SOLUCIONS JUNY 2019

Problemes per a segon cicle de l'ESO. Autors: Col·lectiu "Concurso de primavera". Comunitat de Madrid.

https://www.concursoprimavera.es/#libros

Enunciats i solucions extretes del "XIX Concurso de Primavera" de 2015.

Juny 1: Del polinomi P(x) = x^2 + mx + n se sap que té per arrels a a i a 1/a. ¿Quant val P(a+1/a)?

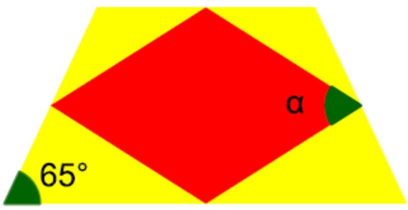
Solució: Donat P(x) = x^2 + mx + n tenim que la suma de arrels és -m i el producte d'arrels és n. Per tant:

$$P(x) = x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 \Rightarrow P\left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 1 = 1$$

Juny 2: Trobar el menor natural que és múltiple de 72 i amb suma de xifres és 72.

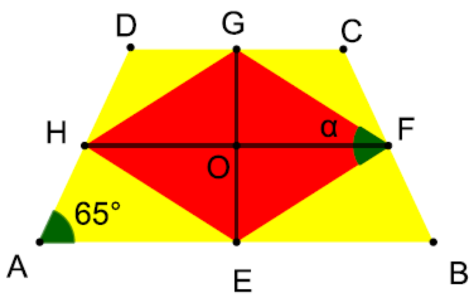
Solució: Com 72 = 8·9 = $2^3 \cdot 3^2$, el nombre buscat deu ser múltiple de 8 (les tres últimes xifres deuen ser un múltiple de 8) i de 9 (la suma de totes les seues xifres ha de ser múltiple de 9, que ho és). Com busquem el menor d'aquestos nombres quantes més xifres 9 tinga millor. El menor dels nombres amb suma de xifres 72 és 99999999. Però les seues tres últimes xifres no són un múltiple de 8. Com si ho és 888 podríem substituir els tres últims nous per huits i per a mantenir que la suma de xifres siga 72 deuríem afegir un tres. Queda així format el nombre sol·licitat: 399999888.

Juny 3-4:



En un trapezi isòsceles amb tres costats iguals, inscrivim un rombe els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats del trapezi. Trobar el valor de l'angle α

Solució:



Com el trapezi és isòsceles, l'angle en A i en B mesuren 65°, per la qual cosa els angles en C i D mesuren 115°. Traçant les diagonals del rombe tenim:

$$CF = FB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}DC = GC$$

Per la qual cosa ΔGFC és isòsceles. Per tant, els seus angles en G i F mesuren:

$$\frac{180-115}{2}=\frac{65°}{2}$$

Finalment, com ∠OFC = ∠OFG + ∠GFC = angle en B (per tenir costats paral·lels o coincidents) = 65°, tenim:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{65}{2}=65 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65°$$

Juny 5: Escrivim els quadrats dels naturals de l'1 al 100: 1, 4, 9, 1, 6, 2, 5, 3, 6, …… ¿Quina xifra estarà en la posició 100?

Solució: Hi ha tres quadrats d'una xifra: 1, 4, 9. Hi ha sis quadrats (9 – 3) amb dues xifres: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Amb tres xifres hi ha (31 – 9 =) 22: 100, 121, 144, 169, … , 900, 961. Para llegar a la posició 100 queden: 100 – (3 + 2·6 + 3·22) = 100 – 81 = 19 xifres. Aquestes correspondrien a 4 quadrats de quatre xifres (32^2, 33^2, 34^2 y 35^2) i a tres xifres del següent quadrat (36^2 = 1296). Per tant la contestació és 9.

Juny 6: Siguen x, y i z reals positius que verifiquen

$$\mathbf{x\cdot y = 1;\ \ x\cdot z = 2;\ \ y\cdot z = 8}$$

Trobar $x+y+z$

Solució: Multiplicant membre a membre la segona i tercera equació tenim:

$$x\cdot y\cdot z^2 = 16$$

I ja que (primera equació) $x\cdot y = 1$, tenim:

$$z^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad z = \pm 4$$

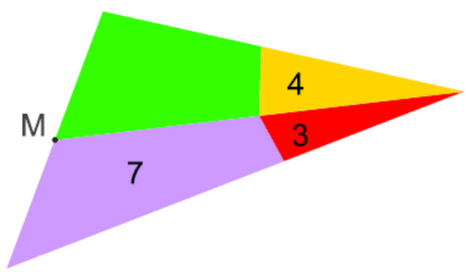
I tenint en compte que només interessen solucions positives z = 4. Substituint en les dues últimes equacions:

$$4x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$
$$4y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Per últim:

$$x+y+z=\frac{1}{2}+2+4=\frac{13}{2}$$

Juny 7-8:}



En la figura M és el punt mitjà del costat d'un triangle. Estan indicades les àrees de tres dels quatre polígons que formen el triangle inicial, pots calcular l'àrea del quart polígon?

Solució: La mediatriu divideix al triangle en dos triangles d'igual àrea (perquè els dos tenen la mateixa base i la mateixa altura). Com un d'aqueixos triangles té àrea (7 + 3 =) 10, l'altre també ha de tenir àrea 10 (= 4 + x). Per tant, l'àrea de la zona verda és (10 – 4 =) 6.

Juny 9: Quantes parelles de naturals de dues xifres verifiquen que el seu producte és un número de tres xifres iguals?

Solució: Busquem a, b, c, d $\in \mathbb{N}$ que verifiquen:

$$(10\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot(10\mathrm{c}+\mathrm{d}) = \mathrm{k}\cdot 111 = \mathrm{k}\cdot 3\cdot 37 \quad \text{con } \mathrm{k}\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

on 3·k·37 deu expressar-se en dos factors de dues xifres cadascun. Per tant, no poden donar-se els valors 1, 2 o 3 a k (perquè això generaria dos factors un de dues xifres i un altre de només una). Sembla doncs que hi haja sis solucions (que sorgeixen per a k = 4, 5, 6, 7, 8 i 9):

37 i 12 (amb producte 444)

37 i 15 (amb producte 555)

37 i 18 (amb producte 666)

37 i 21 (amb producte 777)

37 i 24 (amb producte 888)

37 i 27 (amb producte 999)

Però a aquestes sis solucions cal afegir una altra que proporciona un producte 888:

37.24 = 37·2·12 = 74·12 (amb producte 888)

En total hi ha set parelles de números de dues xifres tals que el seu producte és un número de tres xifres iguals

Juny 10: Si $a_1=1$, $a_2=-1$ y $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-2}$ per a tot n posterior a 2, trobar la suma dels 2019 primers termes de la successió.

Solució: La successió és: 1, - 1, - 1, 1, - 1, - 1, 1, …….(el període 1, - 1, -1 es repeteix indefinidament) on els uns estan en les posicions dels múltiples de tres. Fins a 2019 hi ha (2019:3 =) 673 múltiples de tres, és a dir hi haurà en la successió 673 uns i el doble (673·2=) 1346 de – 1. Per tant, la suma sol·licitada serà 673 – 1346 = - 673.

Juny 11-12: Dos caminants caminen per terreny pla a 4 km/h cadascun. En iniciar una prolongada pujada el primer li trau 12 km d'avantatge al segon. Si tots dos caminen a 3 km/h en la pujada, quina distància separarà als caminants quan tots dos estiguen pujant?

Solució: Quan el segon comence la pujada hauran passat tres hores des que ho va fer el primer. Com el primer puja a 3 km/h, la distància que hi ha entre els dos, en aquest moment és de (3·3 =) 9 km.

Juny 13: Trobar els reals x que compleixen:

$$x^3 < 64 < x^2$$

Solució: Tindrem:

$$x^3 < 64 \quad \Leftrightarrow \quad x < 4 \ (*)$$

$$64 < x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;\ -8[\cup]8;\ +\infty[\ (**)$$

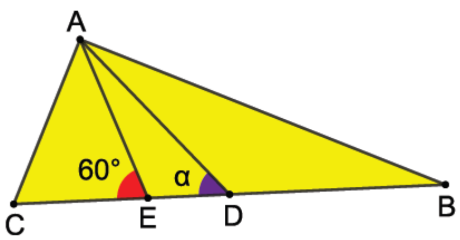
Ja que han de verificar-se conjuntament les dues condicions (*) i (**) ha de complir-se:

$$x < -8 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;\ -8[$$

Juny 14: Quants naturals n, menors o iguals a 100 compleixen que n^n siga un quadrat perfecte?

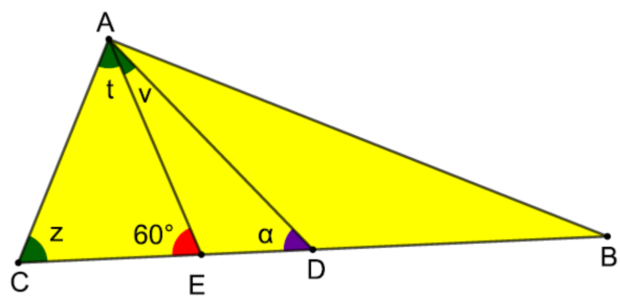
Solució: Si n és parell, fiquem, n = 2k, aleshores $n^n = (n)^{2k} = (n^k)^2$, per la qual cosa, ja hi ha 50 naturals que compleixen l'exigit. Por altra part, si n es imparell, fiquem n = 2k + 1, tindrem: $n^n = (n)^{2k+1} = (n^k)^2 \cdot n$, por el que n^n serà un quadrat perfecte sii ho és n, es dir sii n és 1, 9, 25, 49 o 81. En definitiva hi ha (50 + 5 =) 55 naturals que verifiquen la condició de l'enunciat.

Juny 15-16:



En el triangle ΔABC, D és el punt mitjà de CB, AD = CD i AE és la bisectriu de l'angle ∠CAB. Si ∠CEA = 60°, quant mesura l'angle ∠CDA = α?

Solució:



Siga v = ∠EAD, t = ∠CAE i z = ∠DCA = ∠DAC. Tenim que CD = AD = DB por la qual cosa ΔDAC i ΔDAB són isòsceles. Per tant ∠DAB = ∠DBA = $\frac{\alpha}{2}$, $t = v + \frac{\alpha}{2}$, $z = v + t$, α + v = 60° i z + t = 120°. La segona i quarta equació porta a:

$$t = 60 - \frac{v}{2}$$

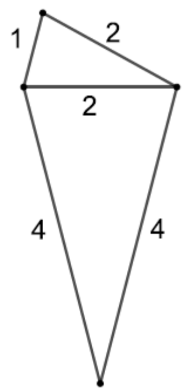
De la primera:

$$60-\frac{v}{2}=v+\frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; 2\cdot 60=3v+\alpha \;\Rightarrow (60=v+\alpha)\; 2\cdot(v+\alpha)=3v+\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=v$$

I de la tercera: $\alpha=v=30°$

Juny 17-18: Les longituds de dos costats d'un quadrilàter són 1 i 4 cm. Si una de les seues diagonals, de longitud 2 cm, divideix al quadrilàter en dos triangles isòsceles, quin és, en cm, el perímetre del quadrilàter?

Solució: L'única possibilitat és:



Ja que les altres possibilitats no generen quadrilàter al no complir-se la desigualtat triangular.

Per tant, el perímetre és (4 + 4 + 1 + 2 =) 11 cm

Juny 19: Quantes xifres té el número **$16^8 \cdot 5^{25}$**?

Solució: Tenim:

$$16^8\cdot 5^{25}=(2^4)^8\cdot 5^{25}=2^{32}\cdot 5^{25}=(2\cdot 5)^{25}\cdot 2^7=128\cdot 10^{25}$$

Por la qual cosa, el número té (3 + 25 =) 28 xifres.

Juny 20: El número 33^{33} el podem escriure com a suma de 33 imparells consecutius. Quin és el major de tots ells?

Solució: La suma de 33 imparells consecutius és igual a 33 vegades el d'en mig. Així el d'en mig és:

$$\frac{33^{33}}{33}=33^{32}$$

i el major, que estarà 16 llocs més enllà, diferirà del d'en mig en 32 unitats. Per tant, el número preguntat en el problema és:

$$33^{32}+32$$

Juny 21-22: En el conjunt dels primers 26 nombres naturals esborrem dos d'ells, de manera que el seu producte és igual a la suma dels 24 restants. Quin és el menor múltiple comú dels dos que hem esborrat?

Solució Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac): De l'enunciat, tindrem que si a i b són els dígits eliminats (a, b ≤ 26)

$$a \cdot b = (1 + 2 + 3 + \cdots + 26) - (a + b) = \frac{26 \cdot 27}{2} - (a + b) = 351 - (a + b)$$

Si suposem a < b, tenim:

$$a^2 < a \cdot b = 351 - (a + b) < 351 \quad \Rightarrow \quad a < \sqrt{351} = 18{,}79 \ldots \quad \Rightarrow \quad a \leq 18$$

Per altre costat:

$$a \cdot b = 351 - (a + b) > 551 - 2 \cdot 26 = 299 \quad \Rightarrow \quad a > \frac{299}{b} \geq \frac{299}{26} = 11{,}5 \quad \Rightarrow \quad a \geq 12$$

En definitiva $12 \leq a \leq 18$ i

$$a \cdot b + b = 351 - a \quad \Rightarrow \quad b = \frac{351 - a}{a + 1}$$

a	$b = \frac{351 - a}{a + 1}$
12	$\frac{339}{13}$
13	$\frac{169}{7}$
14	$\frac{337}{15}$
15	21
16	$\frac{335}{17}$
17	$\frac{167}{9}$
18	$\frac{333}{19}$

Per tant a = 15 i b = 21. D'on, m.c.m. (15, 21) = 105

Juny 23: Si

(1 + 3 + 5 + ... + p) + (1 + 3 + 5 + ... + q) = 1 + 3 + 5 +.....+ 25

trobar p i q

Solució: Recordem:

$$\text{Si } (a_n)_1^\infty \text{ és una PA } \Rightarrow \; a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

Amb el que:

$$1+3+5+\cdots+k=\frac{1+k}{2}\cdot\frac{1+k}{2}=\left(\frac{1+k}{2}\right)^2$$

D’on, la equació proposada és equivalent a:

$$\left(\frac{1+p}{2}\right)^2+\left(\frac{1+q}{2}\right)^2=\left(\frac{1+25}{2}\right)^2=169=13^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=13^2$$

que es tracta d'un cas particular d'equació diofàntica: les ternes pitagòriques. Ja va demostrar Euclides en els seus Elements, que les solucions de l'equació $x^2+y^2=z^2$ són: $x=m^2-n^2, y=2mn$ y $z=m^2+n^2$. Com en aquest cas 13 sols se pot ficar com una única suma de quadrats: $(13=3^2+2^2)$, les úniques solucions per a p i q en la equació plantejada són:

$$\frac{1+p}{2}=3^2-2^2=9-4=5 \quad\Rightarrow\quad p=9$$

$$\frac{1+q}{2}=2\cdot3\cdot2=12 \quad\Rightarrow\quad q=23$$

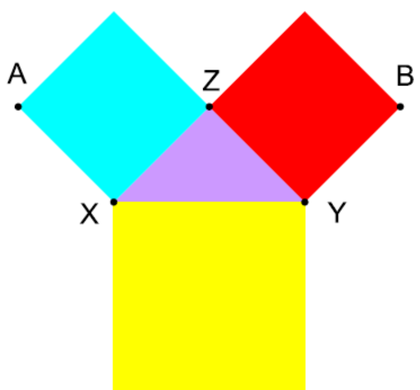
(o viceversa).

Juny 24: Quants números de quatre dígits amb un sis en les unitats de miler i un 4 en les desenes són divisibles per 36?

Solució: Els números tenen el format: 6a4b. Perquè siguen múltiples de 36 (= 9·4) ho han de ser de 9 i 4. Per a ser-ho de 4, les dues últimes xifres han ser múltiples de 4, la qual cosa porta a les possibilitats: 6a40, 6a44 i 6a48. Exigint que la suma de les xifres siga múltiple de 9

6a40	6 + a + 4 + 0 = 10 + a = 18 $\Rightarrow$ a=8	6840
6a44	6 + a + 4 + 4 = 14 + a = 18 $\Rightarrow$ a=4	6444
6a48	6 + a + 4 + 8 = 18 + a = 18 $\Rightarrow$ a=0	6048
	6 + a + 4 + 8 = 18 + a = 27 $\Rightarrow$ a=9	6948

Juny 25-26:



ΔXYZ és un triangle rectangle isòsceles. Sobre els seus costats es construeixen quadrats. Si d(A, B) = 16, quina és l'àrea total de la figura?

Solució: Per ser el triangle isòsceles d(X, Z) = d(Z, I). Per tant, el quadrat blau i el quadrat roig són iguals. D'on d(A, Z) = 8. Si c és el catet del triangle isòsceles, en aplicar Pitàgores aconseguim:

$$c^2 + c^2 = 64 \quad \Rightarrow c = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Per tant, l'àrea total de la figura és: (d(X, Y) = d(A, Z)):

$$A = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} + 8^2 = 144$$

Juny 27: Si a, b i c són naturals que compleixen abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104, quant val $a^2 + b^2 + c^2$?

Solució: Notem en primer lloc que els tres naturals han de ser parells (Si, per exemple, a és l'únic imparell la suma de l'enunciat té sis sumands parells i un imparell, per tant, la suma ha de ser imparell. Si, per exemple, a i b són els únics imparells, la suma de l'enunciat té quatre sumands parells i tres imparell, per tant, la suma ha de ser imparell. Si els tres naturals són imparells, la suma de l'enunciat té tots els set sumands imparells, per tant, la suma ha de ser imparell). Per tant, abc, ab, ac, bc, a + b + c, deuen ser múltiples de 4 (ja que 104 ho és). No pot donar-se a + b + c = 8 (a =2, b = 4; c = 2, per exemple) ja que, aleshores, la suma val 44. Vegam que ocorre si a + b + c = 12. Si a = 4, b = 4 y c = 4 tenim que la suma és 124. Si a =2, b = 4, c = 6, per exemple, aleshores, la suma de l'enunciat és 104. Per tant $a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$. Altres possibilitats se descarten d'igual manera: a = 2, b = 2, c = 8, o a = 2, b = 2, c =12.

Solució d'anònim (JORDI @JRDI53680678):

$$\begin{aligned} abc + ab + ac + bc + a + b + c &= ab(c+1) + c(a+b) + a + b + c \\ &= ab(c+1) + (c+1)(a+b) + c = (c+1)(ab+a+b) + c = 104 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c+1)(ab+a+b) + c + 1 = 105 &= (c+1)(ab+a+b+1) \\ &= (c+1)(a(b+1)+b+1) = (c+1)(a+1)(b+1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Per tant a, b i c son 2, 4 y 6 en algun ordre. D'ací: $a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$.

Solució Nèstor Abad (@nabadvin):

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &= abc + ab + ac + bd + a + b + c + 1 = 104 + 1 = 105 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \;\; \Rightarrow \;\; \{a, b, c\} = \{2,4,6\} \Rightarrow \; a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56 \end{aligned}$$

Juny 28: Trobar l'àrea del polígon els vèrtexs del qual són els punts en els quals es intersectan les corbes:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$$

$$\mathbf{(x - 4)^2 + 9y^2 = 81}$$

Solució: Trobem els punts de tall de les dues corbes resolent el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ (x-4)^2+9y^2=81 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -9x^2-9y^2=-9\cdot 25 \\ (x-4)^2+9y^2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow -8x^2-8x+160=0$$

$$\Rightarrow x^2+x-20=0 \quad \Rightarrow x=\frac{-1\pm 9}{2}\begin{cases} =4 & \Rightarrow y=\pm 3 \\ =-5 & \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

El polígon de l'enunciat resulta ser un triangle (perquè té tres vèrtexs (4, 3); (4, - 3) i (- 5, 0)) i la seua àrea resulta ser:

$$\mathrm{A}=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{\mathrm{d}\big((4,-3);(4,3)\big)\cdot\mathrm{d}\big((-5,0);(4,0)\big)}{2}=\frac{6\cdot 9}{2}=27$$

Juny 29-30:

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{} & \boxed{} \\ + & & \boxed{} & \boxed{} \\ \hline & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

Utilitzant totes les set xifres 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6 formem la suma que es mostra al costat. Quin és el resultat de la suma?

Solució:

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{} & \boxed{} \\ + & & \boxed{} & \boxed{} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

L'1 és fàcil de col·locar. A més, com la màxima suma que podem obtindre amb els sumands permesos és (6 + 5 =) 11, la columna de les desenes ha de ser 6 + 4 (= 10) o 4 + 6

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{6} & \boxed{} \\ + & & \boxed{4} & \boxed{} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{} \end{array}$$

Ja, sols, queden per col·locar 2, 3 i 5; però aquestes xifres es col·loquen de manera obvia 2 + 3 (=3 + 2) = 5

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{6} & \boxed{2} \\ + & & \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & & \boxed{6} & \boxed{3} \\ + & & \boxed{4} & \boxed{2} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & & \boxed{4} & \boxed{2} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{3} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & & \boxed{4} & \boxed{3} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{2} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array}$$