución: Suponemos que el lado del cuadrado pequeño de la figura es 1.

Cada una de las diagonales del cuadrado mide $\sqrt{2}$.

El lado del cuadrado exterior mide:

$$n\sqrt{2}.$$

El área del cuadrado exterior es:

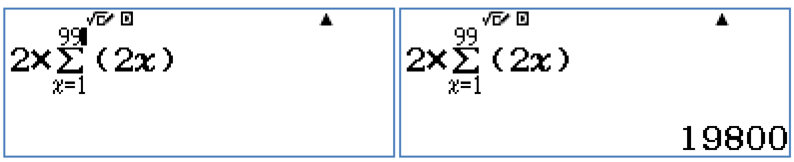
$$S_q = \left(n\sqrt{2}\right)^2 = 2n^2.$$

En la figura hay 4n triángulos. Dos triángulos forman un cuadrado de lado 1. El área de la figura sombreada es:

$$S_o = S_q - 2n = 2n^2 - 2n.$$

Entonces, en la figura sombreada hay un total de $2n^2 - 2n$ cuadrados. Si $n = 100$, el total de cuadrados es 19800.

Solución 2: El total de cuadrados es: $2\sum_{x=1}^{n-1} 2x$, pues por debajo (encima) de una diagonal hay 2x cuadrados. Con la calculadora Classwiz:



Solución Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac):

Si los lados del cuadrado inicial se dividen en n partes iguales, el número de cuadrados que se generan entre la mitad de las dos diagonales y un lado del cuadrado inicial es:

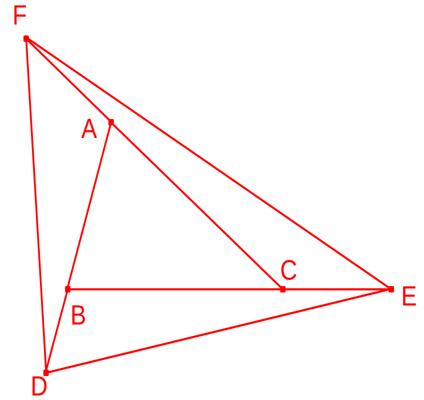
$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Luego el número de cuadrados que se generan es:

$$C(n) = 4\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2} = 2n\cdot(n-1)$$

En particular, para n = 100 $\Rightarrow$ C(100) = 19800.

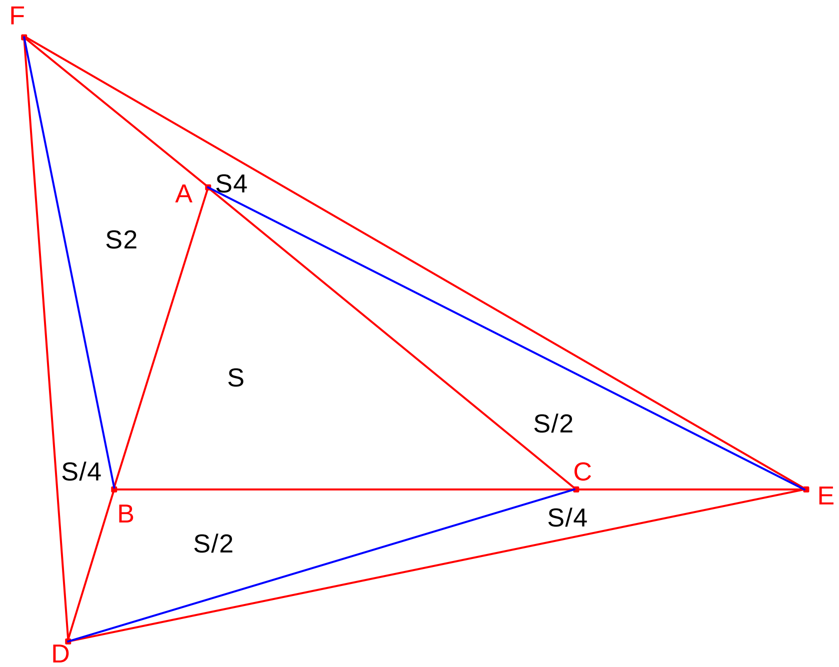
Mayo 24-25:



Los lados del triángulo ΔABC se han prolongado como muestra la figura de forma que BD = 1/2 AB, CE = 1/2 BC y AF = 1/2 CA. Determine la proporción entre las áreas del triángulo ΔDEF y del triángulo ΔABC.

Solución: Sea $S = S_{ABC}$.

Cuando dos triángulos tienen la misma altura tienen las áreas proporcionales a las bases.



$$S_{BDC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} S.$$

$$S_{ECD} = \frac{1}{2} S_{BDC} = \frac{1}{4} S.$$

$$S_{ECA} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} S.$$

$$S_{EAF} = \frac{1}{2} S_{ECA} = \frac{1}{4} S.$$

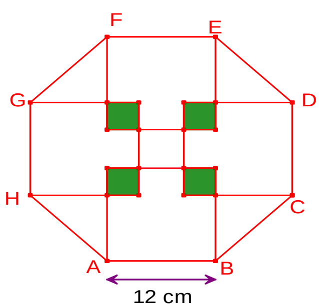
$$S_{FAB} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} S.$$

$$S_{FBD} = \frac{1}{2} S_{FAB} = \frac{1}{4} S.$$

$$S_{DEF} = S + 3\left(\frac{1}{2} S + \frac{1}{4} S\right) = \frac{13}{4} S.$$

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{13}{4}.$$

Mayo 28-29:



Dado el octógono regular ABCDEFGH de lado AB = 12 cm, se dibujan 4 cuadrados sobre los lados AB, CD, EF, GH. Calcula el área de la zona sombreada (ver figura).

Solución:

El área sombreada es igual a cuatro veces el área del cuadrado KLMN.

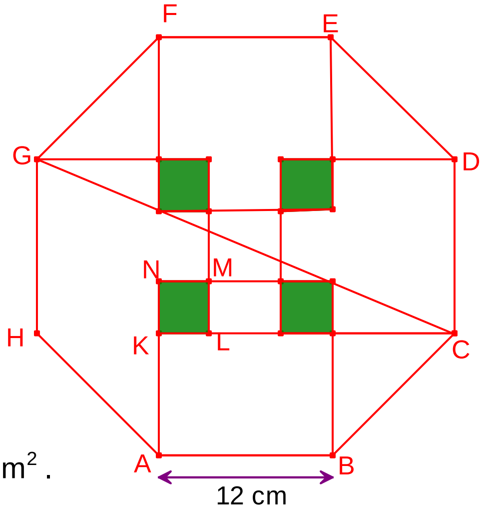
$$\overline{AN} = \overline{AB} = 12 .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{AKH}$:

$$\overline{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = 6\sqrt{2} .$$

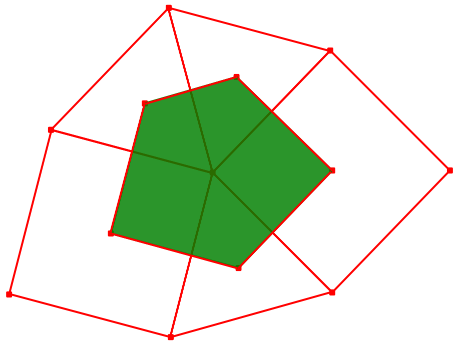
$$\overline{KN} = \overline{AN} - \overline{AK} = 12 - 6\sqrt{2} .$$

El área de la zona sombreada es:



$$S_{ombrejada} = 4 \cdot \overline{KN}^2 = 4\left(12 - 6\sqrt{2}\right)^2 = 864 - 576\sqrt{2} \approx 49.41\,cm^2 .$$

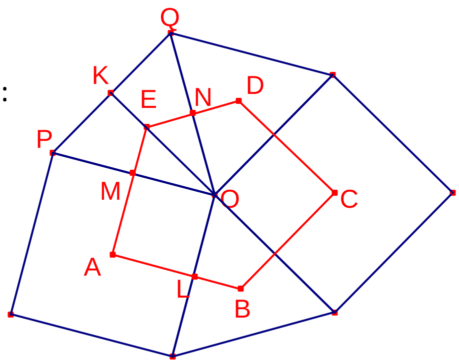
Mayo 30-31:



En la figura, están dibujados dos cuadrados y 3 triángulos equiláteros de lados c. Con sus centros se ha dibujado un pentágono. Determine el área, el perímetro y los ángulos del pentágono.

Solución: Sea ABCDE el pentágono. $\overline{AE}$ es la mediatriz del lado $\overline{OP}$. $\overline{DE}$ es mediatriz del lado $\overline{OQ}$.

$$\overline{OM} = \overline{AM} = \overline{AL} = \frac{c}{2} .$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c .$$

Aplicando la propiedad del baricentro al triángulo equilátero $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\overline{KE} = \overline{ME} = \overline{EN} = \frac{1}{3}\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{6}c .$$

a)

El perímetro del polígono ABCDE es:

$$P_{ABCDE} = 4 \cdot \overline{AL} + 6 \cdot \overline{ME} = \left(2 + \sqrt{3}\right)c .$$

b)

El área del cuadrilátero OMEN es:

$$S_{OMEN} = \frac{1}{3} S_{OPQ} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 .$$

El área del polígono ABCDE es:

$$P_{ABCDE} = 2 \cdot S_{ALOM} + 3 \cdot S_{OMEN} = 2 \cdot \frac{1}{4} c^2 + 3\left(\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} c^2\right) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) c^2 .$$

c) Se tiene

$$\angle OME = \angle ONE = 90^o ,\ \angle NOM = 60^o .$$

$$\angle MEN = 360^o - (2 \cdot \angle OME + \angle NOM) = 120^o .$$

Los ángulos del polígono ABCDE son:

$$A = C = 90^o ,\ B = D = E = 120^o .$$