SOLUCIONS NOVEMBRE 2020

ACTIVITATS PER A 3ESO I 4ESO. 14-16 ANYS. AUTORS: COL·LECTIU "CONCURSO DE PRIMAVERA". https://www.concursoprimavera.es/#concurso

Novembre 2: Si $x + y = 18$ y $x^2 + y^2 = 212$ calculeu el valor de:

$$|x^2 - y^2|$$

Solució: Hem de resoldre el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 18 \\ x^2 + y^2 = 212 \end{array}\right\}$$

Tenim:

$$(x+y)^2 = \left\{\begin{array}{l} = 18^2 \\ = x^2 + y^2 + 2xy = 212 + 2xy \end{array}\right\} \Rightarrow \quad xy = 56$$

Per tant, x i y són solucions de l'equació: $z^2 - 18z + 56 = 0$ $(z^2 - Sz + P = 0)$

Per últim:

$$z^2 - 18z + 56 = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 56}}{2} = \left\{\begin{array}{l} = 14 \\ = 4 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; |x^2 - y^2| = |14^2 - 4^2| = 180$$

Novembre 3: 2020 és múltiple de 20, quants números de la forma 2000+b amb b natural i menor que 1000 són divisibles per b?

Solució: Com $b|b$ tindrem; $b|(2000 + b) \Leftrightarrow b|2000$. Per tant, busquem els divisors de 2000 menors que 1000. Com $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, tindrem que hi ha $((4 + 1)\cdot(3 + 1) =)$ 20 divisors de 2000. D'ells hem d'eliminar els majors o iguals a 1000: el 2000 i el 1000. Per tant, hi ha un total de $(20 - 2 =)$ 18 valors possibles de b: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500.

Novembre 4: Es formen tots els productes de 8 factors diferents que es poden generar amb els dígits de l'1 al 9. En quina xifra acaba la suma de tots els productes?

Solució: Considerem els productes de huit factors diferents d'entre els números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Aquests productes poden complir:

No contenen al dígit 2: Llavors contenen a les xifres 4 i 5. Per tant, acaben en 0

No contenen al dígit 5: Aquet sumand acaba en 6, perquè agrupant de dos en dos els productes:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \xrightarrow{\text{acaba en}} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \xrightarrow{\text{acaba en}} 4 \cdot 4 \xrightarrow{\text{acaba en}} 6$$

Contenen al 2 i al 5: Acaben en 0.

Per tant, la suma considerada acaba en 6.

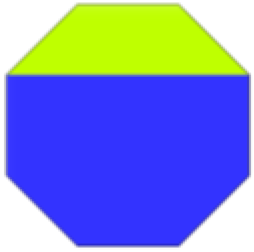
Novembre 5: Trobeu $p, q, r \in \mathbb{N}$, sabent que:

$$\mathbf{p} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{19}}$$

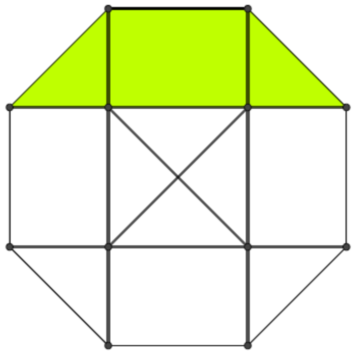
Solució: Tenim:

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}=\frac{25}{19}=\frac{19+6}{19}=1+\frac{6}{19}=1+\cfrac{1}{\cfrac{19}{6}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{6\cdot 3+1}{6}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6}}\Rightarrow\begin{cases}p=1\\q=3\\r=6\end{cases}$$

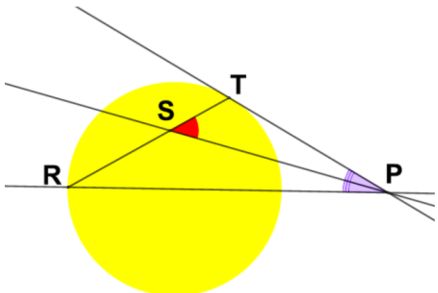
Novembre 6-7: Calculeu l'àrea de l'octàgon regular de la figura sabent que l'àrea de la zona de color verd és de 3 cm^2



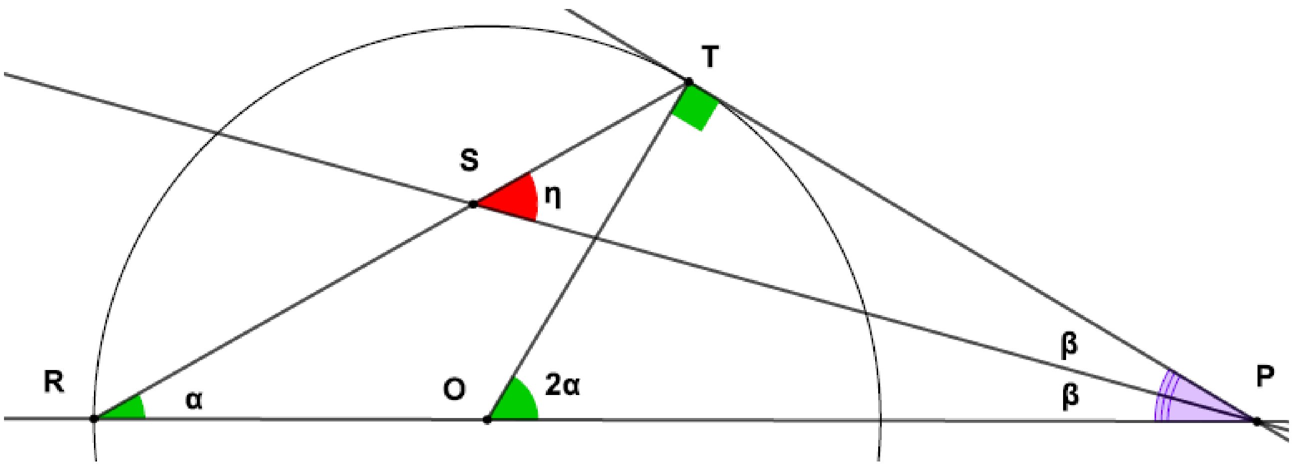
Solució: Tracem els segments rectilinis de la figura adjunta. Llavors l'octàgon inicial queda dividit en quatre rectangles iguals, un quadrat central i a les cantonades quatre triangles rectangles isòsceles que coincideixen amb els quatre triangles en els quals s'ha dividit el quadrat central. En total huit triangles iguals i quatre rectangles iguals. Però un d'aquestos rectangles juntament amb dos d'aquestos triangles tenen àrea 3. Per tant l'àrea de l'octàgon és: (3·4 =) 12 cm^2



Novembre 9-10: Des d'un punt P, exterior a una circumferència, es tracen dues rectes, PR que passa pel centre de la circumferència i PT tangent a la circumferència en T. Siga PS la bisectriu de ∠RPT. Trobar ∠TSP



Solució:



En primer lloc, si O és el centre de la circumferència (en virtut de la relació entre angle central i angle inscrit) tindrem els angles marcats en la figura. A més, en ΔOTP $2\alpha + 2\beta = 90°$, per tant $\alpha + \beta = 45°$.

A més, ΔRSO és isòsceles, per què RO = TO $\Rightarrow$ $\angle$RTO = α.

Per últim, en ΔSTP:

$$\eta + 90° + \alpha + \beta = 180° \quad (\alpha + \beta = 45°) \Rightarrow \eta = 45°$$

<u>Novembre 11:</u> En l'equació:

N·U·(M+E+R+0) = 33

cada lletra representa un dígit diferent. De quantes formes podem triar el valor de les lletres?

<u>Solució:</u> Com 33 = 1·3·11 i ni N ni U poden valer 11, tindrem que, necessàriament, el claudàtor deu valer 11. Per tant, N i U han de valer, una 3 i l'altra 1 i deu de complir-se

M + E + R + O = 11

8	2	1	0	Es repeteix el 1
7	3	1	0	Es repeteix el 1 i el 3
6	3	2	0	Es repeteix el 3
5	3	2	1	Es repeteix el 1 i el 3
5	4	2	0	VÀLIDA

Per tant M, E, R, O $\in$\{5, 4, 2, 0\}. Per tant hi ha 4! maneres d'assignar valors per a M, E, R i O. Com, a més, hi ha dues formes d'assignar valors per a N i U, tindrem que hi ha (4!·2 =) 48 maneres d'escollir el valor de cada lletra

<u>Novembre 12-19:</u> A les 12.00 del matí ix un tren des de la ciutat A cap a la B, i a les 12.40 ix un altre des de B cap a A. Tots dos circulen a la mateixa velocitat constant en tot el trajecte i tarden tres hores i mitja a fer el trajecte, a quina hora es creuen?

<u>Solució:</u> El trajecte dura tres hores i mitja, és a dir (3,5·60 =)210 minuts. Durant 40 minuts només està viatjant un tren. Després en (210 – 40 =) 170 estan viatjant els dos trens. Com viatgen a la mateixa velocitat, cadascun d'ells viatja (170/2 =) 85 minuts, fins a l'encreuament. Per tant, des de les 12.00 han de passar (40 + 85 =) 125 minuts, és a dir 2 hores i 5 minuts fins a l'encreuament. És a dir, es creuaran a les 14.05.

<u>Novembre 13:</u> Si a, b i c són naturals tals que

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} + \mathbf{1}\right) : \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} + \mathbf{1}\right) = \mathbf{11}$$

quantes ternes verifiquen:

$$\mathbf{a + 2b + c \leq 40}$$

<u>Solució:</u> Tindrem:

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right):\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)=11=\frac{\frac{ba+ac+cb}{cb}}{\frac{bc+ba+ac}{ac}}=\frac{ac}{cb}\cdot\frac{b(a\ +c)+ac}{b(c+a)+ac}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=11b$$

Per tant:

$$a+2b+c\leq 40\ \ \Rightarrow\ \ 13b+c\leq 40$$

Com b,c $\in\mathbb{N}$, tindrem:

b = 1 $\Rightarrow$ $c\leq 27$ $\Rightarrow$ $(a, b, c)\in\{(11, 1, c)\mid c\in\{1, 2, 3, \cdots, 27\}\}$ $\Rightarrow$ 27 ternes

b = 2 $\Rightarrow$ $c\leq 14$ $\Rightarrow$ $(a, b, c)\in\{(22, 2, c)\mid c\in\{1, 2, 3, \cdots, 14\}\}$ $\Rightarrow$ 14 ternes

b = 3 $\Rightarrow$ $c\leq 1$ $\Rightarrow$ $(a, b, c)=(33, 3, 1)$ $\Rightarrow$ 1 terna

En total (27 + 14 + 1 =) 42 ternes

Novembre 14: Totes les reserves de petroli d'Alaska durarien 35 anys si només les consumira els EUA Si també les consumira la Xina durarien solament 10 anys. Quants anys duraria si només les consumira la Xina?

Solució: Siguen r el total de reserves d'Alaska, u el consum anual dels EUA i c el consum anual de la Xina. De l'enunciat del problema tenim:

$$r=35u$$
$$r=10(u+c)$$

Aïllant u de la primera equació:

$$u=\frac{r}{35}$$

I substituint en la segona:

$$r=10\left(\frac{r}{35}+c\right)=\frac{10r}{35}+10c\ \Rightarrow\ r-\frac{10r}{35}=10c\ \Rightarrow\ \frac{25r}{35}=10c\ \Rightarrow\ \frac{r}{c}=\frac{35\cdot 10}{25}=14$$

És a dir, les reserves de petroli d'Alaska durarien 14 anys si només les consumira la Xina

Novembre 16: Si **$|u-10|=v$** y **$u<10$,** què valor agafa $u-v$?

Solució 1: Al ser $u<10$, tenim $u-10>0$. Per tant:

$v=|u-10|=10-u\ \Rightarrow\ u-v=u-10+u=2u-10$

Solució 2: Al ser $u<10$, tenim $u-10>0$. Per tant:

$v=|u-10|=10-u\ \Rightarrow\ u=10-v\ \Rightarrow\ u-v=10-v-v=10-2v$

Novembre 17: Si $B>A>1$, compara les fraccions

$$\frac{A-1}{B-1},\qquad\frac{A+1}{B+1},\qquad\frac{A^2-1}{B^2-1},\qquad\frac{A^3-1}{B^3-1}$$

Solució: Tenim, si $B>A>1$

$$(A+1)\cdot(B-1)=AB+B-A-1\{B-A>0>A-B\}>AB-B+A-1=(A-1)\cdot(B+1)$$

D'on (dons $B+1>0$ i $B-1>0$)

$$\frac{A+1}{B+1}>\frac{A-1}{B-1}$$

Per altra part:

$$B+1>A+1 \xrightarrow[B-1>A-1>0]{} \frac{(B+1)\cdot(B-1)}{(B-1)} > \frac{(A+1)\cdot(A-1)}{(A-1)} \Rightarrow \frac{B^2-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{A-1}$$

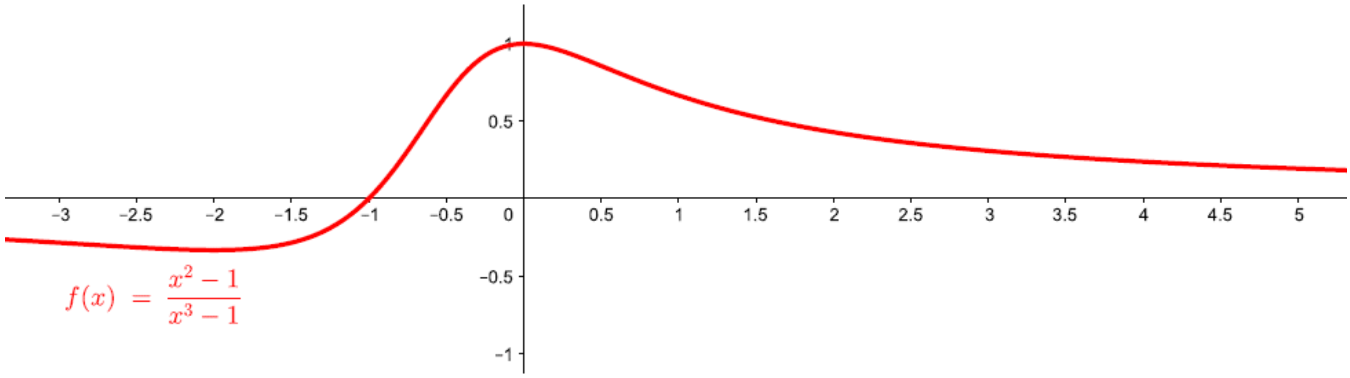
I com: $A-1>0$ i $B^2-1>0$ tindrem:

$$\frac{A-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{B^2-1}$$

Per últim, considerem

$$y = \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

que és decreixent en $]0, +\infty[$



Com $B>A>1>0$

$$\frac{B^2-1}{B^3-1} < \frac{A^2-1}{A^3-1} \xrightarrow[A^2-1>0;\ B^3-1>0]{} \frac{B^2-1}{A^2-1} < \frac{B^3-1}{A^3-1} \Rightarrow \frac{A^2-1}{B^2-1} > \frac{A^3-1}{B^3-1}$$

En definitiva:

$$\frac{A+1}{B+1} > \frac{A-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{B^2-1} > \frac{A^3-1}{B^3-1}$$

<u>Novembre 18:</u> Trobeu els parells de nombres primers (x, y) tals que també són primers x + y i x - y. És també primer la suma dels quatre?

<u>Solució:</u> Si x i y són tots dos primers i imparells la seua suma serà parell. Per tant, si busquem x e y primers amb x + y primer, x o y ha de ser primer parell, és a dir, 2. Suposem que y = 2. Busquem, llavors, x primer amb x – 2 i x + 2 primers. Però entre x – 2, x i x + 2 hi ha un múltiple de 3 (Si x = 0(3) ja està demostrat, si x = 1(3) llavors x + 2 = 0(3) i si x = 2(3) llavors x – 2 = 0(3)). L'única possibilitat és x – 2 = 3 (l'únic múltiple de tres que és primer). Per tant, x = 5 és l'única possibilitat.

Hi ha un únic parell de primers (2, 5) de manera que la seua suma i la seua diferència (3 i 7) són primers. La suma dels quatre és (2 + 3 + 5 + 7 =) 17 és també primer.

<u>Novembre 20:</u> En una circumferència de radi $r = 5/\sqrt{2}$ inscribim un triangle rectangle amb catets números naturals. Trobeu el seu perímetre.

<u>Solució:</u> Si es tracta d'un triangle rectangle, la hipotenusa ha de ser un diàmetre, (perquè llavors, l'angle inscrit és 90° i el central de 180°). Per tant, si a i b són els catets del triangle rectangle ha de complir-se:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{2 \cdot 5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50$$

I degut a que a i b deuen de ser naturals

a	$50 - a^2$	$¿\, b = \sqrt{50 - a^2} \in \mathbb{N}?$
1	49	sí (b = 1)
2	46	no
3	41	no
4	34	no
5	25	sí (b = 5)
6	14	no
7	49	sí (b = 7)

Per tant, les úniques solucions admissibles són a=1, b=7 i a = b = 5. Per tant, el perímetre pot valdre $8 + 5\sqrt{2}$ o $10 + 5\sqrt{2}$.

<u>Novembre 21:</u> Quants enters entre 3 i 89 no poden escriure's com a suma exactament de dos números del conjunt {1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}?

<u>Solució:</u> Primer hem d'adonar-nos que la suma de dues qualssevol dels números donats no donarà el mateix resultat perquè cada número, dels donats, és suma dels dos anteriors (ens donen els primers termes de la successió de Fibonacci).

Calculem quants números podem obtindre sumant dos dels donats. Pel punt anterior hi haurà tants números com combinacions de nou elements presos de dos en dos, és a dir:

$$C_2^9 = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$$

Com el més xicotet número que podem obtindre sumant dos dels donats és (1 + 2 =) 3 i el més gran és (34 + 55 =) 89, hi ha (89 – 2 =) 87 aspirants a ser obtinguts. Com podem obtindre 36, no es poden obtindre (87 – 36 =) 51.

<u>Novembre 23-30:</u> El nombre d'anys que vaig complir ahir és un nombre primer de dues xifres. Si li sume l'edat del meu fill, obtinc un altre nombre primer. Però si els reste obtinc un múltiple de 3 i de 11. Si sume les xifres de la meua edat i les xifres de l'edat del meu fill obtinc huit. Quines són les edats?

<u>Solució:</u> Siguen 10a + b i 10c + d les edats de mare i fill, respectivament. Tenim, llavors, de les condicions de l'enunciat:

A. a > c (amb c possiblement zero) amb a, b, c, d $\in \mathbb{N}$
B. 10a + b és primer
C. 10(a + c) + (b +d) és primer
D. 10 (a – c) + (b – d) és múltiple de 33
E. a + b + c + d = 8 ($\Rightarrow$ a $\leq$ 8)

Si a = 8, de la condició E, tenim que b = c = d = 0, amb el que; 10a + b = 80 que no és primer, el que contradiu B

Si a = 7, els primers de dues xifres amb desenes igual a 7 són: 71, 73 i 79.

Si b = 1, tenim, per E, que c = d = 0, que contradiu D.

Si b = 3 o b = 9, es contradiu E

Si a = 6, els primers de dues xifres amb desenes igual a 6 són: 61 i 67.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 1 \text{ (per E)} \\ \text{c} + \text{d} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 2 \text{ i d} = 0 & \Rightarrow 61 - 20 = 41 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 1 \text{ i d} = 1 & \Rightarrow 61 - 11 = 50 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 0 \text{ i d} = 2 & \Rightarrow 61 - 02 = 59 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

Si b = 7 (per E) tindrem que c + d = -5, que contradiu A

Si a = 5, els primers de dues xifres amb desenes igual a 5 són: 53 i 59.

Si b = 3, tenim, per E, que c = d = 0, que contradiu D.

Si b = 9, (per E) tindrem que c + d = - 6, que contradiu A

Si a = 4, els primers de dues xifres amb desenes igual a 4 són: 41, 43 i 49.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 1 \text{ (per E)} \\ \text{c} + \text{d} = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 3 \text{ i d} = 0 & \Rightarrow 41 - 30 = 11 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 2 \text{ i d} = 1 & \Rightarrow 41 - 21 = 20 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 1 \text{ i d} = 2 & \Rightarrow 41 - 12 = 29 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 0 \text{ i d} = 3 & \Rightarrow 41 - 03 = 38 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 3 \text{ (per E)} \\ \text{c} + \text{d} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 1 \text{ i d} = 0 & \Rightarrow \textbf{41 y 10 ¡SOLUCIÓN!} \\ \text{si c} = 0 \text{ i d} = 1 & \Rightarrow 41 - 01 = 40 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

Si b = 9, (per E) tindrem que c + d = - 5, que contradiu A

Si a = 3, els primers de dues xifres amb desenes igual a 3 són: 31 i 37

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si b} = 1 \text{ (per E)} \\ \text{c} + \text{d} = 4 \text{ (per A)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{si c} = 2 \text{ i d} = 2 & \Rightarrow 31 - 22 = 9 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 1 \text{ i d} = 3 & \Rightarrow 31 - 13 = 18 \neq \dot{\widehat{33}} \\ \text{si c} = 0 \text{ i d} = 3 & \Rightarrow 31 - 03 = 28 \neq \dot{\widehat{33}}\end{cases}$$

Si b = 7, (per E) tindrem que c + d = - 2, que contradiu A

Valors per a a menors o iguals a 2 no són solucions per què una edat de la mare de vint i pico menys la edat del fill no pot donar 33

<u>Novembre 24-25:</u> Dani tria a l'atzar tres números del conjunt {1, 2, 3, 4} i Laia un del conjunt {2, 4, 6, 8, 10}, Quina és la probabilitat que el número extret per Laia siga major que la suma dels extrets per Dani?

<u>Solució:</u> Per a les extraccions de Dani: Triar 3 números de {1, 2, 3, 4} i sumar-los equival a extraure només 1 i sumar els no trets. Per tant, els resultats possibles i les seues probabilitats per a Dani són:

$$\text{Dani} \Rightarrow \begin{cases} 1 \Rightarrow S_D = 9 \longrightarrow \dfrac{1}{4} \\ 2 \Rightarrow S_D = 8 \longrightarrow \dfrac{1}{4} \\ 3 \Rightarrow S_D = 7 \longrightarrow \dfrac{1}{4} \\ 4 \Rightarrow S_D = 6 \longrightarrow \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Mentre que, per a Laia, tenim:

$$\text{Laia} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2 \;\Rightarrow\; S_L = 2 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 4 \;\Rightarrow\; S_L = 4 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 6 \;\Rightarrow\; S_L = 6 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 8 \;\Rightarrow\; S_L = 8 \;\longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \\ 10 \;\Rightarrow\; S_L = 10 \longrightarrow\; \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(L > D) &= P\Big((S_L = 8) \cap \big((S_D = 7) \cup (S_D = 8)\big)\Big) + P\big((S_L = 10) \cap (S_D \text{ qualsevol})\big) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

<u>Novembre 26:</u> Quina és la probabilitat que un número de 10 xifres continga els deu dígits?

<u>Solució:</u> Calculem en primer lloc els números de deu xifres que podem generar. Tenint en compte que els que comencen per 0 només tenen nou xifres, tenim:

Casos possibles: $VR_{10}^{10} - VR_{10}^{9} = 10^{10} - 10^{9}$

Els casos favorables seran els números de 10 xifres que contenen els deu dígits. És a dir:

Casos favorables: $V_{10}^{10} - V_{9}^{9} = 10! - 9!$

La probabilitat sol·licitada, és:

$$P = \frac{10! - 9!}{10^{10} - 10^{9}} = \frac{9! \cdot (10 - 1)}{10^{9} \cdot (10 - 1)} = \frac{9!}{10^{9}}$$

<u>Novembre 27-28:</u> La mitjana de tres imparells consecutius és 7. Si afegim un altre enter positiu m, diferent dels tres, la mitjana dels quatre és un altre enter. Troba els tres valors més xicotets de m.

<u>Solució:</u> Siguen a, a + 2, a + 4 els imparells consecutius de l'enunciat. Tindrem:

$$\frac{a + a + 2 + a + 4}{3} = \frac{3a + 6}{3} = 7 \;\Rightarrow\; a = 5$$

Per tant, els tres imparells consecutius de l'enunciat són: 5, 7 i 9. Exigim, ara, que la mitjana dels quatre naturals siga un altre natural:

$$\frac{5 + 7 + 9 + m}{4} = \frac{21 + m}{4} = 5 + \frac{1 + m}{4} \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; m = 3(4) = \{3, 7, 11, 15, \cdots\}$$

Com que m ha de diferent dels tres imparells inicials, tenim que la contestació és m = 3, 11 i 15.