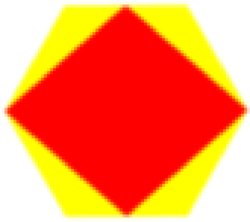
SOLUCIONS SETEMBRE 2020

Problemes per a batxillerat. 16-18 anys. Autors: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid. "XXI Concurso de Primavera. 2017"

https://www.concursoprimavera.es/#libros

Setembre 1: L'àrea del rombe inscrit en l'hexàgon regular és 24 cm^2. Trobar l'àrea de l'hexàgon regular



Solució: Siga r el radi de la circumferència circumscrita a l'hexàgon regular (i igual al costat de l'hexàgon). Llavors el rombe es descompon en quatre triangles rectangles de catets r i $\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Per tant:

$$A_{\text{rombe}} = 4 \cdot \frac{r \cdot \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = r^2 \cdot \sqrt{3} = 24$$

Finalment, podem descompondre l'hexàgon en sis triangles equilàters de costat r. Per tant:

$$\mathbf{A_{hexàgon}} = 6 \cdot A_{\Delta} = 6 \cdot \frac{r \cdot \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{6}{4} \cdot r^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{6}{4} \cdot 24 = \mathbf{36\ cm^2}$$

Setembre 2: Calcular la xifra de les unitats de la suma de tots els productes de huit en huit dels números de l'1 al 9

Solució: La suma de l'enunciat es:

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{9!}{k}$$

Cada sumand de l'anterior suma conté, almenys, un factor 2 i un factor 5 (i per tant la xifra de les unitats de cadascun d'ells és 0) excepte el sumand corresponent a k = 5 que és: 9·8·7·6·4·3·2. Agrupant de dos en dos els factors del producte anterior i tenint en compte únicament la xifra de les unitats de cada producte:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \rightarrow 4 \cdot 4 \rightarrow 6$$

Setembre 3: Si a, b i c son enters positius amb

$$\mathbf{abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104}$$

, quant val $a^2+b^2+c^2$?

Solució: Tenim successivament:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = ab(c + 1) + b(c + 1) + a(c + 1) + c = 104$$

Sumant en els dos costats 1, pleguem a:

$$ab(c + 1) + b(c + 1) + a(c + 1) + c + 1 = 105$$

$$(ab + b + a + 1)\,(c + 1) = 105 = 3\cdot5\cdot7$$

$$(a + 1)\,(b + 1)\,(c + 1) = 105 = 3\cdot5\cdot7$$

$$a\cdot b\cdot c = 2\cdot4\cdot6$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$$

<u>Setembre 4:</u> Quants punts de la circumferència $x^2 + y^2 = 50$ tenen almenys una de les coordenades enteres?

<u>Solució:</u> Hi ha 30 punts en els quals x és enter: des de x = –7 fins a x = 7 (incloent x = 0). Són 15 abscisses enteres. Considerem el doble perquè amb la mateixa abscissa hi ha dos punts amb ordenades oposades. Igualment hi ha 30 punts amb y entera. Però hi ha 12 punts que tenen tant x com i senceres i que han sigut comptades dues vegades: (±5; ±5); (±1; ±7); (±7; ±1). Així doncs, la resposta és: 30 + 30 – 12 = 48

<u>Setembre 5:</u> Si

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{tg\,x + tg\,y = 25}\\ \mathbf{cotg\,x + cotg\,y = 30}\end{array}\right\}$$

quant val tg (x+y)?

<u>Solució:</u> De les relacions trigonomètriques del angle suma i resta tenim:

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tgx} + \mathrm{tgy}}{1 - \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} = \frac{25}{1 - \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}}$$

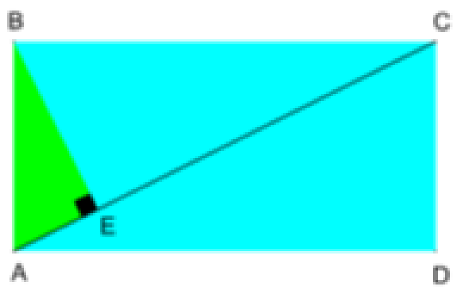
De la segona equació:

$$30 = \frac{1}{\mathrm{tgx}} + \frac{1}{\mathrm{tgy}} = \frac{\mathrm{tgy} + \mathrm{tgx}}{\mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} = \frac{25}{\mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Per últim:

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{25}{1 - \mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} = \frac{25}{1 - \frac{5}{6}} = 150$$

<u>Setembre 7-8:</u> Els costats del rectangle de la figura són un el doble de l'altre. Si BE⊥AC. Quin és el quocient entre l'àrea del triangle ΔABE i l'àrea del rectangle ABCD?



Solució: Si considerem AB = 1 aleshores AD = 2 i AC = $\sqrt{5}$. A més, tenim: $\Delta AEB \cong \Delta ABC$ (al ser els dos rectangles i tenir en comú l'angle en A). Per tant:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{BE}{2} \Rightarrow BE = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AE = \sqrt{1^2 - BE^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow A_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{A_{\Delta ABE}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{10}$$

Setembre 9: Siga donat z = 9 + bi amb b>0. Si les parts imaginàries de z^2 i z^3 són iguals, quin és el valor de b?

Solució: Tenim:

$$z^2 = (9 + bi)^2 = 81 - b^2 + 18bi$$
$$z^3 = (9 + bi)^3 = 729 - 27b^2 + (162b + 81b - b^3)i$$

Com les parts imaginaries dels dos complexos són iguals, tenim:

$$18b = 243b - b^3 \quad \Rightarrow \quad 0 = -b^3 + 225b \quad \Rightarrow \quad b \in \{0, -15, 15\}$$

I com b > 0, aleshores b = 15

Setembre 10: Resoldre en ℕ

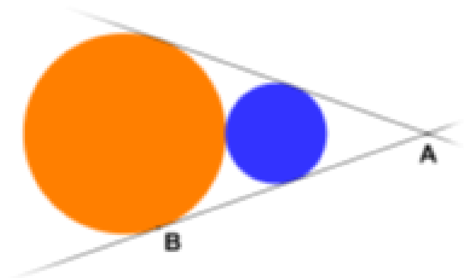
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p + q \leq 100} \\ \mathbf{\frac{p + q^{-1}}{p^{-1} + q} = 17} \end{aligned}\right\}$$

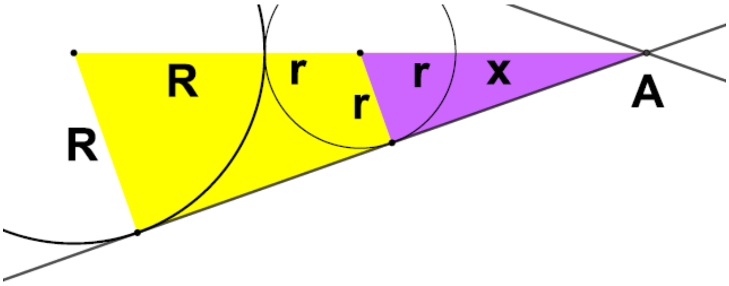
Solució: De l'equació tenim:

$$\frac{p + q^{-1}}{p^{-1} + q} = 17; \quad \frac{p + \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} + q} = 17; \quad \frac{\frac{pq + 1}{q}}{\frac{1 + pq}{p}} = 17; \quad \frac{p}{q} = 17; \quad p = 17q$$

I com p + q $\leq$ 100, tenim que 18q $\leq$ 100. D'on q$\in$\{1, 2, 3, 4, 5\} i p = 17q $\in$\{17, 34, 51, 68, 85\}. En definitiva: (q, p) $\in$\{(1,17); (2, 34); (3, 51); (4, 68); (5, 85)\}

Setembre 11-12: En la figura hi ha dues circumferències tangents entre si i tangents a dues rectes que es tallen en A. Si B és un punt de tangència, trobar AB en funció dels radis de les circumferències





Solució: Els triangles de la figura adjunta són semblants (perquè són rectangles en ser radi i tangent perpendiculars i tindre l'angle en A comú), per tant:

$$\frac{x+r}{r}=\frac{x+2r+R}{R}$$

D'on, obtenim:

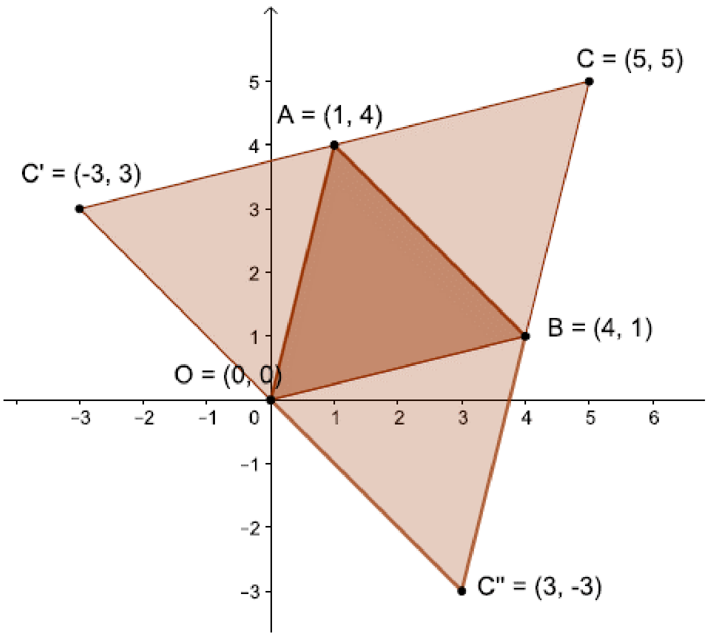
$$x=\frac{2r^2}{R-r}$$

Per últim:

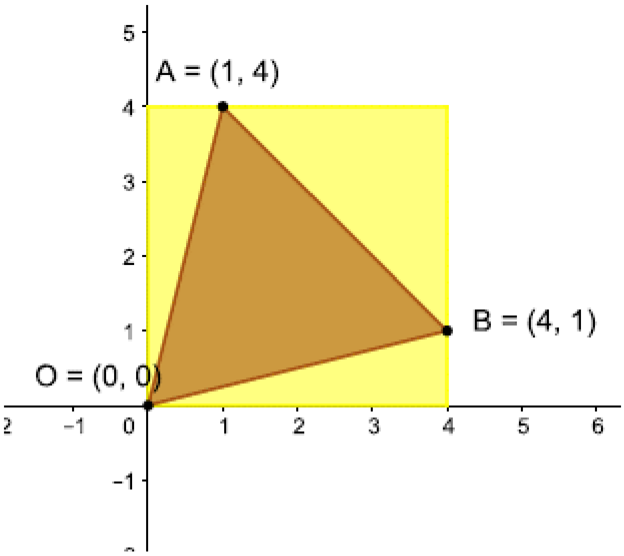
$$AB=d(A,B)=\sqrt{(R+2r+x)^2-R^2}=\sqrt{\left(R+2r+\frac{2r^2}{R-r}\right)^2-R^2}=\cdots=\frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}$$

Setembre 14: Tres vèrtexs d'un paral·lelogram són els punts O (0,0); A (1,4) i B (4,1). Calcular l'àrea del paral·lelogram.

Solució: Són possibles tres paral·lelograms: OABC, OABC' y OABC''. Tots ells tenen la mateixa àrea que es el doble de l'àrea del triangle ΔOAB



Per a calcular l'àrea del triangle ΔOAB, tenim:



$$A_{\Delta ABO} = 4^2 - \frac{1}{2}(4\cdot 1) - \frac{1}{2}(4\cdot 1) - \frac{1}{2}(3\cdot 3) = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{15}{2}\cdot 2 = 15$$

<u>Setembre 15:</u> Resoldre en ℕ

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{1 \le a \le 10} \\ \mathbf{a^{2020} + a^{2021} = \dot{\hat{5}}} \end{array}\right\}$$

<u>Solució:</u> Veurem si es compleix o no la segona equació per a cadascun dels possibles valors de a, que segons la primera doble inequació són, a $\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Utilitzarem el fet que $a^{2020} + a^{2021} = a^{2020}\cdot(1 + a)$

a = 1 no és solució perquè, per a a = 1, tenim:

$1^{2020}\cdot(1 + 1) = 1\cdot 2 = 2$, que no és múltiple de 5

a = 2 no és solució perquè, per a a = 2 tenim:

$2^{2020}\cdot 3$ no és múltiple de 5 perquè 2^{2020} acaba en 6 i no en 0 o 5, perquè

n	2^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	2
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	4
3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	8
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	6

a = 3 no és solució perquè, per a a = 3 tenim:

$3^{2020}\cdot 4$ no és múltiple de 5 perquè 3^{2020} acaba en 1 i no en 0 o 5, perquè

n	3^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	3
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	9

3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	7
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	1

a = 4 és solució perquè, per a a = 4 tenim:

$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 4^{2020} \cdot 5$ que és múltiple de 5

a = 5 és solució perquè, per a a = 5 tenim:

$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 5^{2020} \cdot 6$ que és múltiple de 5

a = 6 no és solució perquè, per a a = 6 tenim:

$6^{2020} \cdot 7$ no és múltiple de 5 perquè 6^{2020} acaba en 6 i no en 0 o 5

a = 7 no és solució perquè, per a a = 7 tenim:

$7^{2020} \cdot 8$ no és múltiple de 5 perquè 7^{2020} acaba en 1 y no en 0 o 5, perquè

n	7^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	7
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	9
3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	3
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	1

a = 8 no és solució perquè, per a a = 8 tenim:

$8^{2020} \cdot 9$ no és múltiple de 5 perquè 8^{2020} acaba en 6 i no en 0 o 5, perquè

n	8^n acaba en
1, 5, 9, …… $\equiv 1(4)$	8
2, 6, 10,… $\equiv 2(4)$	4
3, 7, 11,… $\equiv 3(4)$	2
4, 8, 12,… $\equiv 0(4)$	6

a = 9 és solució perquè, per a a = 9 tenim:

$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 9^{2020} \cdot 10$ que és múltiple de 5, perquè acaba en 0

a = 10 és solució perquè, per a a = 10 tenim:

$a^{2020} + a^{2021} = a^{2020} \cdot (1 + a) = 10^{2020} \cdot 11$ que és múltiple de 5, al ser-lo de 10

En total, són solucions a = 4, a = 5, a = 9 i a = 10

Setembre 16: Les ordenades en l'origen de tres rectes paral·leles són 2, 3 i 4. La suma de les abscisses dels punts de tall de les rectes amb l'eix X és – 36, quin és el pendent de les tres rectes?
Solució: Siguen

$$y = mx + 2$$
$$y = mx + 3$$
$$y = mx + 4$$

les rectes de l'enunciat. Les abscisses dels punts de tall de les rectes amb l'eix OX són

$$\frac{-2}{m};\ \frac{-3}{m};\ \frac{-4}{m}$$

I aleshores

$$\frac{-2}{m}+\frac{-3}{m}+\frac{-4}{m}=-36;\ \ \frac{-9}{m}=-36;\ \ m=\frac{-9}{-36}=\frac{1}{4}$$

Setembre 17-18: Suposem huit sobres numerats de l'1 a les 8 i huit targetes numerades també de l'1 al 8. De quantes formes poden ser distribuïdes les targetes, una en cada sobre, de manera que cap de les targetes 1, 2 i 3 estiga en el sobre amb el seu mateix número?

Solució: Sense haver-hi restriccions, hi hauria 8! maneres de distribuir les targetes. Caldrà llevar-los aquelles on estiga bé la targeta 1 (7!), la targeta 2 (7!) i la targeta 3 (7!); però hem llevat de més, aquelles on estiga bé la 1 i la 2 que les hem comptades dues vegades (6!), la 1 i la 3 (6!) i la 2 i la 3 (6!); però ara hem comptat de més, cal llevar els casos en què estan bé la 1, la 2 i la 3 (5!). Així, que el número demanat és:

$$8! - 3\cdot 7! + 3\cdot 6! - 5! = 5!\cdot(8\cdot 7\cdot 6 - 3\cdot 7\cdot 6 + 3\cdot 6 - 1) = 5!\cdot 217 = 27240$$

Setembre 19: Quants enters entre 10 i 1000 verifiquen que la suma de les seues xifres és 3?

Solució: Només cal ser una mica ordenats: Les xifres que podrem utilitzar són: 0, 1, 2 i 3.

De dues xifres tenim: 12, 21 i 30.

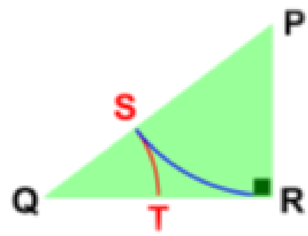
De tres xifres tindrem: 102, 111, 120, 201, 210 i 300.

En total 9 números.

Setembre 21: Quants enters positius de tres xifres no tenen dígits diferents a 7, 8 o 9?

Solució: Són les variacions amb repetició de tres elements (la xifra 7, la xifra 8 i la xifra 9) preses de tres en tres, és a dir $3^3 = 27$.

Setembre 22-23: Siga ΔPRQ un triangle rectangle en R. La circumferència amb centre P i radi PR talla a PQ en S i la circumferència amb centre Q i radi QS tala a QR en T. Si T és el punt mitjà de QR trobar QS/SP



Solució: Tindrem, successivament:

$$QP^2 = (QS+SP)^2 = QR^2 + PR^2; \quad QS^2 + SP^2 + 2\cdot QS\cdot SP = 4\cdot QS^2 + PR^2$$

$$SP^2 + 2\cdot QS\cdot SP = 3\cdot QS^2 + PR^2,\ \ SP^2 + 2\cdot QS\cdot SP = 3\cdot QS^2 + SP^2,$$

$$2\cdot QS\cdot SP = 3\cdot QS^2,\ \ 2\cdot SP = 3\cdot QS \ \Rightarrow\ \frac{QS}{SP}=\frac{2}{3}$$

<u>Setembre 24:</u> Trobar els parells d'enters (x, y) amb $0 \le x \le y$ que compleixen:

$$\mathbf{5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624}$$

<u>Solució:</u> Respecte de l'equació, tenim:

$$5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624;\;\; 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 2x = 624$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 = 624 + 1;\;\; (2x - y)^2 + (x + 1)^2 = 625 = 25^2$$

Fent m = 2x – y i n = x + 1, tenim que $m,n \in \mathbb{Z}$ (perquè x i y són enters) i a més:

$$m^2 + n^2 = 25^2$$

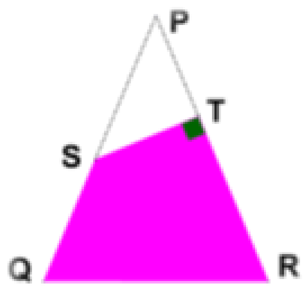
Com (15, 20, 25) i (7, 24, 25) son les úniques ternes pitagòriques d'hipotenusa 25 i $n = x + 1 \ge 1$ (perquè $x \ge 0$), les úniques solucions enteres per a m i n (amb $n \ge 1$) apareixen en les dues primeres columnes de la següent taula. Les demés columnes obtenen x i y i si se compleix la restricció $x \le y$

m	n	**x**	**y**	¿0 ≤ x ≤ y?
0	25	**24**	**48**	Si
25	0	-1	-26	No
20	15	14	8	No
-20	15	**14**	**48**	Si
15	20	**19**	**23**	Si
-15	20	**19**	**53**	Si
7	24	**23**	**39**	Si
-7	24	**23**	**53**	Si
24	7	6	-12	No
-24	7	**6**	**36**	Si

Per exemple, per a la primera fila tenim:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 1 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \cdot 24 = 48 \\ x = 24 \end{cases}$$

<u>Setembre 25-26:</u> En un triangle isòsceles ΔPQR, PQ = PR i QR = 300. Sobre el costat PR es pren T i sobre el costat PQ es pren S tal que TS ⊥TR. Si ST = 120, TR = 271 i QS = 221, trobar l'àrea del quadrilàter STRQ



Solució: En ser PQ = PR, si PT = x, llavors PS = x + 50 i les dimensions dels catets del triangle rectangle ∆PTS són x i 120 i la hipotenusa x + 50, per tant:

$$(x+50)^2 = x^2 + 120^2 \quad \Rightarrow \quad x = 119 \text{ y } A_{\Delta PTS} = \frac{120 \cdot 119}{2} = 7140$$

D'altra banda, calculem l'àrea del triangle isòsceles ∆PQR, per a això calculem l'altura sobre el costat QR:

$$\sqrt{390^2 - 150^2} = 360$$

Per tant, l'àrea serà:

$$\frac{300 \cdot 360}{2} = 54000$$

L'àrea sol·licitada és: 54000 – 7140 = 46860

Setembre 28: Siguen a, b i c enters diferents que compleixen a·b·c = 17955; a, b i c (i en aquest ordre) estan en PA; 3a+b, 3b+c i 3c+a (i en aquest ordre) estan en PG. Calcular a, b i c

Solució: Si a, b i c estan en progressió aritmètica, podem posar: a = b – d i c = b + d: Així, que 3a + b = 4b – 3d; 3b + c = 4b + d i 3c + a = 4b + 2d, i com aquests, estan en progressió geomètrica:

$$(4b+d)^2 = (4b-3d) \cdot (4b+2d) \quad \Rightarrow \quad 16b^2 + 8bd + d^2 = 16b^2 - 4bd - 6d^2$$

$$12bd = -7d^2$$

Com d ≠ 0 (perquè, en cas contrari a = b = c i 17955 no és un cub perfecte), resulta que:

$$d = -\frac{12b}{7}; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{19b}{7}, c = -\frac{5b}{7}$$

I com a·b·c = 17955, tenim:

$$\frac{19b}{7} \cdot b \cdot \frac{-5b}{7} = 17955 \quad \Rightarrow \quad b^3 = -9261 \quad \Rightarrow \quad b = -21 \quad \Rightarrow a = -57 \text{ y } c = 15$$

Setembre 29: Siguen a, b i c tres números en PG. Trobar-los si la suma d'ells és 114 i el seu producte 46656.

Solució: Al estar a, b i c en progressió geomètrica tenim:

$$a = \frac{b}{r} \text{ y } c = br \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \cdot c = b^3 = 46656 \quad \Rightarrow \quad b = 36$$

Per tant: a + 36 + c = 114 i per tant: a + c = 78

$$\frac{36}{r} + 36r = 78; \quad 6r^2 - 13r + 6 = 0, \quad r = \frac{3}{2} \text{ o } r = \frac{2}{3}$$

Els números que estan en progressió geomètrica són: 24, 36, 54 o 54, 36, 24

Setembre 30: Trobeu el valor numèric de $\mathbf{x^2 + y^2}$ sabent que:

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{x^2 = 8x + y}\\ \mathbf{y^2 = 8y + x}\\ \mathbf{x \neq y}\end{array}\right\}$$

<u>Solució 1 (a la força bruta):</u> De la primera equació tenim y = x^2 – 8x i substituint y en la segona:

$$(x^2 - 8x)^2 = 8(x^2 - 8x) + x \;\; \Rightarrow \;\; x^4 - 16x^3 + 56x^2 + 63x = 0$$

Si x = 0, aleshores y (= 0^2 – 8·0) = 0 que contradiu la tercera condició del sistema. Per tant x ≠ 0, i aleshores:

$$x^3 - 16x^2 + 56x + 63 = 0$$

	1	-16	56	63
9		9	-63	63
	1	-7	-7	0

$$(x - 9) \cdot (x^2 - 7x - 7) = 0$$

Si x = 9, aleshores y (= 9^2 – 8·9) = 9 que contradiu la tercera condició del sistema. Per tant x ≠ 9.

$$(x^2 - 7x - 7) = 0 \;\; \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7 + \sqrt{77}}{2} & \Rightarrow \;\; y_1 = \dfrac{7 - \sqrt{77}}{2} \\ x_2 = \dfrac{7 - \sqrt{77}}{2} & \Rightarrow \;\; y_2 = \dfrac{7 + \sqrt{77}}{2} \end{cases}$$

Per tant:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{7 + \sqrt{77}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7 - \sqrt{77}}{2}\right)^2 = 63$$

<u>Solució 2:</u> Sumant las dues primeres equacions, tenim:

$$x^2 + y^2 = 9 \cdot (x + y) \; (*)$$

Restant las dues primeres equacions, tenim:

$$x^2 - y^2 = 7 \cdot (x - y) \;\; \Rightarrow \;\; (x + y) \cdot (x - y) = 7(x - y)$$

I com x ≠ y, deu ser x + y = 7 i substituint en (*)

$$x^2 + y^2 = 9 \cdot (x + y) = 9 \cdot 7 = 63$$