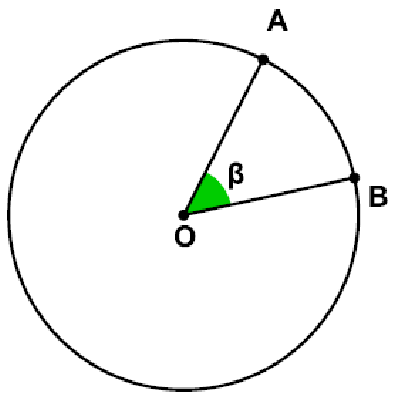
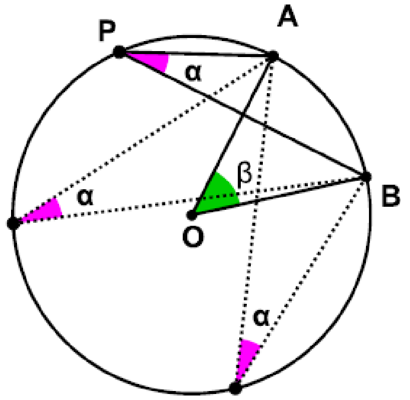
SOLUCIONES MAYO 2020

PROBLEMAS SOBRE ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA PARA SEGUNDO CICLO DE LA E.S.O. Y BACHILLERATO.
Autor: MARIO MESTRE. INS "El Pont de Suert"

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA: Sea una circunferencia de centro O y A y B dos puntos de ella.



$$\beta = \text{ángulo } \textbf{central} = \widehat{AB}$$

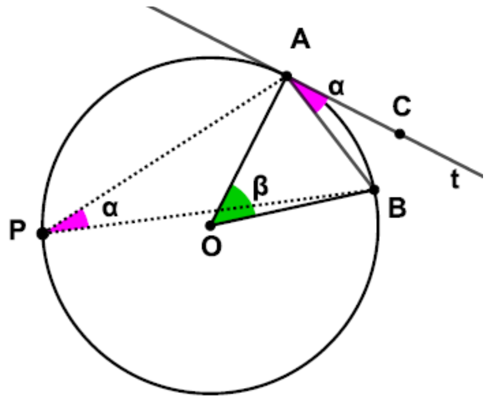


Si P es un punto cualquiera de la circunferencia se define ángulo **inscrito** al ángulo $\angle$APB. Se puede probar que el ángulo es el mismo, cualquiera que sea P y:

$$\alpha = \angle APB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

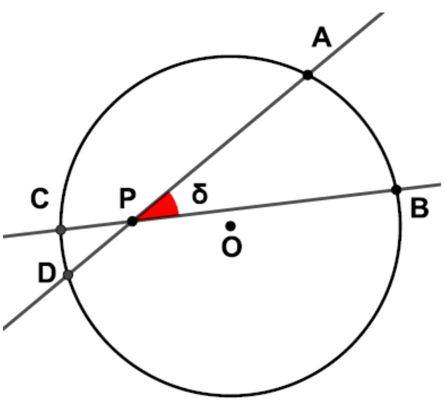
Es decir:

$$\text{ángulo inscrito} = \frac{\text{ángulo central}}{2}$$



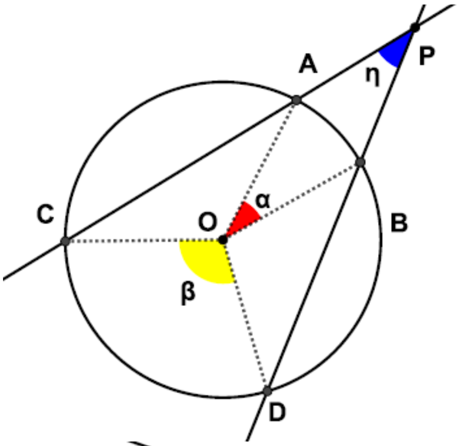
Sea AC la tangente a la circunferencia por el punto A. Al ángulo $\angle$CAB se le llama ángulo **semiinscrito** en A. Puede demostrarse que:

$$\angle CAB = \alpha = \text{ángulo semiinscrito} = \frac{\beta}{2} = \frac{\text{ángulo central}}{2}$$



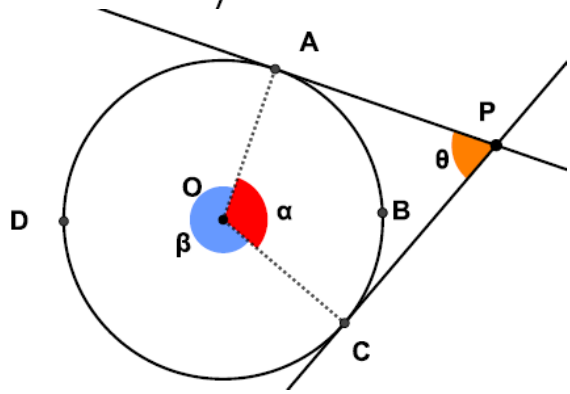
Si P es un punto interior de la circunferencia se define ángulo **interior** como el ángulo $\angle$APB (= $\angle$CPD = δ). Puede probarse que:

$$\text{ángulo interior} = \delta = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



Si P es un punto exterior de la circunferencia se define ángulo **exterior** como el ángulo $\angle APB$ (= $\angle CPD$ = η). Puede probarse que:

$$\text{ángulo exterior} = \eta = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$



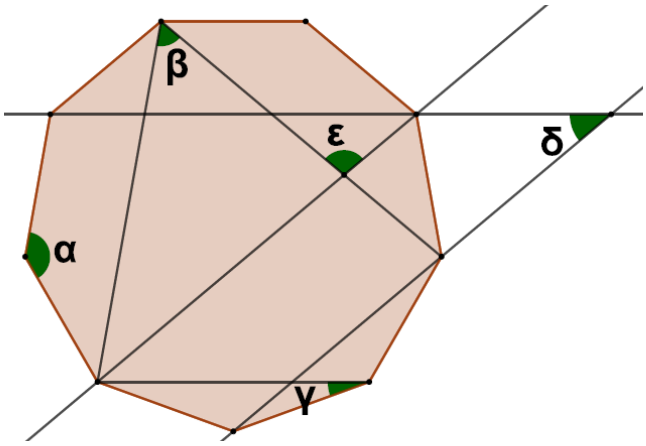
Si P es un punto exterior de la circunferencia y PA y PC son tangentes a la circunferencia en A y C, se define ángulo **circunscrito** como el ángulo $\angle APC = \theta$. Puede probarse que:

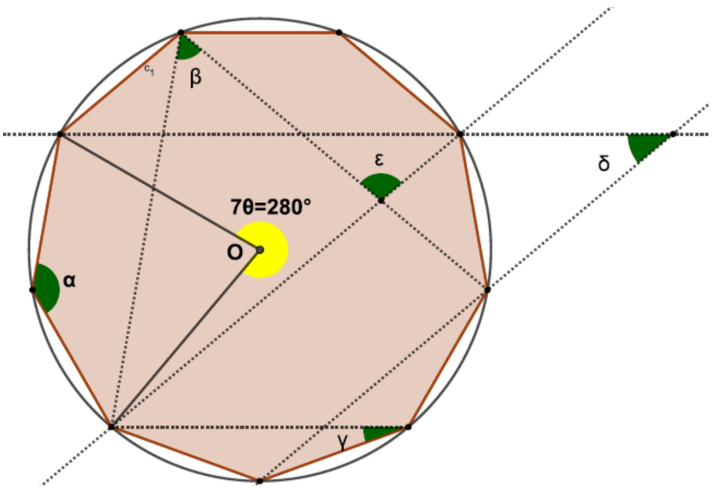
$$\text{ángulo circunscrito} = \theta = \frac{\widehat{ADC} - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Mayo 1-2: En la figura hay un eneágono regular. Se pide calcular el valor de los ángulos α, β, δ, ε y γ

Solución: El eneágono regular está inscrito en una circunferencia de centro O. Si unimos dos vértices consecutivos del eneágono con el punto O quedan generado nueve triángulos isósceles iguales con ángulo en el vértice O de (360°/9 =) 40° = θ.

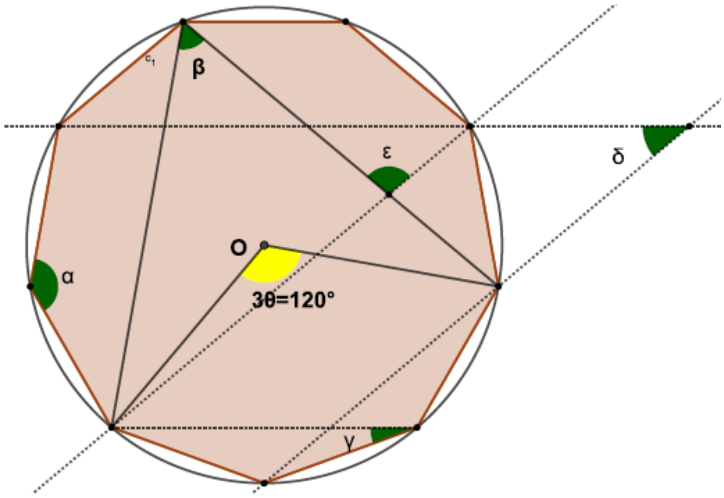
Una vez, en claro, este punto, tendremos:





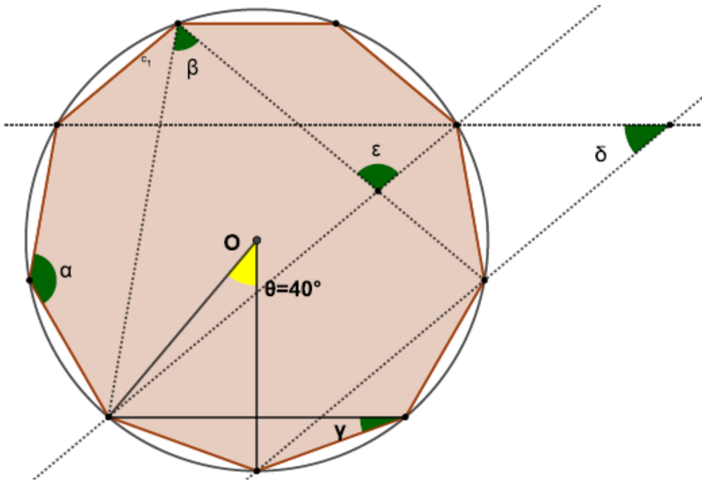
α es el ángulo inscrito asociado al ángulo central $7\cdot\theta$, por tanto:

$$\alpha = \frac{7\theta}{2} = \frac{280°}{2} = 140°$$



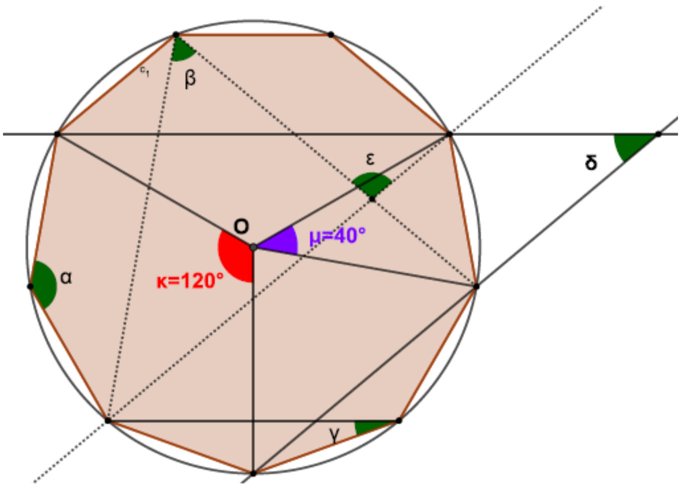
β es el ángulo inscrito asociado al ángulo central $3{\cdot}\theta$, por tanto:

$$\beta = \frac{3\theta}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$



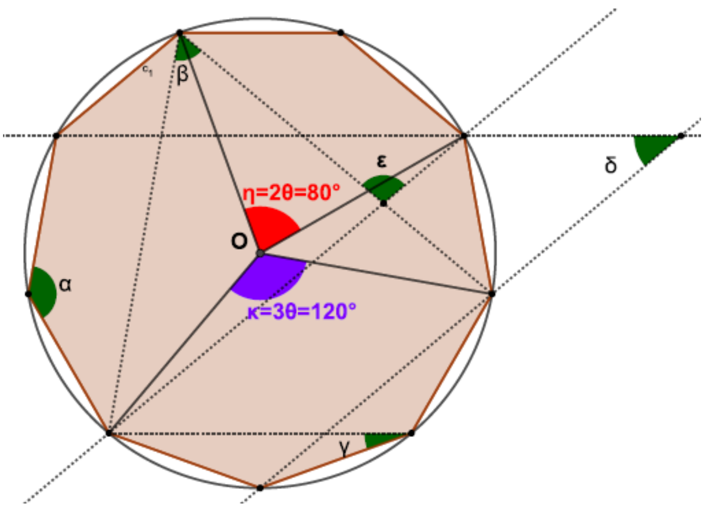
γ es el ángulo inscrito asociado al ángulo central θ, por tanto:

$$\gamma = \frac{\theta}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$



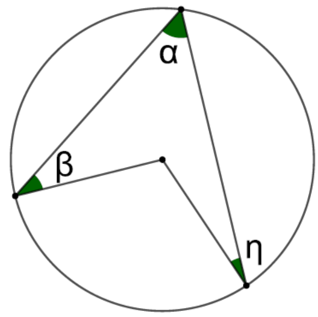
δ es el ángulo externo asociado a los ángulos centrales $\kappa = 3{\cdot}\theta$ y $\mu = \theta$, por tanto:

$$\delta = \frac{\kappa - \mu}{2} = \frac{120° - 40°}{2} = 40°$$

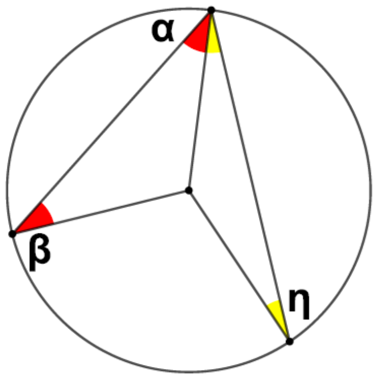


ε es el ángulo interno asociado a los ángulos centrales $\kappa = 3\theta$ y $\eta = 2\theta$, por tanto:

$$\varepsilon = \frac{\kappa + \eta}{2} = \frac{120° + 80°}{2} = 100°$$



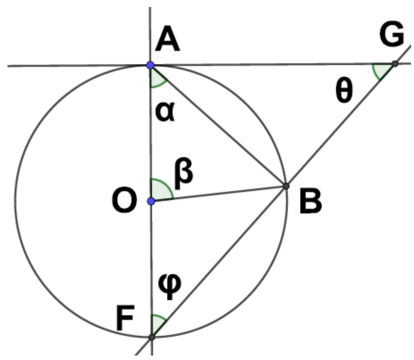
<u>Mayo 3:</u> Si β=34°30’ y η=20°30’, calcular α.



<u>Solución:</u> Si dibujamos el radio que une el centro de la circunferencia con el vértice del ángulo α quedan formados dos triángulos isósceles (pues tienen dos lados iguales al radio de la circunferencia). Con ello

$$\alpha = \beta + \eta = 34°30' + 20°30' = 55°$$

<u>Mayo 4-5:</u> Si O es el centro de la circunferencia, AG es la tangente por A, el ángulo α vale 48°, calcular los ángulos β, θ y φ



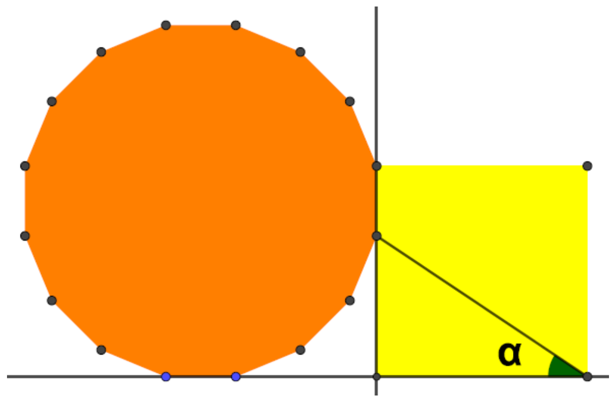
<u>Solución:</u> α = 48° es el ángulo inscrito del ángulo central 180° - β = (2·48° =) 96° $\Rightarrow$ β = 84°

φ es el ángulo inscrito del ángulo central β. Por tanto; $\varphi = \frac{\beta}{2} = \frac{84°}{2} = 42°$

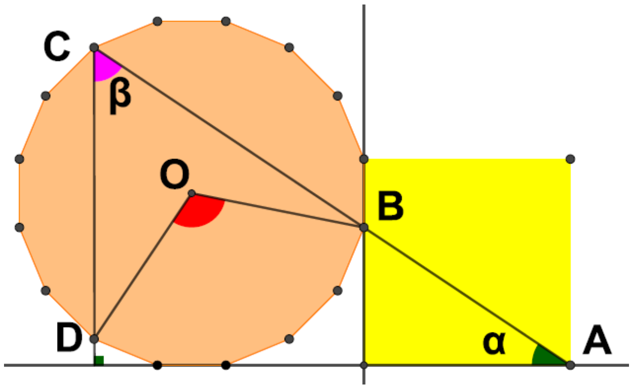
Por último, θ es el ángulo exterior asociado a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AF}$, por tanto:

$$\theta = \frac{\widehat{AF} - \widehat{AB}}{2} = \frac{\angle AOF - \angle AOB}{2} = \frac{180° - \beta}{2} = \frac{180° - 84°}{2} = 48°$$

<u>Mayo 6-7:</u> En la figura se presenta un cuadrado y un polígono regular de 16 lados. Calcular el ángulo α



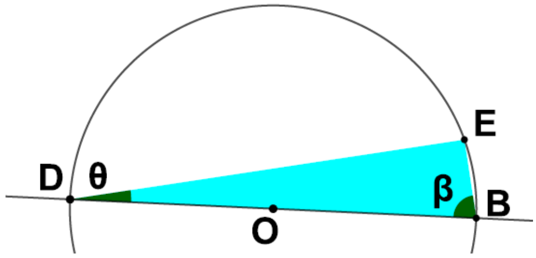
Solución: Al prolongar el lado corto del ángulo α obtenemos los segmentos AC y CD. Entonces:



$$\alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = \frac{\angle DOB}{2} = \frac{5 \cdot \frac{360^\circ}{16}}{2} = 56^\circ\, 15'$$

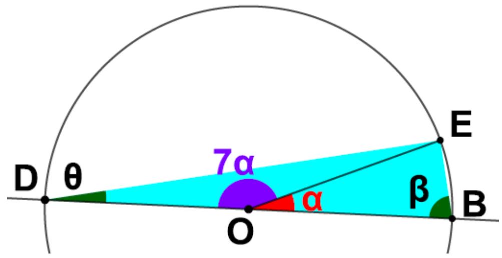
$$\alpha = 90^\circ - 56^\circ\, 15' = 33^\circ\, 45'$$

Mayo 8-9: Sea una circunferencia de centro O. Si arc EB = α y arc ED = 7α, hallar los ángulos θ y β



Solución: Una vez hemos dibujado el ángulo central asociado al arco $\widehat{EB}$, tenemos:

$$180^\circ = \widehat{DB} = \widehat{DE} + \widehat{EB} = 7\alpha + \alpha = 8\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{180^\circ}{8}$$
$$= 22^\circ\;\, 30'$$



Por tanto:

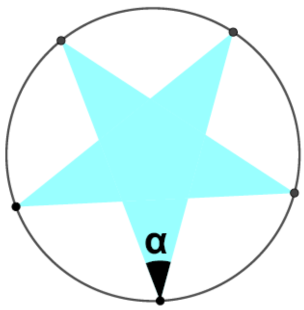
$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{22^\circ\;\, 30'}{2} = 11^\circ\;\, 15'$$

Por último:

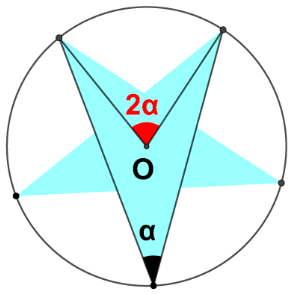
$$\beta = 90^\circ - \theta = 78^\circ\;\, 45'$$

ya que el triángulo ΔDEB es rectángulo en E

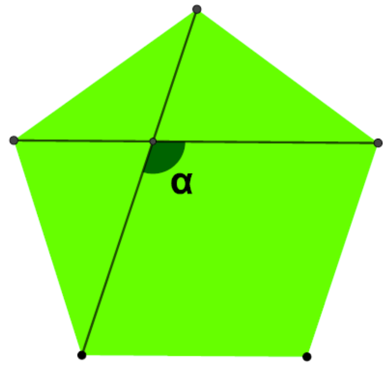
Mayo 10: En una estrella regular de 5 puntas, hallar α



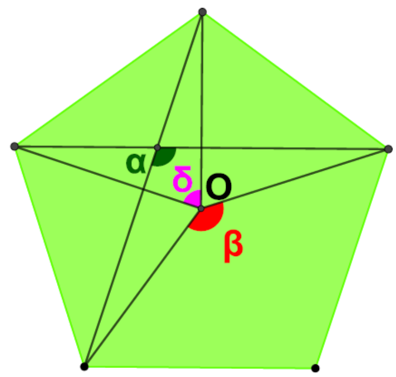
Solución: Una vez obtenido el centro de la circunferencia, tenemos que α es el ángulo inscrito asociado al ángulo central:



$$2\alpha = \frac{360^\circ}{5}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36^\circ$$

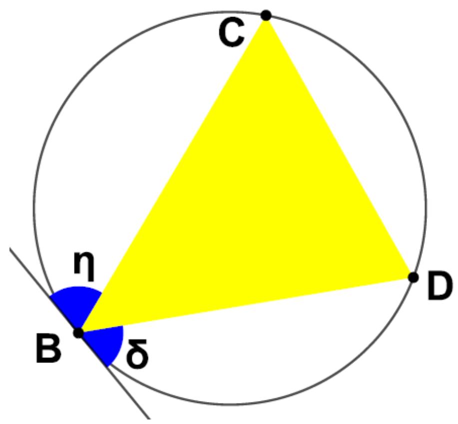


<u>Mayo 11:</u> En un pentágono regular, hallar α



<u>Solución:</u> Una vez obtenido el centro, O, de la circunferencia que circunscribe el pentágono regular, tenemos que, α es el ángulo interior asociado a los ángulos centrales β y δ, por lo que:

$$\alpha = \frac{\delta + \beta}{2} = \frac{\frac{360°}{5} + 2 \cdot \frac{360°}{5}}{2} = 108°$$



<u>Mayo 12-13:</u> En la figura hay una circunferencia y una tangente a ella. Si η =70° y δ = 60°, hallar los ángulos del triángulo ΔBCD

<u>Solución:</u> Obviamente,

$$\angle B = 180° - (\eta + \delta) = 180° - (70° + 60°) = 50°$$

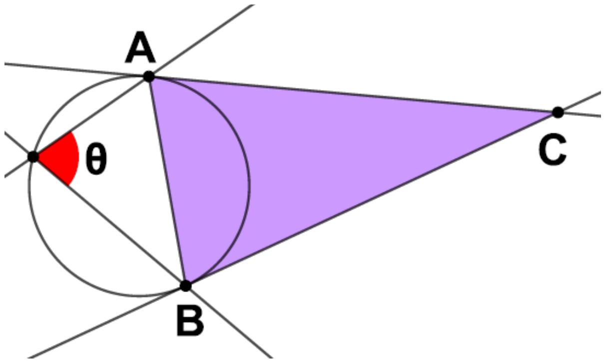
Por otra parte, $\angle$C y δ abarcan el mismo arco: $\widehat{BD}$, luego:

$$\angle C = \delta = 60°$$

Por último:

$$\angle D = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - (50° + 60°) = 70°$$

Mayo 14-15: En la circunferencia el ángulo θ mide 75°, hallar los ángulos del triángulo ΔABC.



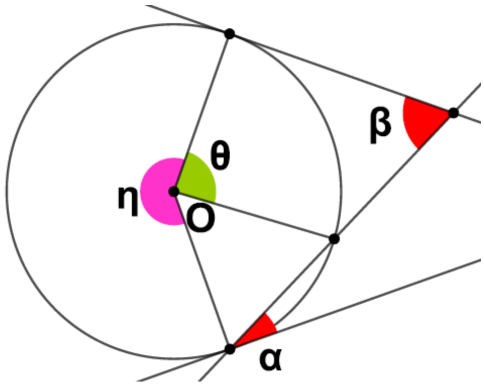
Solución: Los ángulos θ, $\angle$A y $\angle$B son iguales pues abarcan el mismo arco: $\widehat{AB}$. Luego:

$$\theta = \angle A = \angle B = 75°.$$

Por último:

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (75° + 75°) = 30°$$

Mayo 16-17: Sea una circunferencia de centro O. Si α = 27° y β = 66°, hallar los ángulos η y θ.



Solución: Por un lado, α y 360° - (η + θ) son iguales pues abarcan el mismo arco, luego:

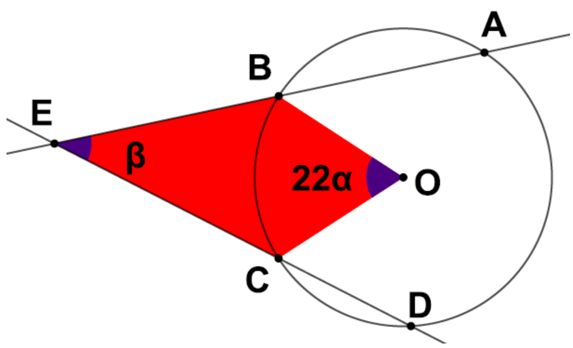
$$2 \cdot 27° = 360° - (\eta + \theta) \quad \Rightarrow \quad 306° = \eta + \theta \;\; (*)$$

Por otro lado, β es al ángulo exterior asociado a η y θ, por tanto:

$$66° = \frac{\eta - \theta}{2} \quad \Rightarrow \quad 132° = \eta - \theta \;\; (**)$$

Por último, (*) y (**) forman un sistema, fácilmente resoluble que proporciona: η = 219° y θ = 87°

Mayo 18-19: En la figura una circunferencia de centro O. Si arc DA = 48α, arc BADC = 98α, arc BC = 22α calcular α y β



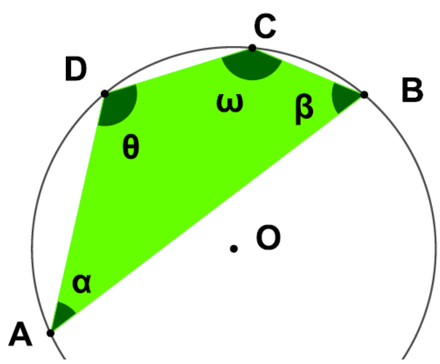
Solución: Tendremos:

$$\widehat{BC} + \widehat{BAC} = 360° \quad \Rightarrow \quad 22\alpha + 98\alpha = 360° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3°$$

Ahora, β es el ángulo externo asociado a $\widehat{AD}$ y $\widehat{BC}$, por tanto:

$$\beta = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} = \frac{48\alpha - 22\alpha}{2} = 13 \cdot \alpha = 13 \cdot 3° = 39°$$

Mayo 20-21: En la figura hay una circunferencia de centro O. α, β y ω están en razón 8:12:28. Hallar α, β, ω y θ



Solución: Puesto que estamos ante un cuadrilátero cíclico, tenemos: $\alpha + \omega$ = 180° (1) y $\theta + \beta$ = 180° (2).

Del enunciado:

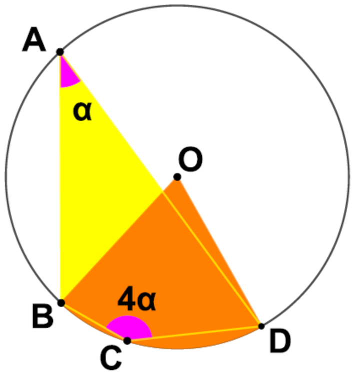
$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{8}{28} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{8}{28}\omega \;\; (3)$$

Las ecuaciones (1) y (3) forman un sistema con solución: ω = 140° y α = 40°.

Del enunciado:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{8}{12} = \frac{40°}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = 60°$$

Por último, de (2): $\theta = 180° - 60° = 120°$



Mayo 22-23: En la figura tenemos una circunferencia de radio 25 cm. Hallar área y perímetro del sector circular de color naranja.

Solución: Tendremos:

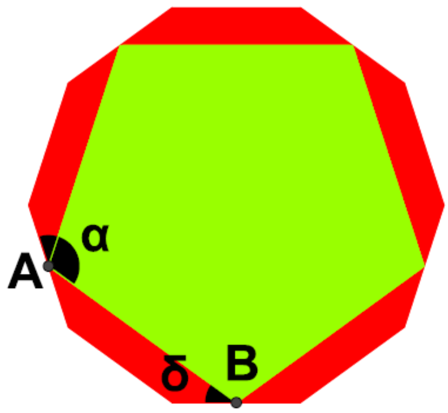
$$360° = \widehat{BD} + \widehat{BAD} = 2\alpha + 8\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{360°}{10} = 36°$$

Luego el ángulo del sector circular naranja es: $\angle BOD = 2\alpha = 2 \cdot 36° = 72°$. Su área es, por tanto:

$$A = \frac{72 \cdot 25^2 \cdot \pi}{360} = 125\pi \text{ cm}^2$$

Y su perímetro es:

$$P = 2r + \frac{2\pi \cdot 25 \cdot 72}{360} = 50 + 10\pi = 10(5 + \pi)$$



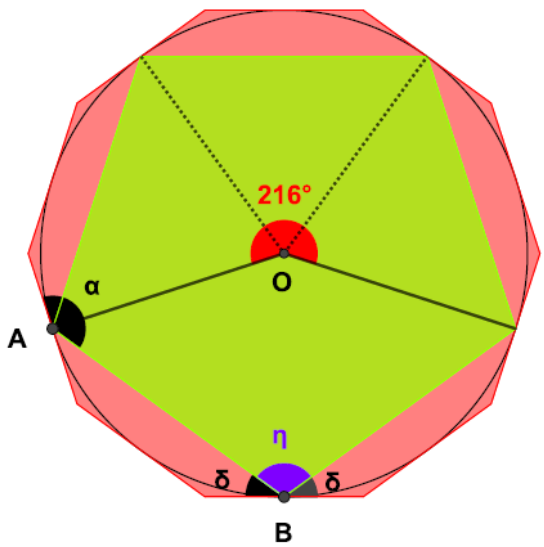
Mayo 24: El pentágono y el decágono son regulares. Los puntos A y B, son puntos medios. Hallar α y δ.

Solución: Una vez hallado el centro, O, de la circunferencia que inscribe al pentágono, tendremos que η es el ángulo inscrito asociado al ángulo central

$$3\frac{360°}{5} = 216° \;\Rightarrow\; \eta = \frac{216°}{2} = 108°$$

Y, por tanto:

$$\delta + \eta + \delta = 180° \;\Rightarrow\; \delta = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$



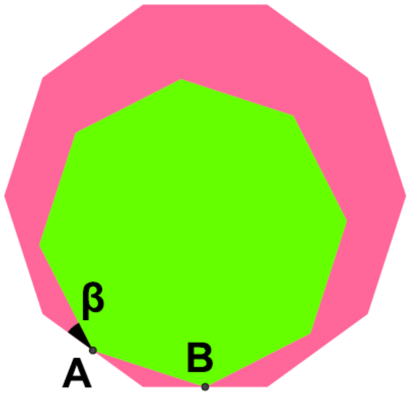
Para α, tenemos:

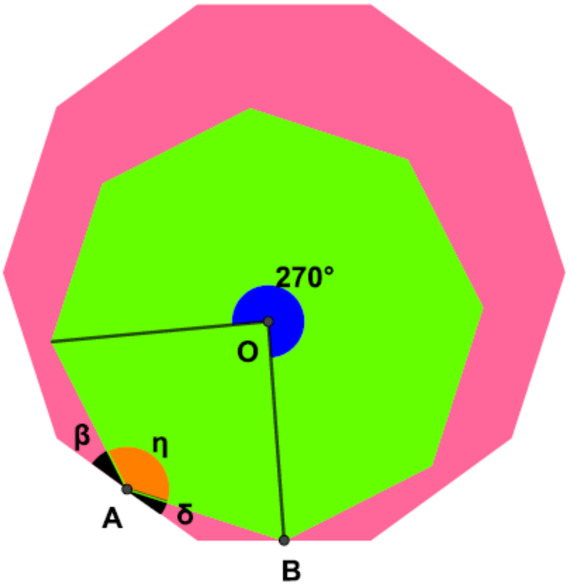
$$\alpha = 180° - \delta = 180° - 36° = 144°$$

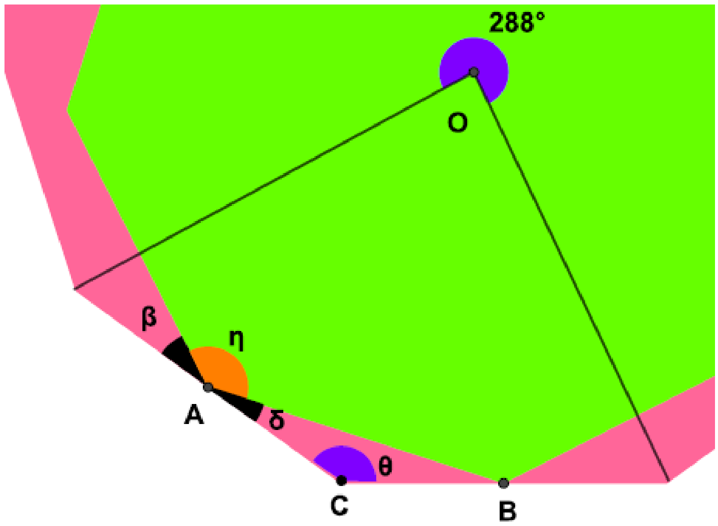
O también:

$$\alpha = \eta + \delta = 108° + 36° = 144°$$

Mayo 25: En la siguiente ilustración, A y B son los puntos medios de dos lados consecutivos de un decágono regular y los extremos de un lado de un octógono regular. Hallar β







Solución: Consideremos el ángulo η, generado por las aristas con extremo A del octógono regular. Su ángulo central asociado es:

$$6 \cdot \frac{360°}{8} = 270°$$

por lo tanto:

$$\eta = \frac{270°}{2} = 135°$$

Consideremos ahora el triángulo ΔABC, que es isósceles, pues AC = CB. En ese triángulo, el ángulo θ es el ángulo inscrito en el decágono, asociado al ángulo central

$$8 \cdot \frac{360°}{10} = 288°$$

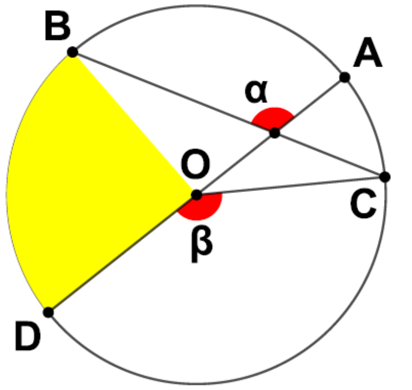
por lo que:

$$\theta = \frac{288°}{2} = 144° \;\Rightarrow\; \delta = \frac{180° - 144°}{2} = 18°$$

Por último:

$$\beta + \eta + \delta = 180° \;\Rightarrow\; \beta = 180° - 135° - 18° = 27°$$

Mayo 26-27: En la figura hay una circunferencia de centro O y radio 2020. Si α = 116° y β = 147°, hallar área y perímetro del sector circular amarillo



Solución: Tenemos:

$$116° = \alpha = \frac{\widehat{DC}+\widehat{AB}}{2} = \frac{\beta+\widehat{AB}}{2} \;\Rightarrow\; \widehat{AB} = 2\cdot 116° - 147° = 85°$$

Por otra parte:

$$\widehat{AC} = 180° - \widehat{DC} = 180° - 147° = 33°$$

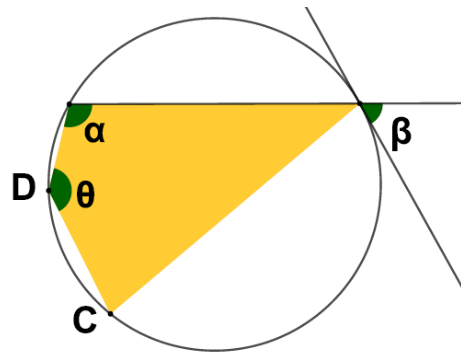
Por último:

$$\widehat{DB} = 360° - \widehat{AB} - \widehat{AC} - \widehat{DC} = 360° - 85° - 33° - 147° = 95°$$

Por consiguiente:

$$A = \frac{95\cdot\pi\cdot 2020^2}{360} = \frac{9690950}{9}\pi;\;\; P = 2\cdot 2020 + \frac{2\cdot\pi\cdot 2020\cdot 95}{360} = 4040 + 9595\pi$$

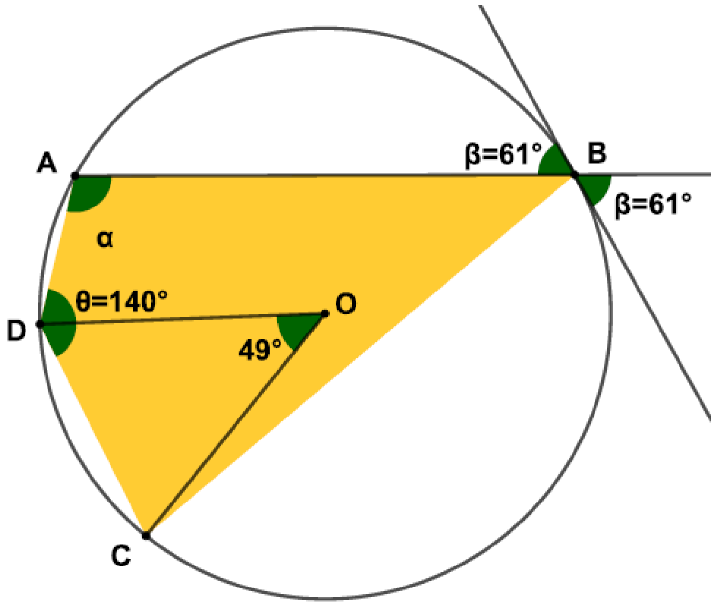
Mayo 28-29: En la figura hay una circunferencia y una tangente a ella. Si θ = 140°, arc DC = 49° y β = 61°, hallar α.



Solución: Tendremos:

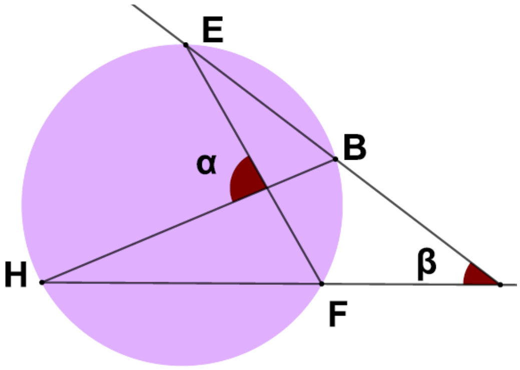
$$\alpha = \frac{\widehat{DCB}}{2} = \frac{\widehat{DC}+\widehat{CB}}{2} = \frac{49°+\widehat{CB}}{2}\;(*)$$

$$\widehat{CB} = \widehat{CBA} - \widehat{BA} = 2\theta - 2\beta = 2\cdot 140° - 2\cdot 61° = 158°$$



Por tanto, en (*):

$$\alpha = \frac{49°+\widehat{CB}}{2} = \frac{49°+158°}{2} = 103°\;\;30'$$



Mayo 30-31: En la figura tenemos una circunferencia. Hallar arc FB y arc EH si α = 83° y β = 37°

Solución: Tendremos:

$$\left.\begin{aligned} 83° = \alpha = \frac{\widehat{HE} + \widehat{FB}}{2} \\ 37° = \beta = \frac{\widehat{HE} - \widehat{FB}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \widehat{HE} + \widehat{FB} = 166° \\ \widehat{HE} - \widehat{FB} = 74° \end{aligned}\right\} (*)$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$2 \cdot \widehat{HE} = 240° \Rightarrow \widehat{HE} = 120°$$

Sustituyendo en la primera ecuación de (*):

$$\widehat{FB} = 166° - 120° = 46°$$