

SOLUCIONS GENER 2019.

PROBLEMES PER A PRIMER CICLE DE L'ESO

Autor: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid

Selecció del XIX Concurs de Primavera de 2015

<https://www.concursoprimavera.es/#concurso>

Gener 1: Dani entrena a un equip d'escolars. Primer va fer grups de quatre i li van sobrar dos, després grups de cinc i li va sobrar un. Si en el grup hi ha quinze noies i hi ha més noies que nois, quants nois hi ha a l'equip?

Solució: Siga x els grups de 4, z els grups de 5 i y el total d'escolars, llavors:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2 = y \\ 5z + 1 = y \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 2 = 5z + 1 \Rightarrow 4x + 1 = 5z$$

Per tant, $4x + 1$ acaba en 0 o 5. D'on $4x$ acaba en 9 o en 4. Com cap múltiple de 4 acaba en 9, deu ser que $4x$ acaba en 4. Repassant las taules de multiplicar tenim que l'únic múltiple de 4 que acaba en 4 es ($6 \cdot 4 =$) 24. Per tant $x = 6$. Y aleshores $y = 4 \cdot 6 + 2 = 26$. Com hi ha quinze xiques deu d'haver ($26 - 15 =$) 11 xics.

Gener 2-3:



Laia i Aitana juguen a col·locar fitxes una darrere l'altra per torns. Laia té tres cercles, un de vermell, un altre negre i el tercer groc i Aitana té tres quadrats, un de vermell, un de groc i el tercer negre. Quantes configuracions diferents es poden formar?

Solució: Suposem que comença Laia: Laia té tres possibilitats per a la primera peça. Aitana té tres possibilitats per a la segona peça. Laia té dues possibilitats per a la tercera peça. Aitana té dues possibilitats per a la quarta peça. Laia té una possibilitat per a la cinquena peça i finalment Aitana té una possibilitat per a la sisena peça. En total ($3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 =$) 36 maneres de col·locar les sis peces. Com el mateix raonament serveix per al cas de començar Aitana, hi ha en total ($2 \cdot 36 =$) 72 configuracions.

Gener 4: Hui és divendres i falten cent dies pel meu aniversari. En quin dia de la setmana caurà el meu aniversari aquest any?

Solució: Busquem el múltiple de 7 més proper per defecte a 100, que és 98. D'aquí a 98 dies serà divendres, després ve un dissabte i després un diumenge. L'aniversari caurà en diumenge.

Gener 5-6: Laia té quatre boles blaus, trenta verds i díhuit platejades. Vol ficar-les en bosses iguals i amb el mateix nombre de boles en cadascuna d'elles, però, com és molt matemàtica, no vol barrejar boles de diferents colors en la mateixa bossa, Quantes bosses necessitarà com a mínim?

Solució: Com $\text{mcd}(24, 30, 18) = 2 \cdot 3 = 6$ necessitarem com a mínim $(24: 6 =)$ 4 bosses per a les boles blaves; $(30: 6 =)$ 5 bosses per a les boles verdes i $(18: 6 =)$ 3 bosses per a les boles platejades. En total $(4 + 5 + 3 =)$ 12 bosses.

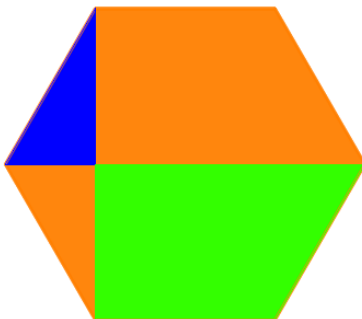
Gener 7-8: Laia va escriure a la pissarra tots els números enters des de l'u al cent i de sobte va aparèixer Aitana que va esborrar tots aquells nombres que eren múltiples de tres menys dels que tenien un set a les seves xifres. Quants nombres van quedar a la pissarra després de l'actuació d'Aitana?

Solució: Entre 1 i 100 hi ha 33 múltiples de 3 (el primer és $3 \cdot 1 = 3$ i l'últim és $3 \cdot 33 = 99$). D'ells contenen la xifra 7, només sis números: el 27, el 57, el 72, el 75, el 78 i el 87 (trobar-los és fàcil: un nombre de dues xifres és múltiple de 3 sii la suma de les seves xifres és múltiple de tres. Busquem els múltiples de tres amb un 7, és a dir busquem els múltiples de tres de la forma $a7$ o $7b$ amb $a, b = 2, 5$ o 8). Aitana ha esborrat $(33-6 =)$ 27 números i han quedat a la pissarra $(100 - 27 =)$ 73 nombres.

Gener 9: La mitjana aritmètica de cent números és huitanta-sis i la mitjana aritmètica de huitanta d'ells és huitanta-quatre, quin és la mitjana aritmètica dels vint que falten?

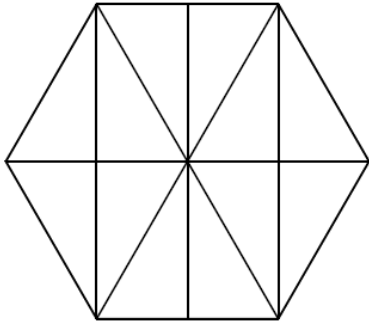
Solució: La suma dels 100 números és $(86 \cdot 100 = 8600)$. La suma dels 80 elegits és $(84 \cdot 80 =)$ 6720. La suma dels vint no elegits és $(8600-6720 =)$ 1880 i la seua mitjana serà: $(1880: 20 =)$ 94.

Gener 10-11:



En un hexàgon regular se sap que l'àrea del trapezi de color verd és 420 cm^2 . Quin és l'àrea del triangle de color blau?

Solució:



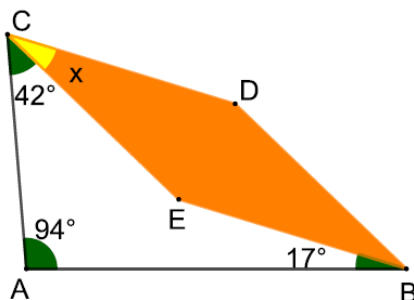
Un hexàgon regular es compon de sis triangles equilàters de costat l'aresta de l'hexàgon o (dividint cada triangle equilàter en dos triangles 30°-60°-90°) en dotze triangles 30°-60°-90° d'àrea A_t cadascun ells. Com el trapezi de color verd consta de 5 triangles 30°-60°-90°, tindrem $5 \cdot A_t = 420$. D'on $A_t (= 420: 5 =) 84 \text{ cm}^2$

Gener 12: Si $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ i $\frac{b}{c} = \frac{8}{5}$ quant val $\frac{a}{b+c}$?

Solució: Tenim:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = b \\ \frac{b}{c} = \frac{8}{5} \Rightarrow c = \frac{5b}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow c = \frac{10a}{8} \Rightarrow b + c = 2a + \frac{10a}{8} = \frac{26a}{8} \Rightarrow \frac{8}{26} = \frac{a}{b+c} = \frac{4}{13}$$

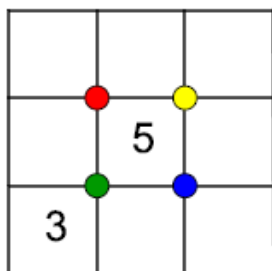
Gener 13:



CEBD es un rombe. Trobar x

Solució: En el quadrilàter ABCE tenim, $\angle BEC = 360^\circ - (94^\circ + 42^\circ + 17^\circ) = 207^\circ$. En el rombe CEBD, $\angle BEC = y = 360^\circ - 207^\circ = 153^\circ$. I d'ací: $2x + 2y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 153^\circ = 27^\circ$.

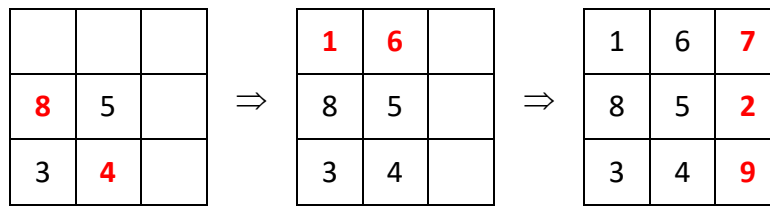
Gener 14-21:



En les cel·les del quadrat de la figura hem d'escriure els naturals des de l'u al nou de manera que els números de les cel·les que tenen en comú el punt vermell, groc, verd o blau sumin 20. Com estaran repartits els números?

Solució: Com la suma de nombres col·locats en les cel·les damunt i a la dreta de la casella on està escrit el 3, han de sumes 12, els números d'aquestes cel·les poden ser 9 i 3 (que

no és possible ja que el 3 ja és utilitzat), 8 i 4 o 7 i 5 (que no és possible doncs el 5 ja està utilitzat). Només pot ser 8 i 4



Un cop col·locats el 8 i el 4, ens fixem en les cel·les que hi ha a sobre de les cel·les que tenen al 8 i al 5. Ja que aquestes s'han de sumar 20 hem d'afegir un total de 7 punts. Només és possible col·locar 1 i 6. De forma idèntica es completen les 3 cel·les de la tercera columna.

9	2	7
4	5	6
3	8	1

Aparentment, hi ha solucions diferents de l'obtinguda com l'exposada a l'esquerra. Però la diferència és només aparent: la primera columna d'aquesta és la tercera fila de l'anterior. La segona columna d'aquesta és la segona fila de l'anterior. I la primera columna d'aquesta és la tercera columna de l'anterior

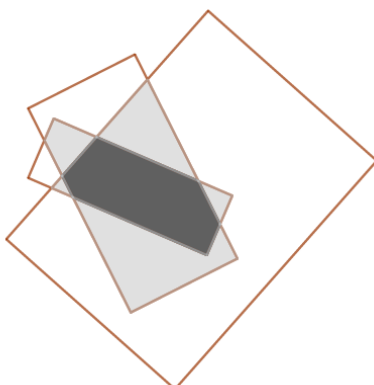
Gener 15-16: Dani ha dividit un quadrat de 81 cm^2 d'àrea en 81 quadradets, i els ha recol·locat formant dos rectangles. Sabent que un té doble àrea que l'altre i que els seus perímetres difereixen en 34 cm, trobar les dimensions dels rectangles.

Solució: Com $81:3 = 27$, un rectangle té àrea 27 cm^2 i l'altre, el doble, 54 cm^2 . Per al rectangle d'àrea 27 cm^2 tenim les següents possibilitats:

Costat petit	Costat major	Perímetre	Perímetre + 34
1	27	56	90
3	9	24	58

Així doncs, el perímetre del gran pot ser 90 cm o 58 cm i, per tant, la suma dels seus costats podria ser 45 o 29. Com que els costats només poden ser 1 i 54, 2 i 27, 3 i 18 o 6 i 9, veiem que l'única solució possible és que els rectangles siguin 3×9 i de 2×27 .

Gener 17-24:



Aitana ha comprat tres catifes rectangulars les àrees de les quals sumen 20 m^2 i les ha tirat al llarg del menjador de casa seua. La superfície coberta ha estat de 14 m^2 i la superfície coberta per la superposició de només dues catifes ha estat de 2 m^2 . Quina àrea, en m^2 , ha quedat coberta per la superposició de les tres catifes?

Solució: Siga A_1 l'àrea de la zona coberta amb una sola catifa (en blanc en la figura), siga A_2 l'àrea de la zona coberta amb dues catifes (en gris en la figura) i A_3 l'àrea de la zona coberta amb les tres catifes (en negre en la figura). Aleshores:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 = 14 \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow (A_2 = 2) \left. \begin{array}{l} A_1 + A_3 = 12 \\ A_1 + 3A_3 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow A_3 = 2$$

Gener 18-19: Ahir va ser el dia de les mascotes en el meu institut. Dels quatre-cents cinquanta alumnes, 241 portem una mascota, vuitanta-set portem dues mascotes, alguns van portar tres mascotes i la resta no porto cap. Si en total hi havia 553 mascotes, quants alumnes no van portar cap?

Solució: El nombre de mascotes dels alumnes que porten una o dues mascotes és: $(241 \cdot 1 + 87 \cdot 2 =)$ 415. Pel que el nombre de mascotes portades pels alumnes que porten 3 mascotes és: $(553 - 415 =)$ 138. d'aquí que el nombre d'alumnes que porten 3 mascotes és: $(138 : 3 =)$ 46. Per tant, el nombre d'alumnes que van portar mascotes a l'institut és: $(241 + 87 + 46 =)$ 374. I d'aquí, el nombre d'alumnes que no van portar cap mascota a l'institut és: $(450 - 374 =)$ 76

Gener 20: Tinc tres caramels de maduixa, dues de menta i un de llimona. De quantes maneres diferents puc omplir una bosseta amb tres caramels?

Solució: Representant per F (M, L) que el caramel sigui de sabor maduixa (menta, llimona), les combinacions possibles són: FFF, FFM, FFL, FMM, FML, MML. És a dir, hi ha sis maneres diferents d'omplir una bossa amb tres caramels.

Gener 22: Escrivim els naturals de l'1 al 100 tots seguits:

1234567891011121314.....100

què dígit ens trobem en la posició cent?

Solució: Per a nombres de dues xifres, a partir del 10, trobem que la primera de les seves xifres està en posició parell, així que, en la posició cent, es trobarà la primera xifra d'un nombre, n de dues xifres. No és difícil veure que, en escriure des de l'1 fins al 49, ocupem $(9 + 20 \cdot 4 =)$ 89 posicions i com la desena dels cinquanta ocupa 20 posicions, vam concloure que en la posició 100 trobem la xifra 5.

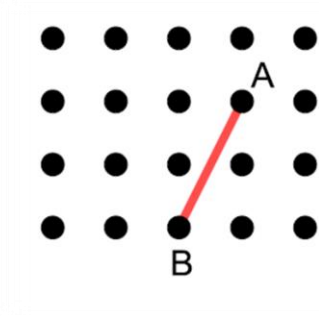
Gener 23: Troba els nombres primers de dues xifres els dígit dels quals siguem també primers.

Solució: Només hi ha quatre números amb aquestes condicions: 23, 37, 53 y 73

Gener 25: Aitana té un 40% més de pentàgons que la Laia. Quina fracció dels seus pentàgons ha regalar Aitana a la Laia perquè les dues tinguin el mateix nombre de pentàgons?

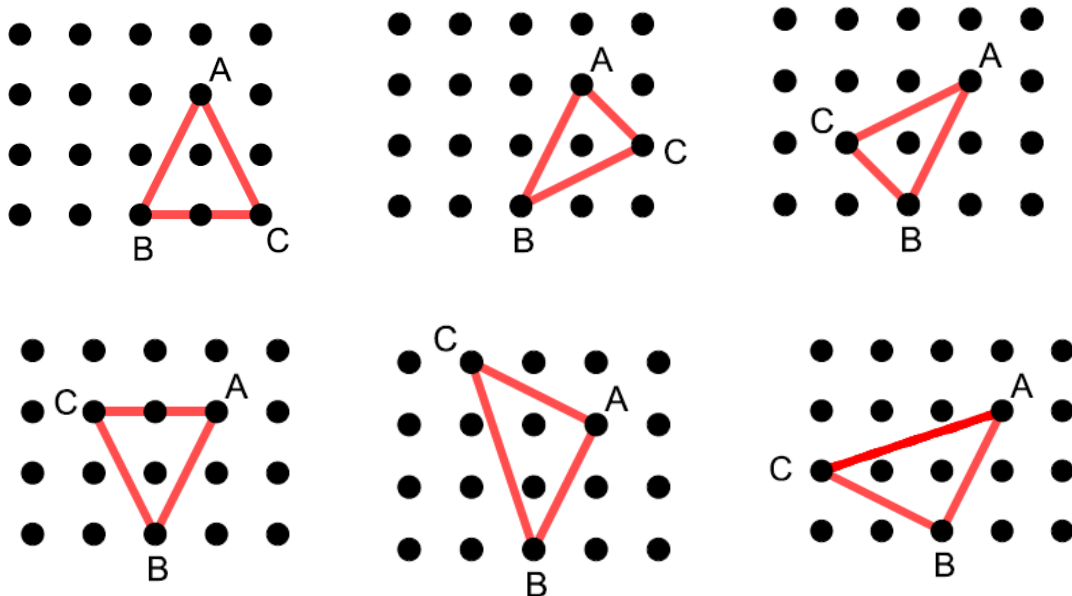
Solució: Suposem que la Laia té 100 pentàgons, llavors Aitana té 140 pentàgons, per la qual cosa Aitana ha de donar-li a la Laia 20 i així les dues tindran la mateixa quantitat (120). Aitana ha de regalar $(20 : 140 =)$ un de cada set dels seus pentàgons a la Laia.

Gener 26:



Hem marcat el segment AB en l'enreixat. De quantes maneres pots triar el punt C perquè el triangle $\triangle ABC$ siga isòsceles?

Solució: Aquestos són els sis casos que hi ha



Gener 27: Quants naturals iguals o menors que 999 són parells, però no múltiples de tres?

Solució: Als múltiples de 2 els hem de llevar els múltiples de 2 que són també múltiples de 3, es a dir de 6. El nombre buscat és:

$$\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 499 - 166 = 333$$

Gener 28: De quantes maneres es pot obtenir suma 15 amb quatre sumands naturals diferents?

Solució: Hi ha sis possibilitats:

$$1 + 2 + 3 + 9 = 15$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

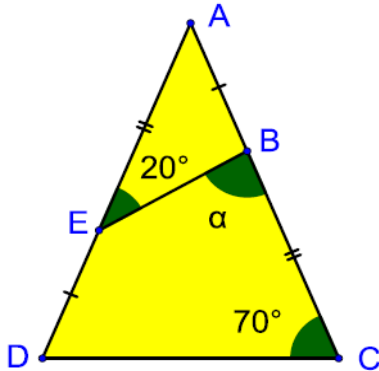
$$1 + 2 + 5 + 7 = 15$$

$$1 + 3 + 4 + 7 = 15$$

$$1 + 3 + 5 + 6 = 15$$

$$2 + 3 + 4 + 6 = 15$$

Gener 29:



En el triangle de la figura $AB = ED$ i $BC = EA$. Quant mesura l'angle α ?

Solució: El triangle $\triangle ADC$ és isòsceles (ja que $AE + ED = AB + BC$) per la qual cosa, l'angle en D mesura 70° . D'on l'angle en A mesura $(180^\circ - 140^\circ =) 40^\circ$. Ara, en el triangle $\triangle AEB$, l'angle en B mesura $(180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) =) 120^\circ$. I finalment $\alpha (= 180^\circ - 120^\circ) = 60^\circ$.

Gener 30: El nombre N està format per un un, dos dosos, tres tresos, , nou nous, en algun ordre. Trobar el residu de dividir N entre nou.

Solució: Calculem

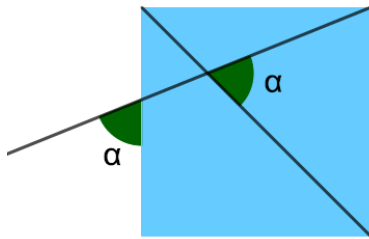
$$\sum_{\text{xifres de N}} = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = 285$$

Tornem a sumar les xifres del nombre obtingut:

$$\sum_{\Sigma N} = 15$$

Com al dividir 15 entre 9 obtenim quocient 1 i residu 6, tenim que el residu de dividir N entre 9 es sis

Gener 31:



En el dibuix tenim un quadrat. Trobar el valor de α .

Solució: Considerem el triangle format per la diagonal i la recta que passa pel vèrtex superior dret. L'angle en el vèrtex de la diagonal mesura 45° (ja que es tracta d'un quadrat). Els altres dos angles mesuren α (per ser oposats pel vèrtex). Per tant $45^\circ + 2\alpha = 180^\circ$. D'on $\alpha = 67^\circ 30'$.