SOLUCIONES OCTUBRE 2021

PROBLEMAS DE LA CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD: 1974, 1975, 1976. PREPARACIÓN OME (http://cms.math.ca/Competitions/CMO/) ORGANIZACIÓN Y SOLUCIONES: Rafael Martínez Calafat. Profesor jubilado.

Octubre 1-2: (1).- Si $\mathbf{x}=\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{y}=\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n+1}}$ comparar $\mathbf{x^y}$ con $\mathbf{y^x}$. (2).- Prueba que, para todo entero positivo n:

$$\mathbf{1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^n\cdot(n-1)^2+(-1)^{n+1}\cdot n^2=(-1)^{n+1}\cdot(1+2+\cdots+n)}$$

Solución: Para (1), tenemos: Para algunos valores particulares de n obtenemos que $x^y = y^x$. Así, que intentamos probar la igualdad de las dos expresiones para cualquier valor de n.

$$x^y=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}$$

$$y^x=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}$$

Puesto que se obtiene la misma base elevada al mismo exponente, las dos expresiones coinciden.

Para (2) utilizaremos inducción sobre n. Más detalladamente, probaremos que la fórmula es cierta para n = 1 y n = 2, supondremos que la fórmula es cierta para n – 1 y la demostraremos para n + 1.

Para n = 1, tenemos:

$$1^2=1=(-1)^{1+1}\cdot 1$$

Para n = 2, tenemos:

$$1^2-2^2=1-4=-3=(-1)\cdot 3=(-1)^{2+1}\cdot(1+2)$$

Supongamos la fórmula cierta para n – 1:

$$1^2-2^2+3^2+\cdots+(-1)^n\cdot(n-1)^2=(-1)^n\cdot\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right)$$

y veámosla para n + 1:

$$1^2-2^2+3^2+\cdots+(-1)^n\cdot(n-1)^2+(-1)^{n+1}n^2+(-1)^{n+2}(n+1)^2=$$

$$=1^2-2^2+3^2+\cdots+(-1)^n\cdot(n-1)^2+(-1)^{n+1}n^2+(-1)^{n+2}(n^2+2n+1)=$$

$$=1^2-2^2+3^2+\cdots+(-1)^n\cdot(n-1)^2+(-1)^{n+1}n^2+(-1)^{n+1}(-n^2-2n-1)=$$

$$1^2-2^2+3^2+\cdots+(-1)^n\cdot(n-1)^2+(-1)^{n+1}n^2-(-1)^{n+1}n^2+(-1)^{n+1}(-2n-1)=$$

$$=1^2-2^2+3^2+\cdots+(-1)^n\cdot(n-1)^2+(-1)^{n+1}(-2n-1)=\left\{\begin{matrix}\text{hipótesis de}\\ \text{inducción}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(-1)^n\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right)+(-1)^n(2n+1)=$$

$$=(-1)^n\left(1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)\right)=(-1)^{n+2}\left(1+2+3+\cdots+n+(n+1)\right)$$

Octubre 4-5: Sea n un entero positivo fijo. A cualquier elección de n números reales que cumplan $0 \leq x_i \leq 1$ ($i \in \{1, 2, .., n\}$) les hacemos corresponder la suma

$$(*)_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j| = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \cdots + |x_1 - x_n| + |x_2 - x_3| + .. + |x_2 - x_n| + \ldots + |x_{n-1} - x_n|$$

Halla el mayor valor posible de esta suma.

Solución: Notemos que $(*)_n$ es una especie de medida de dispersión de los reales $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Veamos cómo obtener esa máxima suma. Si disponemos de dos puntos, la máxima suma se alcanza con:

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = 1; \quad (*)_2 = |x_1 - x_2| = 1$$

Si disponemos de tres puntos, la máxima suma se alcanza con:

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = 1;\ x_3 = 0 \quad (*)_3 = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + (*)_2 = 1 + 0 + 1 = 2$$

Si disponemos de cuatro puntos, la máxima suma se alcanza con:

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = 1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1 \quad (*)_4 = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + (*)_3 = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$$

Si disponemos de cinco puntos, la máxima suma se alcanza con:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 0 \quad (*)_5 = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + |x_1 - x_5| + (*)_4 = 1 + 0 + 1 + 0 + 4 = 6$$

Se observa que:

$$(*)_n = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \cdots + |x_1 - x_n| + (*)_{n-1};\quad (*)_2 = 1;\ (*)_3 = 2;\ (*)_4 = 4;\ (*)_5 = 6;\ \cdots$$

Y como:

$$|x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \cdots + |x_1 - x_n| = \left[\frac{n}{2}\right]$$

Donde $[\cdot]$ es la función parte entera, tenemos:

$$(*)_n = \left[\frac{n}{2}\right] + (*)_{n-1}; \quad \text{con } (*)_2 = 1$$

Octubre 6: Simplifica:

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + \cdots + n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + \cdots + n\cdot 3n\cdot 9n}}$$

Solución: Tenemos:

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + \cdots + n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + \cdots + n\cdot 3n\cdot 9n}} = \left(\frac{1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + \cdots + n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + \cdots + n\cdot 3n\cdot 9n}\right)^{1/3}$$

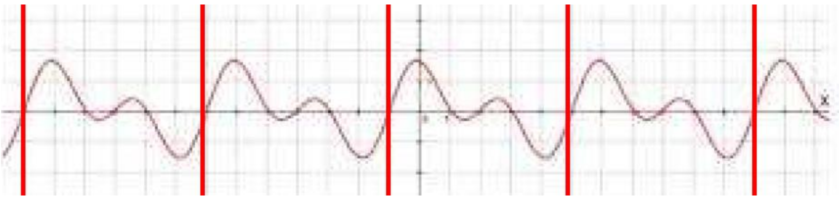
$$= \left\{\begin{matrix}\text{cada sumando del numerador} \\ \text{contiene al factor } 2^3 \\ \text{cada sumando del denominador} \\ \text{contiene al factor } 3^3\end{matrix}\right\} = \left(\frac{2^3(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)}{3^3(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)}\right)^{1/3} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{1/3} = \frac{2}{3}$$

Octubre 7-8: Una función y = f(x) se dice periódica si existe un número real positivo p tal que f(x + p) = f(x) para todo x. Por ejemplo, y = sen x es periódica de periodo 2π. ¿Es periódica la función:

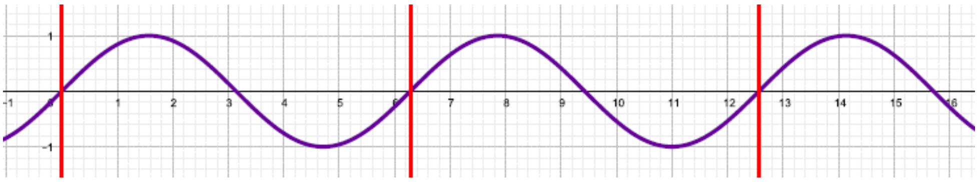
$y = \text{sen}\,(x^2)$?

Demuestra tu afirmación.

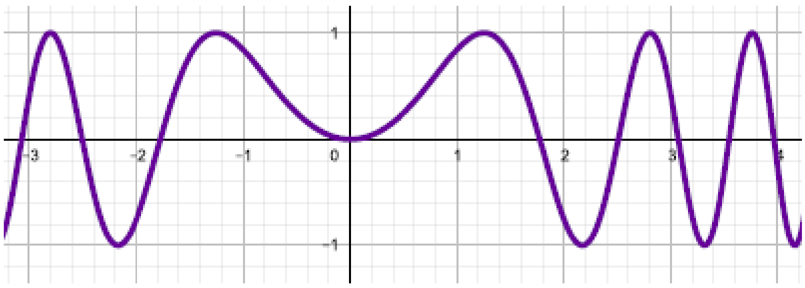
<u>**Solución:**</u> Si una función es periódica hay un trozo de su gráfica que se repite indefinidamente tanto hacia la derecha como hacia la izquierda:



La gráfica de y = sen x es periódica de periodo 2π



Como x^2 se hace muy grande a medida que x se hace grande, y = sen x^2 cumplirá que la onda sinodal se irá apretando a medida que nos desplacemos a la derecha o a la izquierda (aparte de que la gráfica sería la de una función par). Es decir, la gráfica de la función y = sen x^2, será del tipo:



Lo que imposibilita que sea una función periódica. Para probarlo supondremos que es periódica y llegaremos a un absurdo. Sea p el periodo de y = sen x^2. Entonces:

$$\mathrm{sen}(x+p)^2 = \mathrm{sen}x^2 \quad \forall x$$

Dándole a x el valor 0:

$$\mathrm{sen}p^2 = \mathrm{sen}0 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; p^2 = k\pi \;\text{ para algun } k \in \mathbb{N} \;\; \Rightarrow \;\; p = \sqrt{k\pi} \;\text{ para algún } k \in \mathbb{N}$$

Tendremos entonces:

$$\mathrm{sen}\left(x+\sqrt{k\pi}\right)^2 = \mathrm{sen}x^2 \quad \forall x$$

y ahora buscamos algún valor de x para el que la parte izquierda de la anterior igualdad de diferente a la parte derecha.

Tendremos, haciendo $x = \sqrt{\frac{k\pi}{2}}$

$$\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2}}+\sqrt{k\pi}\right)^2 = \begin{cases} = \mathrm{sen}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \dfrac{k\pi}{2}\right] \\ = \mathrm{sen}\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 1,3,5,\cdots \\ 0 \text{ si } k = 2,4,6,\cdots \end{cases} \end{cases}$$

Pero:

$$5 < \left(1+\sqrt{2}\right)^2 < 6$$

de donde:

$$5\frac{k\pi}{2} < \left(1+\sqrt{2}\right)^2\frac{k\pi}{2} < 3k\pi$$

por lo que:

$$\operatorname{sen}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2\frac{k\pi}{2}\right] \neq \begin{cases}\operatorname{sen}\frac{5k\pi}{2} = \begin{cases}1 \text{ si } k = 1,3,5,\cdots \\ 0 \text{ si } k = 2,4,6,\cdots\end{cases} \\ \operatorname{sen}3k\pi = 0\end{cases}$$

que contradice

$$\operatorname{sen}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2\frac{k\pi}{2}\right] = \begin{cases}1 \\ 0\end{cases}$$

Octubre 9: Una sucesión a_1, a_2, a_3, ⋯⋯ cumple que

(1) $a_1 = ½$
(2) $a_1 + a_2 + \cdot\cdot + a_n = n^2 \cdot a_n$, para cualquier n.

Determina el valor de a_n.

Solución: Tendremos:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n &= n^2 a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \quad &= (n-1)^2 a_{n-1} \end{aligned}$$

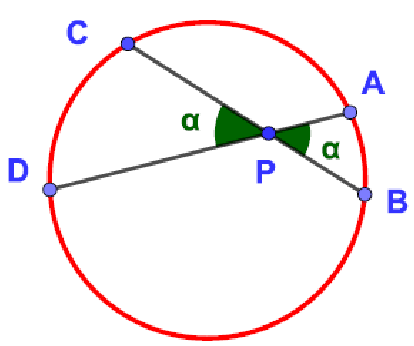
y restando ambas expresiones:

$$a_n(n^2-1) = (n-1)^2 a_{n-1} \overset{n\neq 1}{\Rightarrow} a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$$

de donde:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2} = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}a_{n-3} = \cdots = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3}a_1 \\ &= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

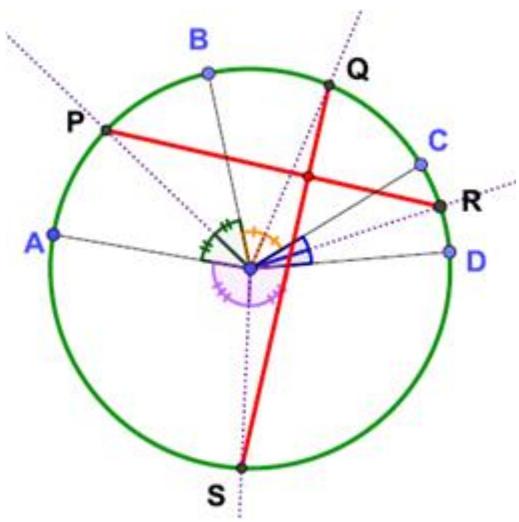
Octubre 11: Sean A, B, C y D cuatro puntos consecutivos de una circunferencia y P, Q, R y S los puntos medios de los arcos AB, BC, CD y DA. Prueba que PR ⊥ QS.



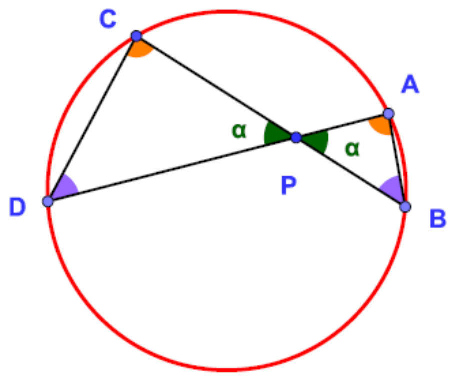
Lema previo: Si P es un punto interior del círculo, se denomina ángulo interior al ángulo ∠APB = ∠CPD.

En el contexto de la anterior definición:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DC}}{2}$$



Demostración del lema:

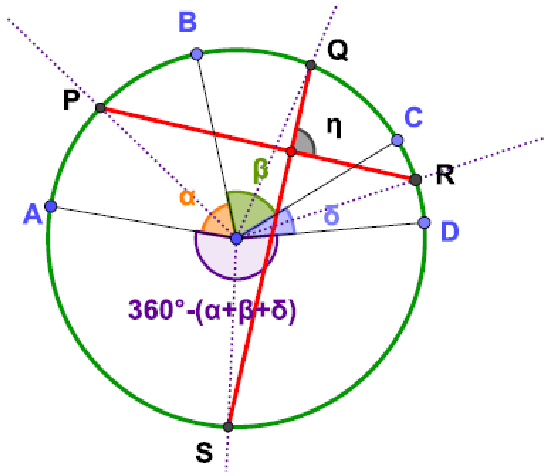


Consideremos el triángulo ΔPCD. En él tenemos:

$$\alpha + \angle D + \angle C = 180^\circ \;\Rightarrow\; \alpha + \frac{\widehat{CA}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2} = 180^\circ$$

$$2\alpha + \cancel{\widehat{CA}} + \cancel{\widehat{BD}} = 360^\circ = \cancel{\widehat{CA}} + \widehat{AB} + \cancel{\widehat{BD}} + \widehat{DC} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DC}}{2}$$

Solución:



Deberemos probar que η = 90°. Del lema previo:

$$\eta = \frac{\widehat{QR} + \widehat{SP}}{2} = \frac{\widehat{QC} + \widehat{CR} + \widehat{SA} + \widehat{AP}}{2}$$

$$= \frac{\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{360^\circ - (\alpha + \beta + \delta)}{2} + \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

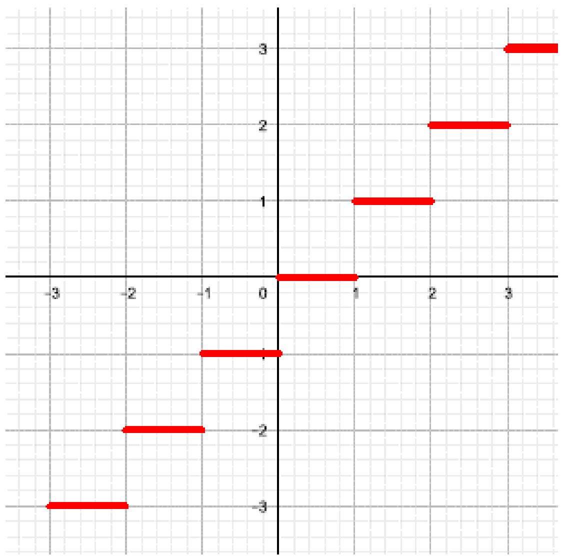
Octubre 12-13: Para cada real r, se define:

[r] = max {z∈ℤ | z ≤ r}

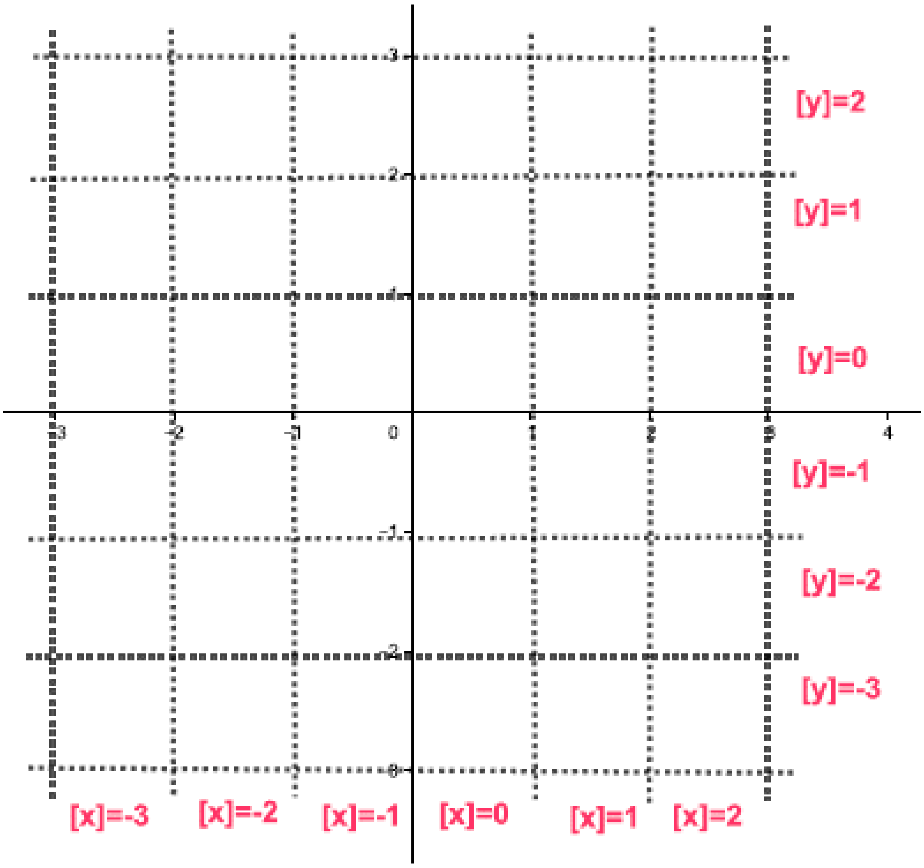
(e. g. [6] = 6; [π] = 3; [-1,5] = -2)). Dibuja en el plano (x, y) el conjunto de puntos:

$[x]^2 + [y]^2 = 4$

Solución: De la definición de [r] tenemos que su gráfica es:

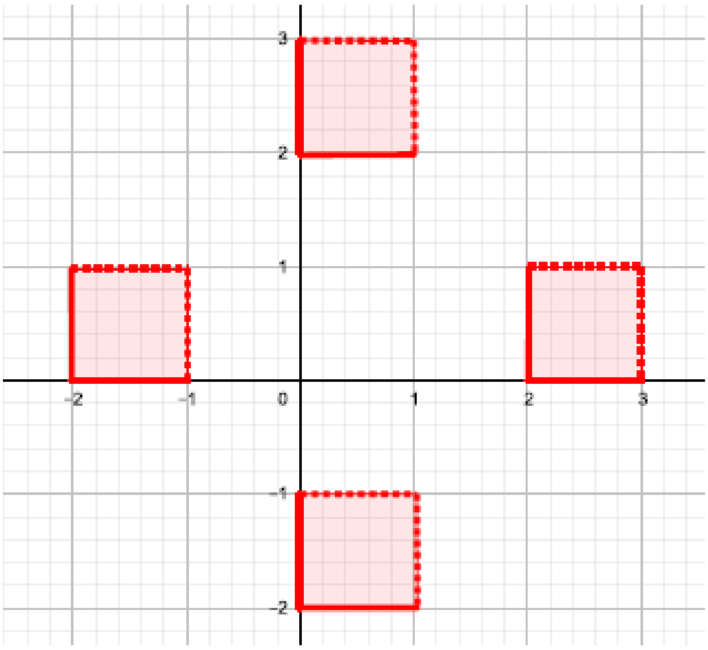


Por lo tanto:



Con ello, el plano x-y está particionado en cuadrados. En cada cuadrado hemos calculado $[x]^2+[y]^2$

Por lo tanto, lo solicitado en el enunciado es:



Octubre 14: Dados cuatro pesos que están en progresión aritmética y una balanza de dos brazos, muestra como hallar el peso más grande utilizando la balanza únicamente dos veces.

Solución: Sean:

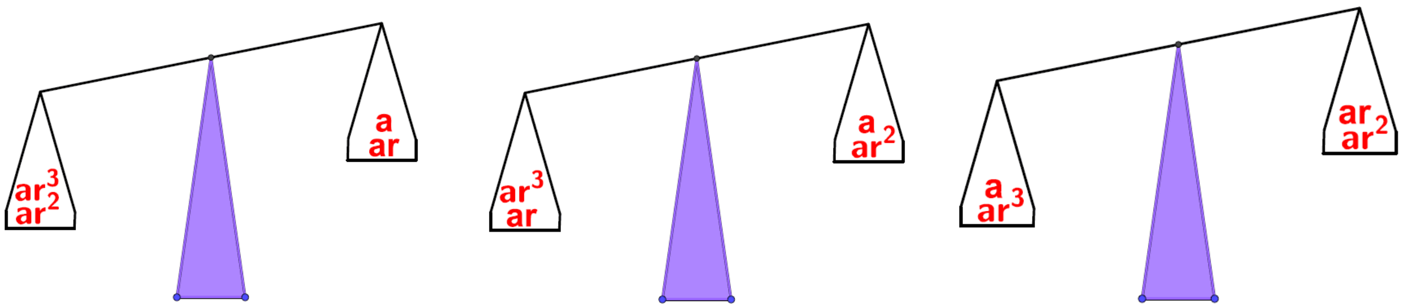
$$a;\ \ ar;\ \ ar^2;\ \ ar^3$$

los pesos con r > 1 (y así los pesos van creciendo).

Dados los cuatro pesos los separamos en dos grupos de dos pesos cada uno.

A. Ponemos un par de pesos en un platillo y el otro par de pesos en el otro platillo. El par de pesos que contiene al peso con r al cubo es el más pesado de los dos grupos.
B. Localizado el par que contiene al peso con r elevado al cubo, ponemos cada uno de los dos pesos en los platillos de la balanza. El peso más grande es el que está en el platillo más bajo.

Probaremos, ahora, la afirmación expuesta en A: Al hacer los dos grupos de dos pesos caben tres posibilidades:



Hemos de probar que si r > 1:

$$A-1:\ \ r^2+r^3>1+r$$
$$A-2:\ \ r^3+r>\ r^2+1$$
$$A-3:\ \ r^3+1>\ r^2+r$$

Tenemos, para A-1:

$$r > 1 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} (*)\ r^2 > r \\ (**)\ \ r^3 > 1 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow\ \mathbf{r^3 + r^2 > r + 1}$$

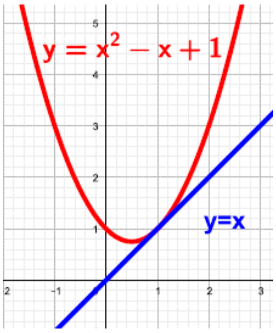
(*) Multiplicando cada miembro de la desigualdad r > 1, por r (>0)

(**) Multiplicando por r^2 (>0) la desigualdad r > 1: $r^3 > r^2 > 1$

Para A-2: Multiplicando por r^2+1 (>0) la desigualdad r > 1:

$$r(r^2+1) = \mathbf{r^3 + r > r^2 + 1}$$

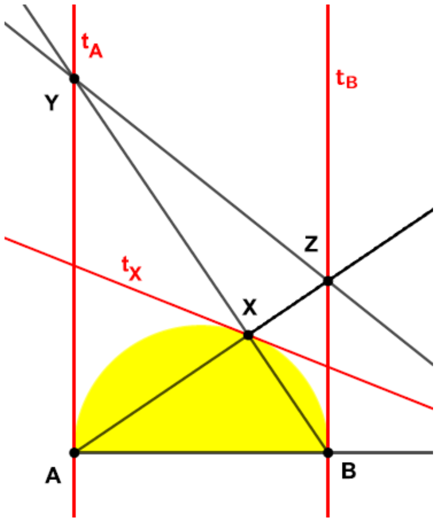
Para A-3:



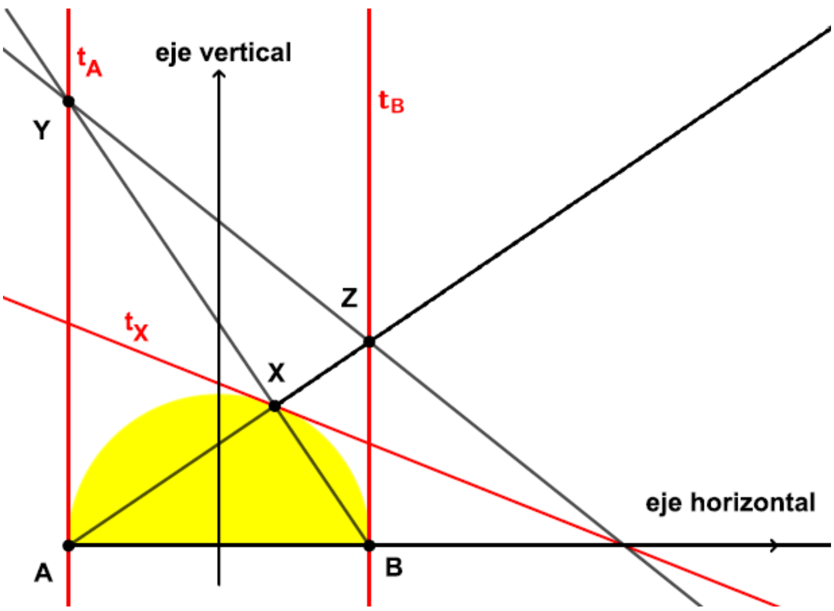
De la gráfica adjunta, tenemos, (que para r > 1), $r^2 - r + 1 > r$. Multiplicando cada miembro de esta desigualdad por r + 1 (>0), tenemos:

$$(r+1)\cdot(r^2 - r + 1) = \mathbf{r^3 + 1 > r^2 + r} = (r+1)\cdot r$$

<u>Octubre 15-16:</u> Dado un círculo de diámetro AB y un punto X diferente de A y de B, sean t_A, t_B y t_X las tangentes al círculo en A, B y X. Sea Z la intersección de AX con t_B e Y la intersección de BX con t_A. Prueba que las tres rectas AB, t_X y ZY son concurrentes o paralelas.



<u>Solución:</u>



Escogemos el sistema de referencia de manera que el eje horizontal es la linea AB y el eje vertical es la paralela a t_A por el punto medio del segmento AB. En este caso, tenemos:

$$A(-a,0); \quad B(a,0); \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$X(\alpha,\beta) \ \Rightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 = a^2 \ (-a \neq \alpha \neq a)$$

$$t_A \equiv x = -a; \quad t_B \equiv x = a$$

t_X:

$$x^2+y^2=a^2 \quad\Rightarrow\quad 2x+2yy'=0 \quad\Rightarrow y'=-\frac{x}{y} \quad\Rightarrow\quad y'|_{(\alpha,\beta)}=-\frac{\alpha}{\beta}$$

$$t_X \equiv y-y_0=-\frac{\alpha}{\beta}(x-x_0) \;\equiv\; \mathbf{y=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)+\beta}$$

AX

$$\left.\begin{matrix}A(-a,0)\\ X(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{y-0}{x+a}=\frac{\beta-0}{\alpha+a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=\frac{\beta}{\alpha+a}(x+a)}$$

Z = $t_B \cap$ AX

$$AX\equiv \quad y=\frac{\beta}{\alpha+a}(x+a)\equiv\{t_B\equiv x=a\}\; y=\frac{2\beta a}{\alpha+a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Z\left(a,\frac{2\beta a}{\alpha+a}\right)}$$

BX

$$\left.\begin{matrix}B(a,0)\\ X(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{y-0}{x-a}=\frac{\beta-0}{\alpha-a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=\frac{\beta}{\alpha-a}(x-a)}$$

Y = $t_X \cap$ BX

$$BX\equiv \quad y=\frac{\beta}{\alpha-a}(x-a)\equiv\{t_A\equiv x=-a\}\; y=\frac{-2\beta a}{\alpha+a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Y\left(-a,\frac{2\beta a}{a-\alpha}\right)}$$

YZ

$$\left.\begin{matrix}Z\left(a,\dfrac{2\beta a}{\alpha+a}\right)\\ Y\left(-a,\dfrac{2\beta a}{a-\alpha}\right)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{y-\frac{2\beta a}{\alpha+a}}{x-a}=\frac{\frac{2\beta a}{a-\alpha}-\frac{2\beta a}{\alpha+a}}{-2a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=\frac{2\beta\alpha}{\alpha^2-a^2}(x-a)+\frac{2\beta a}{\alpha+a}}$$

C = YZ $\cap$ t_X

$$YZ\equiv y=\frac{2\beta\alpha}{\alpha^2-a^2}(x-a)+\frac{2\beta a}{\alpha+a} \;,\quad t_X\equiv y=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)+\beta$$

$$\frac{2\beta\alpha}{\alpha^2-a^2}(x-a)+\frac{2\beta a}{\alpha+a}=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)+\beta \cdots (\text{recordar } \alpha^2+\beta^2=a^2)\cdots\cdot \Rightarrow x=\frac{a^2}{\alpha} \quad (\alpha\neq 0)$$

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{a^2}{\alpha}-\alpha\right)+\beta=\cdots=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{t_X\cap AB\cap YZ=C\left(\frac{a^2}{\alpha},0\right)} \quad \mathbf{(\alpha\neq 0)}$$

Para el caso α = 0 tenemos:

$$\mathbf{t_X \equiv y=\beta; \qquad YZ\equiv \quad y=\frac{2\beta a}{a}=2\beta}$$

que son rectas paralelas

<u>Octubre 18-19:</u> Tenemos una cantidad ilimitada de sellos de 8 céntimos y de 15 céntimos. Algunas cantidades de franqueo postal no se pueden obtener exactamente, e. g. 7 céntimos o 29 céntimos. ¿Cuál es la cantidad más grande que no se puede obtener exactamente, i. e. la cantidad de franqueo que no se puede alcanzar exactamente, mientras que todas las cantidades mayores son alcanzables?

<u>Solución:</u> Imaginemos la siguiente tabla:

x\y	0	1	2	3	4	5	....
0	0	15	30	45	60	75	
1	8	23	38	53	68	83	
2							
3							
4							
5							
:							

En ella, en cada celda, está el resultado de efectuar la operación:

$$8 \cdot (\text{número inicial en la fila}) + 1 \cdot (\text{número inicial en la columna})$$

La tabla, confeccionada, de esta manera contiene los valores de n para los que la ecuación 8x + 15y = n tiene solución, es decir, los franqueos exactos que se pueden generar con sellos de 8 céntimos y 15 céntimos. La tabla tiene las siguientes propiedades:

- Si un número n está en una celda, en la celda inmediatamente inferior está el número n + 8 y la celda a la izquierda de la primera contiene al número n + 15, pues

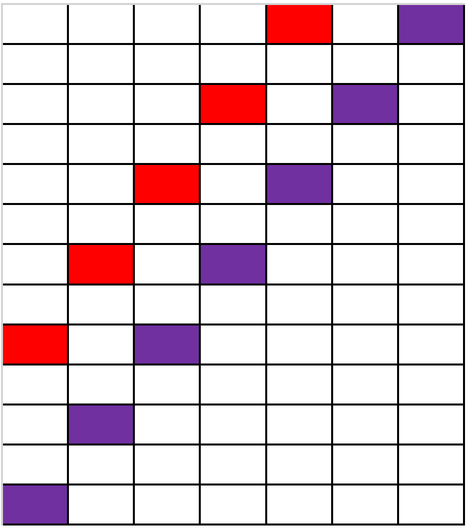
$$n = 8x + 15y \;\Rightarrow\; \begin{cases} n + 8 = 8(x+1) + 15y \\ n + 15 = 8x + 15(y+1) \end{cases}$$

- Como 15=2·8 – 1 (=16 – 1) tendremos que si n está en una celda, una celda a la izquierda y dos celdas más abajo está en número n + 1 y así sucesivamente

		n	n+15
		n+8	
	n+1		
n+2			

$$n = 8x + 15y \Rightarrow \; n + 1 = 8(x+2) + 15(y-1) \Rightarrow n + 2 = 8(x+4) + 15(y-2)$$

- Si llamamos coordenadas de una celda a la posición de la celda como en una matriz, definimos diagonal asociada a un número situada en la primera fila (1,k) a las celdas situadas en la tabla y en las posiciones: (1, k); (3, k-1); (5, k-2); ⋯ ; (2k-1, 1)



- Consideremos la celda de coordenadas (1, k) (coeficiente del 8 = 0, coeficiente del 15 = k – 1) y exigimos que en ella esté en número n:

$$n = 15 \cdot (k-1)$$

- Exigimos, además, que todas las celdas de la diagonal asociada estén en la tabla y que la diagonal asociada termine en la columna 1. Es decir, podremos bajar 14 celdas y desplazarnos a la izquierda k – 1 celdas terminando en la posición (2k – 1, k – 1). En esa celda estará el número n + 7 (k = 8 ⇒ coeficiente del 8 = 14, coeficiente del 15 = 0)

$$n + 7 = 14 \cdot 8 \;\;\Rightarrow\;\; n = 105$$

								(1,k)	
							n-15	n	
							n-7	n+8	
						n-14	n+1	.+16	
						n-6	n+9		
					n-13	n+2	.+17		
					n-5	n+10			
				n-12	n+3	.+18			
				n-4	.+11				
			n-11	n+4	.+19				
			n-3	.+12					
		n-10	n+5	.+20					
		n-2	.+13						
	n-9	n+6	.+21						
	n-1	.+14							
(2k-1, k-(k-1))=(15, 1) n-8	n+7	.+22							
	.+15								
	.+23								

No estará en la tabla el número n – 8, pues sus coordenadas caen fuera de la tabla. Y además en la tabla estarán todos los números posteriores a n – 8 (= 105 – 8). Es decir, faltará en número 97 y estarán todos los posteriores a 97. La contestación al enunciado es el número 97.

<u>Nota:</u> Los valores de n para los que no existe solución en 8x + 15y = n pueden ser obtenidos rellenando la tabla descrita y analizando los resultados

Valores de n sin solución = Franqueos imposibles de cumplir		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
9, 10 11, 12, 13, 14	1	8	23	38	53	68	83	98	113	128	143	158	173
17, 18, 19, 20, 21, 22	2	16	31	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181
25, 26, 27, 28, 29	3	24	39	54	69	84	99	114	129	144	159	174	189
33, 34, 35, 36, 37	4	32	47	62	77	92	107	122	137	152	167	182	197
41, 42, 43, 44	5	40	55	70	85	100	115	130	145	160	175	190	205
49, 50, 51, 52	6	48	63	78	93	108	123	138	153	168	183	198	213
57, 58, 59	7	56	71	86	101	116	131	146	161	176	191	206	221
65, 66, 67	8	64	79	94	109	124	139	154	169	184	199	214	229
73, 74	9	72	87	102	117	132	147	162	177	192	207	222	237
81, 82	10	80	95	110	125	140	155	170	185	200	215	230	245
97	11	88	103	118	133	148	163	178	193	208	223	238	253
	12	96	111	126	141	156	171	186	201	216	231	246	261
	13	104	119	134	149	164	179	194	209	224	239	254	269
	14	112	127	142	157	172	187	202	217	232			

<u>Octubre 20-27:</u> Sea dado un círculo y AB uno de sus diámetros. Sea C un punto fijo de AB y Q un punto variable sobre la circunferencia del círculo. Sea P un punto de la línea determinada por Q y C para el que:

$$\mathbf{AC}/\mathbf{CB} = \mathbf{QC}/\mathbf{CP}$$

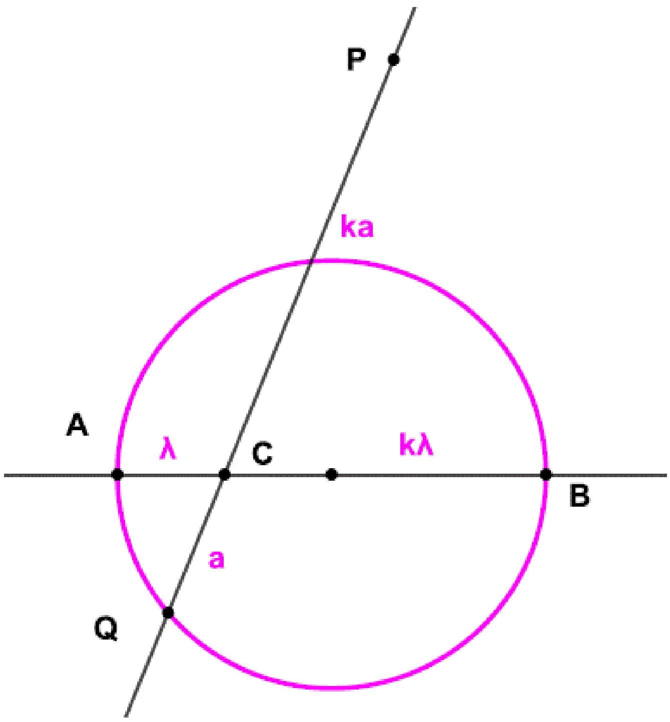
Describe el lugar geométrico del punto P

Solución:

Dibujemos la situación descrita.

Sea k la constante de proporcionalidad entre AC y CB:

$$\frac{1}{k}=\frac{AC}{CB}\left(=\frac{\lambda}{\lambda k}\right)=\frac{QC}{CP}$$

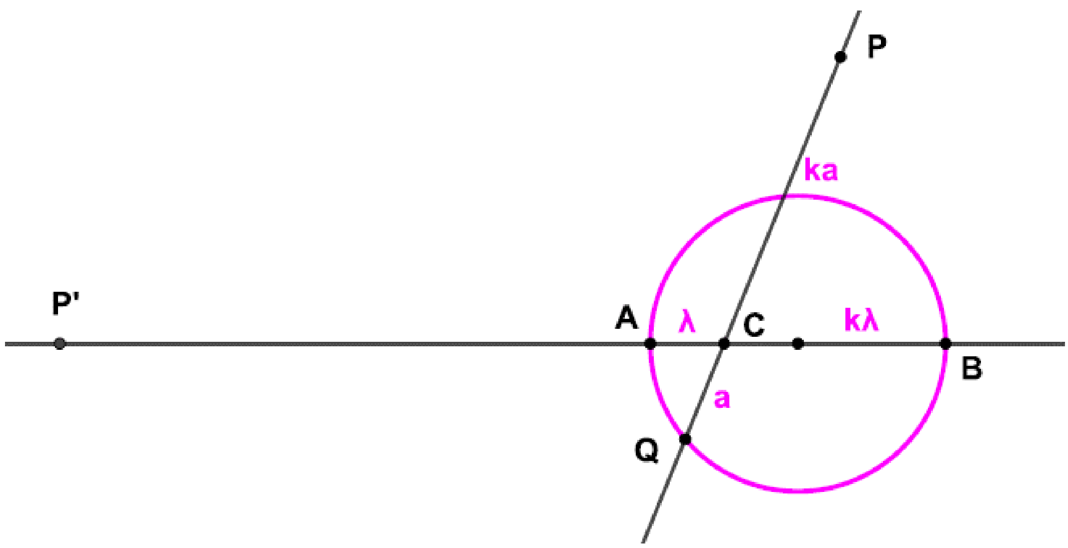


Se nos pide el lugar geométrico de los puntos P al hacer que Q describa la circunferencia de diámetro AB. Puesto que C se mantiene fijo, si el extremo Q del segmento QP describe una circunferencia, el extremo P del segmento QP también describe una circunferencia. Además puesto que C está en un diámetro de la circunferencia de diámetro AB, un diámetro de la circunferencia trazada por P también está en la recta que genera el segmento AB. Haciendo coincidir Q con A y con B tendremos el diámetro de la circunferencia que describe P

Si Q $\rightarrow$ A entonces P $\rightarrow$ B. Por lo que B es un punto de la circunferencia descrita por P

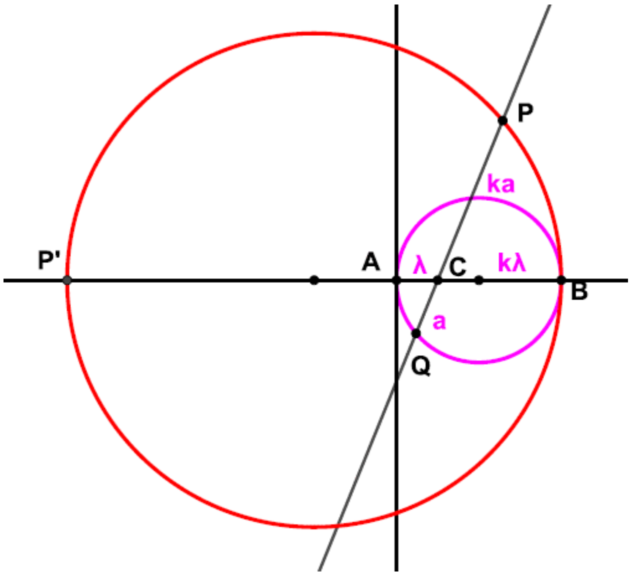
Si Q $\rightarrow$ B entonces P $\rightarrow$ P' siendo P' un punto de la recta que pasa por AB que cumple:

$$CP'=k\cdot CB=k\cdot k\lambda=k^2\lambda$$



Es decir, si R es el radio de la circunferencia descrita por el punto P tenemos:

$$2R=P'B=P'C+CB=k^2\lambda+k\lambda=\lambda k(k+1)\ \Rightarrow\ R=\frac{\lambda k(k+1)}{2}$$



Octubre 21-22: 1.- Demuestra que, si un número es racional, la parte decimal, la parte entera y el número no pueden estar en progresión geométrica.

2.- Halla un número positivo tal que su parte decimal, su parte entera y el número estén en progresión geométrica

Solución: Para la primera parte procederemos por reducción al absurdo. Sea e+p/q el número racional y supongamos que:

$$\frac{p}{q}, \qquad e, \qquad e+\frac{p}{q}$$

están en progresión geométrica. Entonces:

$$\frac{e}{\frac{p}{q}} = \frac{e+\frac{p}{q}}{e} \quad (= r)$$

Simplificando:

$$\frac{eq}{p} = \frac{eq+p}{qe} \;\; \Rightarrow \;\; e^2q^2 = (eq+p)p \;\; \Rightarrow \;\; e^2q^2 - epq - p^2 = 0$$

La última ecuación es una ecuación de segundo grado respecto a cada una de las incógnitas: e, p y q, que debe de tener soluciones enteras. Por ejemplo, respecto de e, tenemos:

$$e = \frac{pq \pm \sqrt{p^2q^2 + 4p^2q^2}}{2q^2} = \begin{cases} \dfrac{(1+\sqrt{5})p}{2q} \\ \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2q} \end{cases}$$

Con lo que:

$$\frac{(1 \pm \sqrt{5})p}{2q} \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; (1 \pm \sqrt{5}) \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt{5} \in \mathbb{Z}$$

que es un absurdo.

Para la segunda parte, representemos por {x} la parte decimal y por [x] la parte entera. Si {x}, [x] y x están en progresión geométrica, tendremos que:

$$\frac{[x]}{\{x\}} = \frac{x}{[x]} \;\Rightarrow\; \frac{[x]}{x-[x]} = \frac{x}{[x]} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\frac{x}{[x]}-1} = \frac{x}{[x]}$$

Si hacemos

$$z = \frac{x}{[x]}$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{z-1} = z \;\Rightarrow\; z^2 - z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(despreciamos la solución negativa). Luego si {x}, [x] y x están en progresión geométrica

$$\frac{x}{[x]} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (***)$$

Vamos a probar que si {x}, [x] y x están en progresión geométrica entonces [x] = 1. Por reducción al absurdo.

Si [x] = p ≥ 2, entonces: ({x}, p y x están en progresión aritmética)

$$\{x\} \cdot r = \; p \; \geq 2 \;\Rightarrow\; r \geq \frac{2}{\{x\}} > 2$$

Si r > 2:

$$[x] \cdot r = x > 2[x] \quad \text{¡absurdo!}$$

Por último, en (***) tenemos:

$$\frac{x}{[x]} = \frac{x}{1} = x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Nota: El único número positivo x tal que {x}, [x] y x están en progresión geométrica es el número áureo: φ

$$\{\varphi\} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$[\varphi] = 1 = \{\varphi\} \cdot r$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \; [\varphi] \cdot r$$

<u>Octubre 23:</u> Sea n un entero positivo. Prueba que si n es una potencia de 2 entonces n no se puede poner como suma de enteros positivos consecutivos.

<u>Solución:</u> Por reducción al absurdo. Supongamos que $n = 2^p$ con p ≥ 0. Si p = 0, tenemos n = 1 y 1 no se puede expresar como suma de al menos dos enteros positivos consecutivos. Si p = 1, tenemos n = 2 y 2 no se puede poner como suma de al menos dos enteros positivos. Sea pues p ≥ 2. Supongamos que 2^p es suma de k (≥ 2) enteros positivos consecutivos, entonces

$$2^p = (s+1) + (s+2) + \cdots + (s+k) = ks + (1+2+\cdots+k) = ks + \frac{k+1}{2}k = \frac{2ks + k^2 + k}{2} \; (*)$$

Por tanto:

$$0 = k^2 + k(2s+1) - 2^{p+1} \quad \text{con } p \geq 2 \text{ y } k \geq 2$$

es una ecuación de segundo grado (respecto de k) con al menos una solución entera mayor o igual a 2. Por las relaciones de Cardano-Vietà, tenemos:

$$\begin{aligned}&\text{suma de soluciones} = -(2s+1)\\&\text{producto de soluciones} = -2^{p+1}\end{aligned}$$

Es decir, la suma de soluciones es impar (por tanto, una debe ser par y la otra impar) y el producto de soluciones es una potencia de dos y por lo tanto las dos soluciones deben de ser pares (lo que contradice que una sea par y la otra impar), ya que k = 1 no es solución (de serlo, tendríamos en (*) $2^p = 2^p + 1$)

<u>Octubre 25-26:</u> Supongamos:

$$\mathbf{n\cdot(n+1)\cdot a_{n+1} = n\cdot(n-1)\cdot a_n - (n-2)\cdot a_{n-1} \quad (*)}$$

para todo entero positivo $n \geq 1$. Si $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$, halla:

$$\sum_{i=0}^{50} \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}}$$

<u>Solución:</u> Tenemos:

$$n = 1 \;\Rightarrow\; 1\cdot 2\cdot a_2 = 1\cdot 0\cdot a_1 - (1-2)\cdot a_0 = a_0 = 1 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \;\Rightarrow\; 3\cdot 2\cdot a_3 = 2a_2 \;\Rightarrow\; a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{3!}$$

$$\begin{aligned}n = 3 \;\Rightarrow\; 4\cdot 3\cdot a_4 = 3\cdot 2\cdot a_3 - a_2 \;\Rightarrow\; a_4 &= \frac{1}{4\cdot 3}\left(3\cdot 2\cdot\frac{1}{3!} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\cdot 3}\left(3\cdot 2\cdot\frac{1}{3!} - \frac{3}{3!}\right)\\ &= \frac{1}{4\cdot 3}\left(\frac{3\cdot 2 - 3}{3!}\right) = \frac{1}{4\cdot 3}\cdot\frac{3}{3!} = \frac{1}{4!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n = 4 \;\Rightarrow\; 5\cdot 4\cdot a_5 = 4\cdot 3\cdot a_4 - 2\cdot a_3 \;\Rightarrow\; a_5 &= \frac{1}{5\cdot 4}\left(4\cdot 3\cdot\frac{1}{4!} - 2\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{5\cdot 4}\left(4\cdot 3\cdot\frac{1}{4!} - \frac{2\cdot 4}{4!}\right)\\ &= \frac{1}{5\cdot 4}\left(\frac{4\cdot 3 - 2\cdot 4}{4!}\right) = \frac{1}{5\cdot 4}\cdot\frac{4}{4!} = \frac{1}{5!}\end{aligned}$$

Y sale como hipótesis de inducción

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Veamos si se cumple la ecuación recurrente (*)

$$n\cdot(n+1)\cdot a_{n+1} = n\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned}n\cdot(n-1)\cdot a_n - (n-2)\cdot a_{n-1} &= n\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{n!} - (n-2)\cdot\frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} - \frac{n-2}{(n-1)!}\\ &= \frac{n-1}{(n-1)!} - \frac{n-2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}\end{aligned}$$

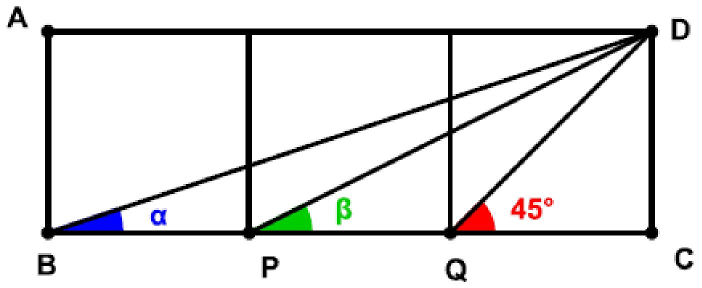
Con ello, tendremos:

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{50}}{a_{51}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{1}{2!}}+\frac{\frac{1}{2!}}{\frac{1}{3!}}+\cdots+\frac{\frac{1}{50!}}{\frac{1}{51!}}=\frac{1}{2}+\frac{4}{1}+\frac{3!}{2!}+\cdots+\frac{51!}{50!}=\frac{1}{2}+4+3+4+\cdots+51$$
$$=\frac{9}{2}+(3+4+5+\cdots+51)=\frac{9}{2}+\frac{3+51}{2}\cdot 49=\frac{2655}{2}$$

Octubre 28: Sea ABCD un rectángulo con BC = 3·AB. Prueba que si P y Q son puntos de BC con BP = PQ = QC, entonces:

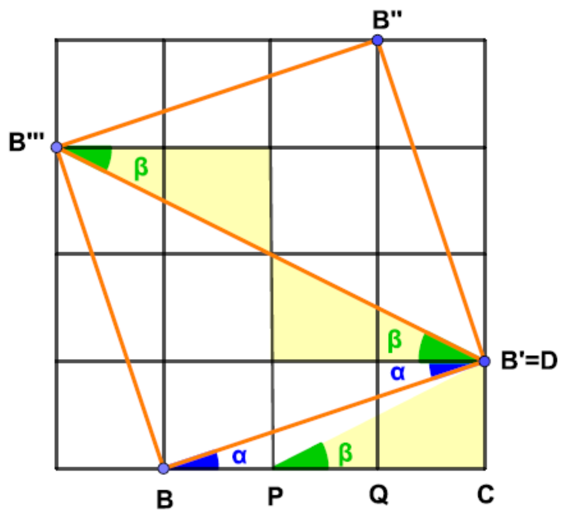
∠DBC + ∠DPC = ∠DQC

Solución: Tendremos, dibujando la situación descrita en el enunciado:



Hemos de probar que $\alpha + \beta = 45°$ (pues ∠DQC = 45°).

A partir del rectángulo ABCD construimos un cuadrado 4x4. A partir de él, construimos el cuadrado BB'B''B'''



Los ángulos de color azul son iguales por alternos internos. Los ángulos en verde son iguales pues los triángulos amarillos son iguales.

Tenemos entonces que $\alpha + \beta = 45°$ pues B'''B' es la diagonal del cuadrado BB'B''B'''

Octubre 29-30: A dos estudiantes de séptimo grado se les permitió jugar en un torneo de ajedrez para estudiantes de octavo grado. Cada pareja de participantes jugó una vez entre sí y cad2x-3a uno de los participantes recibió un punto por ganar cada partida, medio por hacer tablas y cero puntos `por partida perdida. Los dos estudiantes de séptimo grado recibieron un total de ocho puntos y los estudiantes de octavo grado obtuvieron, todos ellos, la misma cantidad de puntos. ¿Cuántos estudiantes de octavo grado (como mínimo) participaron en el torneo? ¿Es la solución única?

Solución: Si hay n jugadores de octavo, hay en total n + 2 jugadores en el torneo: Puesto que cada par de jugadores juega una partida, se habrán celebrado C_2^{n+2} partidas de ajedrez. Puesto que en cada partida se distribuye un punto entre los dos jugadores tendremos que en todo el torneo se han distribuido

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$$

puntos. Puesto que los dos alumnos de séptimo grado han obtenido un total de 8 puntos, si cada jugador de octavo grado consigue x puntos tendremos que debe cumplirse la ecuación:

$$nx + 8 = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} \;\Rightarrow\; n^2 + (3-2x)n - 14 = 0 \;\Rightarrow\; n = \frac{2x - 3 \pm \sqrt{(3-2x)^2 + 56}}{2}$$

Y puesto que la ecuación debe tener al menos una solución entera positiva, debe ser:

$$(3-2x)^2 + 56$$

un cuadrado perfecto (mayor que $\sqrt{56} = 7{,}48\ldots\ldots$). Analicemos los casos posibles:

$$(3-2x)^2 + 56 = 8^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm\sqrt{8} \;\Rightarrow\; x \notin \mathbb{N}$$

$$(3-2x)^2 + 56 = 9^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm 5 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \;\text{ No} \\ \mathbf{x = 4} \Rightarrow n = \dfrac{5 \pm 9}{2} \;\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{n = 7} \\ n = -2 \;\text{ No} \end{cases} \end{cases}$$

Luego ya tenemos una solución (la de menor valor de n): Hay (n =) 7 jugadores de octavo grado y cada uno de ellos ha conseguido en el torneo 4 puntos

$$(3-2x)^2 + 56 = 10^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm\sqrt{44} \;\Rightarrow\; x \notin \mathbb{N}$$

$$(3-2x)^2 + 56 = 11^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm\sqrt{65} \;\Rightarrow\; x \notin \mathbb{N}$$

$$(3-2x)^2 + 56 = 12^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm\sqrt{88} \;\Rightarrow\; x \notin \mathbb{N}$$

$$(3-2x)^2 + 56 = 13^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm\sqrt{113} \;\Rightarrow\; x \notin \mathbb{N}$$

$$(3-2x)^2 + 56 = 14^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm\sqrt{140} \;\Rightarrow\; x \notin \mathbb{N}$$

$$(3-2x)^2 + 56 = 15^2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = \pm 13 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -5 \;\text{ No} \\ \mathbf{x = 8} \;\Rightarrow n = \dfrac{5 \pm 9}{2} \;\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{n = 14} \\ n = -1 \;\text{ No} \end{cases} \end{cases}$$

Luego, aparece otra solución: hay (n =)14 jugadores de octavo grado y cada uno de ellos ha conseguido 8 puntos en el torneo