

## SOLUCIONS OCTUBRE 2020

PROBLEMES PER A 3ESO, 4ESO I BATXILLERAT. AUTOR: MARIO MESTRE. INS "PONT DE SUERT". 14-18 AÑOS

**Octubre 1:** Trobeu k per a que les arrels de  $3x^2+5x-k=0$  disten dues unitats.

**Solució:** Recordem les relacions de Cardano-Vietà: Si  $x_1$  i  $x_2$  són les solucions de  $ax^2 + bx + c = 0$  aleshores:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

En el nostre cas tindrem:

$$S = x_1 + x_1 + 2 = 2x_1 + 2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-\frac{5}{3} - 2}{2} = -\frac{11}{6} \Rightarrow x_2 = x_1 + 2 = -\frac{11}{6} + 2 = \frac{1}{6}$$

I, per últim:

$$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{11}{6} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{11}{36} = -\frac{k}{3} \Rightarrow k = \frac{11}{12}$$

**Octubre 2:** Trobar els valors de m que fan que

$$mx^2 - (m + 3)x + 2 = 0$$

tinga dues arrels reals oposades

**Solució:** Si  $x_1$  y  $x_2$  són les arrels del polinomi i són oposades:

$$S = 0 = \frac{m + 3}{m} \Rightarrow m = -3$$

**Octubre 3:** Calcular p i q perquè les arrels de  $x^2 + px + q = 0$  siguin D i 1-D, on D és el discriminant de l'equació.

**Solució:** Tindrem que  $D = p^2 - 4q$ . Per tant, les arrels del polinomi han de ser

$$x_1 = p^2 - 4q ; x_2 = 1 + 4q - p^2$$

Aplicant les relacions de Cardano-Vietà:

$$1 = S = x_1 + x_2 = -p \Rightarrow p = -1 \Rightarrow x_1 = 1 - 4q; x_2 = 4q$$

$$x_1 \cdot x_2 = q = (1 - 4q) \cdot 4q \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Per tant  $(p, q) \in \{(-1, 0); (-1, 3/16)\}$

**Octubre 5:** Siga l'equació  $x^2+px+q=0$ . Trobeu p i q perquè p i q siguin les solucions de l'equació.

**Solució:** Tindrem en aplicar les relacions de Cardano-Vietà:

$$\begin{cases} S = p + q = -p \\ P = p \cdot q = q \end{cases}$$

De la segona equació:

$$q \cdot (p - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ p = 1 \end{cases}$$

I substituint en la primera: Si  $q = 0$ , llavors  $p = 0$ . Si  $p = 1$ , llavors  $q = -2$ .

Les solucions són:  $(p, q) \in \{(0, 0); (1, -2)\}$

**Octubre 6:** Si  $r$  i  $s$  són les solucions de l'equació  $x^2 - 17x + 13 = 0$ , calculeu el valor de  $r^3 + s^3$

**Solució:** Tindrem, si  $S = r + s$  i  $P = r \cdot s$ :

$$(r + s)^3 = r^3 + 3r^2s + 3rs^2 + s^3 \Rightarrow r^3 + s^3 = S^3 - 3 \cdot P \cdot S$$

Aplicant les relacions de Cardano-Vietà:

$$S = r + s = 17; \quad P = r \cdot s = 13$$

D'on:

$$r^3 + s^3 = S^3 - 3 \cdot P \cdot S = 17^3 - 3 \cdot 17 \cdot 13 = 4250$$

**Octubre 7:** Si  $a$  i  $b$  són les arrels de  $x^2 - 2x - 143 = 0$ , trobeu el valor de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

**Solució:** Tindrem, si  $S = a + b$  i  $P = a \cdot b$  que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b + a}{a \cdot b} = \frac{S}{P}$$

Aplicant les relacions de Cardano-Vietà:

$$S = 2; \quad P = -143$$

I, per últim:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{S}{P} = -\frac{143}{2}$$

**Octubre 8-9:** Siga  $P(x) = (x+1) \cdot (x-8) + m$ .

- Hi ha valors de  $m$  per als que  $P(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ?
- Hi ha valors de  $m$  per als que  $P(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ?
- Si  $a$  i  $b$  són les arrels de  $P(x)$ , trobeu  $m$  per a que  $a^2 + b^2 = 1$ .

**Solució:** Tenim:

$$P(x) = (x+1) \cdot (x-8) + m = x^2 - 7x - 8 + m$$

Pel que la seua representació gràfica, és una paràbola dirigida cap amunt, (perquè el seu coeficient principal és positiu), amb vèrtex (mínim de la gràfica)

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{2}; \quad y_V = \left(\frac{7}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{7}{2} - 8\right) + m = -\frac{81}{4} + m$$

- El polinomi serà positiu si la  $y$  del vèrtex és positiu, és a dir sii

$$-\frac{81}{4} + m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{81}{4}$$

b) No hi ha valors de  $m$  per als quals  $P(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , perquè la paràbola és dirigida cap amunt (per a qualsevol valor de  $m$ ) i per tant hi ha valors positius de la paràbola (per a qualsevol valor de  $m$ ).

c) Si  $S = a + b$  i  $P = a \cdot b$ , tenim:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = S^2 - 2P$$

Per Cardano-Vietà:  $S = 7$  y  $P = m - 8$ . Per tant:

$$1 = a^2 + b^2 = S^2 - 2P = 7^2 - 2m + 16 \Rightarrow m = 32$$

**Octubre 10:** Si  $\alpha$  i  $\beta$  són les arrels de:

$$0 = x^2 - 4x + 22$$

calculeu el valor de

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta^3 + \beta^2 + \beta$$

**Solució:** Si  $S = \alpha + \beta$  i  $P = \alpha \cdot \beta$ , tenim:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta^3 + \beta^2 + \beta = S^3 - 3PS + S^2 - 2P + S = 4^3 - 3 \cdot 4 \cdot 22 - 2 \cdot 22 + 4 = -224$$

**Octubre 12-13:** Siga donat el polinomi:

$$P(x) = x^3 + x - m$$

i  $a$ ,  $b$  i  $c$  les seues arrels. Trobeu  $m$  per a que

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = m \quad (*)$$

**Solució:** En primer lloc, notem que (\*) implica que  $a$ ,  $b$  i  $c$  són no nuls (de ser-ho alguna arrel, no tindria sentit dividir per ella). I per l'última relació de Cardano-Vietà tindrem  $m \neq 0$  (perquè  $m = abc$ ).

Tindrem:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = m \Leftrightarrow abc \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = m \Leftrightarrow \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = 1 \quad (**)$$

Considerem el polinomi en  $t$ :  $Q(t) = P(1/t)$ . Busquem les arrels de  $Q(t) = 0$ . Al ser  $P(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$ , tenim:

$$Q(t) = \left( \frac{1}{t} - a \right) \cdot \left( \frac{1}{t} - b \right) \cdot \left( \frac{1}{t} - c \right) = 0 \Rightarrow t \in \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\}$$

Però:

$$0 = Q(t) = P\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} - m = \frac{-mt^3 + t^2 + 1}{t^3} \Leftrightarrow -mt^3 + t^2 + 1 = 0$$

I, aplicant les relacions de Cardano-Vietà a aquest polinomi, tenim

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 0$$

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{m}$$

Per últim, tenint en compte (\*\*):

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \begin{cases} = \frac{1}{m^2} \\ = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{m^2} = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

**Octubre 14:** Si  $\alpha$  i  $\beta$  són les solucions de  $x^2 - 9x - 70 = 0$ , calculeu el valor de  $|\alpha - \beta|$

**Solució:** Ens demanen calcular:

$$|\alpha - \beta| = +\sqrt{(\alpha - \beta)^2} = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} \quad (*)$$

Per les relacions de Cardano-Vietà, tenim:

$$S = \alpha + \beta = 9; \quad P = \alpha \cdot \beta = -70$$

I, com:

$$(\alpha + \beta)^2 = \begin{cases} = 9^2 \\ = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \end{cases}$$

Tindrem:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 9^2 - 2 \cdot (-70) = 221$$

Per últim, en (\*):

$$|\alpha - \beta| = +\sqrt{221 - 2 \cdot (-70)} = 19$$

**Octubre 15:** Si  $r$  i  $s$  són les arrels de:

$$0 = x^2 + 2020x + 2019$$

calculeu el valor de

$$r \cdot (1 - r) + s \cdot (1 - s)$$

**Solució:** Tenim:

$$r(1 - r) + s(1 - s) = -(r^2 + s^2) + r + s \quad (*)$$

De les relacions de Cardano-Vietà:

$$S = r + s = -2020; \quad rs = 2019$$

I, com:

$$(r + s)^2 = \begin{cases} = (-2020)^2 \\ = r^2 + s^2 + 2rs \end{cases} \Rightarrow r^2 + s^2 = (-2020)^2 - 2 \cdot 2019 = 4076362$$

Per últim, en (\*)

$$r(1 - r) + s(1 - s) = -(r^2 + s^2) + r + s = -4076362 - 2020 = -4078382$$

**Octubre 16-17:** Resolgueu el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z + t &= 2 \\ xy + xz + xt + yz + yt + zt &= -7 \\ xyz + xyt + xzt + yzt &= -8 \\ xyzt &= 12 \end{aligned} \right\}$$

**Solució:** Resoldre el sistema anterior és equivalent a resoldre

$$u^4 + bu^3 + cu^2 + du + e = 0$$

complint els coeficients

$$\text{suma de solucions de l'equació} = -b = 2$$

$$\text{suma de productes de dues solucions de l'equació} = c = -7$$

$$\text{suma de productes de tres solucions de l'equació} = -d = -8$$

$$\text{producte de les quatre solucions de l'equació} = e = 12.$$

L'equació resultant és:

$$u^4 - 2u^3 - 7u^2 + 8u + 12 = 0$$

Resolent per Ruffini:

	1	-2	-7	8	12
-1		-1	3	4	-12
	1	-3	-4	12	0
-2		-2	10	-12	
	1	-5	6	0	
2		2	-6		
	1	-3	0		

Amb el que:

$$u^4 - 2u^3 - 7u^2 + 8u + 12 = 0 = (u + 1) \cdot (u + 2) \cdot (u - 2) \cdot (u - 3) \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = -2 \\ u = 2 \\ u = 3 \end{cases}$$

Es dir, les solucions del sistema són  $(x, y, z, t) = (-1, -2, 2, 3)$  i les permutacions del vector numèric

**Octubre 19:** Siguen  $\alpha$  i  $\beta$  les arrels de l'equació  $x^2 - 8x + 9 = 0$ .

Calculeu:

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$$

**Solució:** Tindrem:

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2 &= \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - 2 + \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} - 2 = (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - 4 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2 \cdot \beta^2} - 4 = \{\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2} - 4 \end{aligned}$$

Per les relacions de Cardano-Vietà:

$$\alpha + \beta = 8; \quad \alpha\beta = 9$$

Amb el que:

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2} - 4 = 8^2 - 2 \cdot 9 + \frac{8^2 - 2 \cdot 9}{9^2} - 4 = \frac{3448}{81}$$

**Octubre 20:** Siguen s i r les solucions de l'equació:

$$x^2 - 2020x + a^2 - 4040a + 4080400 = 0$$

Calculeu a per a que s·r siga mínim.

**Solució:** De les relacions de Cardano-Vietà:

$$s \cdot r = a^2 - 4040a + 4080400 = (a - 2020)^2$$

Per tant, s·r serà mínim quan a = 2020.

**Octubre 21:** Calculeu  $a^2 + b^2 + c^2$  sent a, b i c les solucions de l'equació:

$$3x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

**Solució:** De les relacions de Cardano-Vietà tenim:

$$a + b + c = \frac{2}{3}; \quad ab + ac + bc = \frac{5}{3}; \quad abc = \frac{7}{3}$$

Però:

$$(a + b + c)^2 = \left. \begin{aligned} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot \frac{5}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{26}{9}$$

Per tant, el polinomi té dues arrels complexes oposades i una arrel real.

**Octubre 22-23:** Siguen a, b i c les arrels de l'equació:

$$0 = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$$

Trobeu l'equació amb arrels

$$\alpha = \frac{a + 1}{a + 2(b + c)}; \quad \beta = \frac{b + 1}{b + 2(a + c)}; \quad \eta = \frac{c + 1}{c + 2(a + b)}$$

**Solució:** Tindrem:

$$\alpha = \frac{a+1}{a+2(b+c)} = \frac{a+1}{2(a+b+c)-a} = \frac{a+1}{2\frac{1}{2}-a} = \frac{a+1}{1-a}$$

$$\beta = \frac{b+1}{b+2(a+c)} = \frac{b+1}{2(a+b+c)-b} = \frac{b+1}{2\frac{1}{2}-b} = \frac{b+1}{1-b}$$

$$\eta = \frac{c+1}{c+2(a+b)} = \frac{c+1}{2(a+b+c)-c} = \frac{c+1}{2\frac{1}{2}-c} = \frac{c+1}{1-c}$$

Per tant, la relació entre les arrels de l'equació donada i la que ens demanen és:

$$y = \frac{x+1}{1-x}$$

Aïllant  $x$ , tenim:

$$y(1-x) = 1+x \Rightarrow y-1 = x+yx = x(1+y) \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$

I substituït en l'equació original:

$$0 = 2\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 + 3\left(\frac{y-1}{y+1}\right) - 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow 3y^3 - 5y^2 + y - 7 = 0$$

**Octubre 24:** Obtenir les relacions de Cardano-Viète per als polinomis de tercer grau

**Solució:** Tindrem, si  $x_1, x_2$  i  $x_3$  són les arrels de  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ :

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) = a \cdot (x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \cdot (x-x_3) \\ &= a(x^3 - x_1x^2 - x_2x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + x_1x_3x + x_2x_3x - x_1x_2x_3) \\ &= ax^3 + a(-x_1 - x_2 - x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a(x_1x_2x_3) \end{aligned}$$

I igualant coeficients:

$$\begin{aligned} b &= -a(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ c &= a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ d &= -a(x_1x_2x_3) \Rightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

**Octubre 26:** Obtenir les relacions de Cardano-Viète per a un polinomi de grau quatre

**Solució:** Tindrem, si  $x_1, x_2, x_3$  i  $x_4$  són les arrels de  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ :

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= a(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \\ &= a \cdot (x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \cdot (x^2 - x_3x - x_4x + x_3x_4) \cdot \\ &= a(x^4 - x_1x^3 - x_2x^3 + x_1x_2x^2 - x_3x^3 + x_1x_3x^2 + x_2x_3x^2 - x_1x_2x_3x - x_4x^3 \\ &\quad + x_1x_4x^2 + x_2x_4x^2 - x_1x_2x_4x + x_3x_4x^2 - x_1x_3x_4x - x_2x_3x_4x + x_1x_2x_3x_4) \\ &= ax^4 + a(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4)x^3 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 \\ &\quad - a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + a(x_1x_2x_3x_4) \end{aligned}$$

Igualant coeficients:

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$d = -a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \Rightarrow x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$e = a(x_1x_2x_3x_4) \Rightarrow x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$$

**Octubre 27-28:** Siga  $f(x) = (x^2 + 10x + 25)^{1010} - 3x + 2$  i  $r_i$  per  $a \in \{1, 2, \dots, 2020\}$  les seues arrels. Calculeu:

$$\sum_{i=1}^{2020} (r_i + 5)^{2020}$$

**Solució:** Tindrem:

$$0 = f(r_i) = (r_i^2 + 10r_i + 25)^{1010} - 3r_i + 2 = (r_i + 5)^{2020} - 3r_i + 2 \Rightarrow (r_i + 5)^{2020} = 3r_i - 2$$

Per tant:

$$\sum_{i=1}^{2020} (r_i + 5)^{2020} = 3 \sum_{i=1}^{2020} r_i - 2 \cdot 2020 = 3S - 4040$$

Per a calcular S desenvolupem  $f(x)$  i apliquem les relacions de Cardano-Vietà:

$$f(x) = (x + 5)^{2020} - 3x + 2 = x^{2020} + \binom{2020}{1} x^{2019} \cdot 5 + \dots \Rightarrow S = -5 \cdot \binom{2020}{1} = -10100$$

Per últim:

$$\sum_{i=1}^{2020} (r_i + 5)^{2020} = 3S - 4040 = 3 \cdot (-10100) - 4040 = -34340$$

**Octubre 29:** Trobeu tres número que sumen 6, que la suma dels seus quadrats siga 38 y la suma dels seus cubs siga 144

**Solució:** Es demana resoldre el sistema:

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 38 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 144 \end{aligned} \right\}$$

Però:

$$(a + b + c)^2 = \begin{cases} = 6^2 = 36 \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 38 + 2(ab + ac + bc) \end{cases}$$

Per tant, si  $a + b + c = 6$ :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 38 \Leftrightarrow ab + ac + bc = -1$$

Però:



$$(a + b + c)^3 = \begin{cases} = 6^3 = 216 \\ = a^3 + b^3 + c^3 + 3ac^2 + 3bc^2 + 3cb^2 + 3ab^2 + 3ca^2 + 3ba^2 + 6abc \end{cases}$$

$$(a + b + c)^3 = \begin{cases} = 6^3 = 216 \\ = a^3 + b^3 + c^3 + 3c^2(a + b) + 3b^2(c + a) + 3a^2(c + b) + 6abc \end{cases}$$

$$(a + b + c)^3 = \begin{cases} = 6^3 = 216 \\ = a^3 + b^3 + c^3 + 3c^2(S - c) + 3b^2(S - b) + 3a^2(S - a) + 6abc \end{cases}$$

$$(a + b + c)^3 = \begin{cases} = 6^3 = 216 \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3c^3 + 3c^2S - 3b^3 + 3b^2S - 3a^3 + 3a^2S + 6abc \end{cases}$$

$$(a + b + c)^3 = \begin{cases} = 6^3 = 216 \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3c^3 - 3b^3 - 3a^3 + 3S(c^2 + b^2 + a^2) + 6abc \end{cases}$$

$$(a + b + c)^3 = \begin{cases} = 6^3 = 216 \\ = -2(c^3 + b^3 + a^3) + 3S(c^2 + b^2 + a^2) + 6abc \end{cases}$$

Per tant, si  $a + b + c = 6$  i si  $a^2 + b^2 + c^2 = 38$ :

$$a^3 + b^3 + c^3 = 144 \Leftrightarrow abc = -30$$

En definitiva, per les relacions de Cardano-Vietà:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 38 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 144 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 6 \\ ab + ac + bc = -1 \\ abc = -30 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$$

I resolent per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & -1 & 30 \\ -2 & & -2 & 16 & -30 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0 \\ 3 & & 3 & -15 & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

$$0 = x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x - 3)(x - 5)$$

Per tant els números buscats són -2, 3 i 5 (en qualsevol ordre)

**Octubre 30:** Siga el polinomi:

$$P(x) = x^3 - mx^2 + 3mx - m$$

i a, b i c les seues arrels. Trobeu m per a que  $a^3 + b^3 + c^3 > -5$

**Solució:** Tindrem:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ac^2 + 3bc^2 + 3cb^2 + 3ab^2 + 3ca^2 + 3ba^2 + 6abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3c^2(a + b) + 3b^2(c + a) + 3a^2(c + b) + 6abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3c^2(S - c) + 3b^2(S - b) + 3a^2(S - a) + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 \\ &\quad - 3c^3 + 3c^2S - 3b^3 + 3b^2S - 3a^3 + 3a^2S + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3c^3 - 3b^3 - 3a^3 \\ &\quad + 3(a + b + c)(c^2 + b^2 + a^2) + 6abc \\ &= -2(c^3 + b^3 + a^3) + 3(a + b + c)(c^2 + b^2 + a^2) + 6abc \end{aligned}$$

D'on:

$$2(c^3 + b^3 + a^3) = -(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)(c^2 + b^2 + a^2) + 6abc$$

Però:

$$(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

Amb el que:

$$\begin{aligned} 2(c^3 + b^3 + a^3) &= -(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)((a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)) + 6abc = \\ &= -(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^3 - 6(a + b + c)(ab + ac + bc) + 6abc = \\ &= 2(a + b + c)^3 - 6(a + b + c)(ab + ac + bc) + 6abc \end{aligned}$$

I, per tant:

$$(c^3 + b^3 + a^3) = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc$$

De les relacions de Cardano-Vietà:

$$a + b + c = m; \quad ab + ac + bc = 3m; \quad abc = m$$

Amb el que:

$$\begin{aligned} -5 < a^3 + b^3 + c^3 = m^3 - 3m \cdot 3m + 3m; \quad m^3 - 9m^2 + 3m + 5 > 0 \\ (m - 1)(m^2 - 8m + 5) > 0; \quad m \in ]4 - \sqrt{21}; 1[ \cup ]4 + \sqrt{21}; +\infty[ \end{aligned}$$

**Octubre 31:** Resolgueu l'equació:

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x$$

sabent que té una arrel entera i que  $a, b \in \mathbb{Z}$

**Solució:** Tindrem:

**Lema:** En el context de l'enunciat:

$$a = b = 0 \text{ si } x = 0$$

$$\Rightarrow \text{Tenim: } (0 \cdot x - 0)^2 + (0 \cdot x - 0)^2 = \begin{cases} = x \\ = 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \text{Tenim: } 0 = x = (a \cdot 0 - b)^2 + (b \cdot 0 - a)^2 = (-b)^2 + (-a)^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

**Nota:** Notem que si  $a \neq 0$  o  $b \neq 0$  i  $x_1$  es la arrel entera de l'equació de l'enunciat, aleshores  $x_1 > 0$ , ja que:

$$\left. \begin{aligned} (ax_1 - b)^2 &\geq 0 \\ (bx_1 - a)^2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = (ax_1 - b)^2 + (bx_1 - a)^2 \geq 0$$

Però si  $x_1 = 0$  aleshores, per el lema  $a = b = 0$  en contra de que  $a \neq 0$  o  $b \neq 0$ .

**Demostració:** Siga l'equació:

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x \quad (*)$$

amb  $a$  o  $b$  o ambdós no nuls, aleshores desenvolupant y agrupant, tenim:

$$(a^2 + b^2)x^2 - (1 + 4ab)x + a^2 + b^2 = 0$$

Siguen  $x_1 (\in \mathbb{Z})$  i  $x_2$  les arrels de l'equació. Com les dues són reals, el discriminant de l'equació és no negatiu. Per tant:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (4ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2)^2 = (2a^2 + 2b^2 + 4ab + 1)(4ab + 1 - 2a^2 - 2b^2) \\ &= (2(a + b)^2 + 1)(1 - 2(a - b)^2) \end{aligned}$$

I com  $2(a + b)^2 + 1 \geq 0$ , tenim:

$$1 - 2(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 2(a - b)^2 \geq 0 \quad (a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$$

Amb el que l'equació (\*) queda:

$$2a^2x^2 - (4a^2 + 1)x + 2a^2 = 0$$

Per les relacions de Cardano-Vietà:

$$x_1 + x_2 = \frac{4a^2 + 1}{2a^2} = 2 + \frac{1}{2a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \quad (\text{nota}) \quad x_1 \text{ i } x_2 \text{ són les dues positives}$$

Aleshores:

$$x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3 \quad \left( \text{pues } \frac{1}{2a^2} < 1 \text{ ya que } a \in \mathbb{Z} \right)$$

A més  $x_1 \neq 1$ , ja que si  $x_1 = 1$

$$0 = 2a^2 - (4a^2 + 1) + 2a^2 = -1 \quad \text{absurdo!}$$

Per tant:

$$2 \leq x_1 < 3 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{ya que } x_1 \cdot x_2 = 1)$$

Per tant, les solucions de l'equació són:

$$a = b = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$a \neq 0 \text{ o } b \neq 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$