SOLUCIONES ENERO 2022

PROBLEMAS PARA BACHILLERATO. AUTORES: Colectivo "CONCURSO DE PRIMAVERA"

http://www.concursoprimavera.es/#concurso.

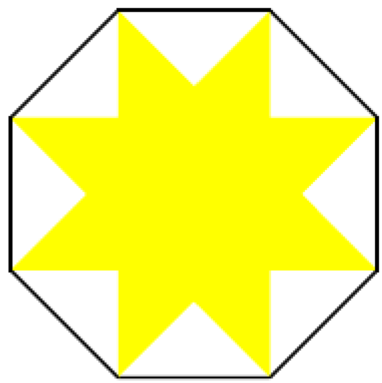
Enero 1: ¿Cuántos números menores que 100 son el producto de tres números primos?

Solución: El mayor factor primo que puede tener cualquiera de los números buscados es el 23, pues el menor número producto de tres factores primos con factor mayor que 23 es: 2·2·29 = 116. Así pues, hay que ver cuántos números menores que 100 son productos de tres factores de la lista: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. La mejor forma de obtenerlos es ir escribiendo, ordenadamente, tres factores de manera que cada factor sea mayor o igual que el factor que está a su izquierda:

2·2·2; 2·2·3; 2·2·5; 2·2·7; 2·2·11; 2·2·13; 2·2·17; 2·2·19; 2·2·23	(9 números)
2·3·3; 2·3·5; 2·3·7; 2·3·11; 2·3·13	(5 números)
2·5·5; 2·5·7; 2·7·7	(3 números)
3·3·3; 3·3·5; 3·3·7; 3·3·11; 3·5·5	(5 números)

En total, (9 +5 + 3 + 5 =) 22 números

Enero 3: En la figura hay un octógono regular de lado 4 cm. Halla el área de la estrella octogonal

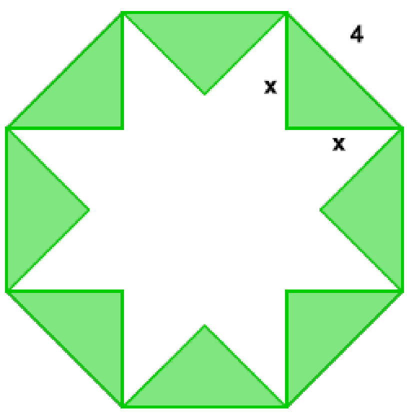


Solución: Para calcular el área de la estrella, al área del octógono le restaremos el área de los ocho triángulos rectángulos isósceles verdes de la ilustración de la izquierda. Al aplicar Pitágoras, los catetos de estos triángulos miden:

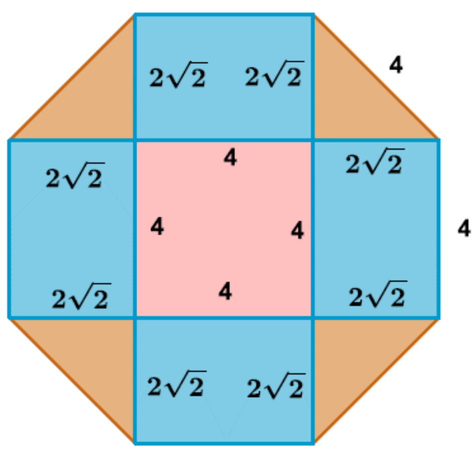
$$2x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, al área del octógono hay que restarle:

$$8 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 32$$



Para hallar el área del octógono, calcularemos el área del cuadrado rojo, el área de los 4 rectángulos azules y el área de los 4 triángulos marrones (mirar figura a la derecha). Tendremos:



$$A = 4^2 + 4 \cdot \left(2\sqrt{2} \cdot 4\right) + 4 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} - 32 = 32 + 32\sqrt{2} - 32 = 32\sqrt{2}$$

<u>Enero 4:</u> Una bolsa contiene m bolas blancas y n negras. Extraemos una bola al azar y la devolvemos añadiendo k bolas del mismo color que la extraída. Sacamos otra bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca?

<u>Solución:</u> Consideremos los sucesos:

B_1 = “la primera bola extraída es blanca”

B_2 = “la segunda bola extraída es blanca”

N_1 = “la primera bola extraída es negra”

Entonces:

$$P(B_2) = P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+k}{m+n+k} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n+k}$$
$$= \frac{m(m+n+k)}{(m+n)\cdot(m+n+k)} = \frac{m}{m+n}$$

<u>Enero 5:</u> ¿Cuánto vale la suma de todos los productos de dos naturales distintos tomados del 1 al n?

<u>Lema previo:</u>

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostración del lema: Partimos de que:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Dándole diferentes valores a k, tenemos:

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$
$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad 3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$$
$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad 4^3 - 3^3 = 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$k = n \quad \Rightarrow \quad (n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$$

Sumando miembro a miembro todas las igualdades, tendremos:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

De donde:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{3}$$

Con lo que llegamos a la tesis del lema.

<u>Solución:</u> Tenemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2S$$

Donde S es la suma de todos los productos de dos naturales distintos tomados del 1 al n. De la igualdad anterior, tenemos:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2S$$

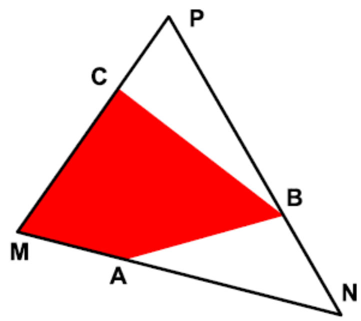
Aplicando el lema:

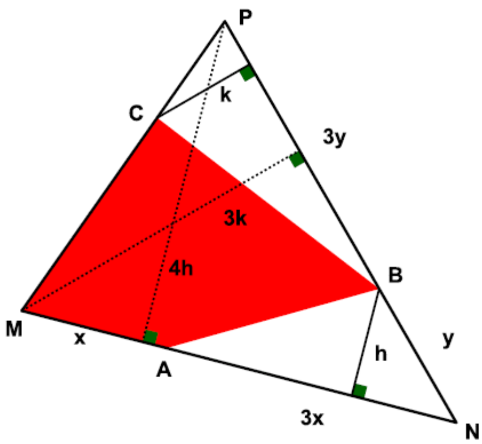
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2S$$

Por tanto:

$$S = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

Enero 6-7: Los puntos A, B y C de la figura dividen a cada lado del triángulo ΔMNP en dos trozos que están en la relación 1:3. Halla la fracción del área del triángulo ΔMNP coloreada de rojo





Solución: Tendremos:

$$\left.\begin{aligned} A_{\Delta ABN} &= \frac{3xh}{2} \\ A_{\Delta MNP} &= \frac{4x \cdot 4h}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_{\Delta ABN}}{A_{\Delta MNP}} = \frac{3}{16}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{\Delta CBP} &= \frac{3yk}{2} \\ A_{\Delta MNP} &= \frac{4y \cdot 4k}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_{\Delta ABN}}{A_{\Delta MNP}} = \frac{3}{16}$$

Luego:

$$\frac{A_{MABC}}{A_{\Delta MNP}} = 1 - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = \frac{5}{8}$$

Enero 8: ¿Para qué valores de x la expresión:

$$\frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1 + \mathrm{tag}^2 x}$$

alcanza su mayor valor y cuál es este?

Solución: Tendremos:

$$f(x)=\frac{\sin^3 x\cdot\cos x}{1+\tan^2 x}=\frac{\sin^3 x\cdot \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\sin^3 x\cdot\cos^3 x=\frac{1}{8}(2\sin x\cos x)^3=\frac{1}{8}(\sin 2x)^3$$

Como la función y = sin x oscila entre –1 y 1 y la función $y = x^3$ es estrictamente creciente, tendremos que el máximo de la función se alcanza cuando:

$$\sin 2x = 1 \ \text{ i.e. } \ x = 45° \pm k\cdot 360°$$

y en este caso, el máximo de la función es 1/8.

Enero 10: Si

$$\mathbf{x^2+xy+y^2=84}$$
$$\mathbf{x-\sqrt{xy}+y=6}$$

halla x·y

Solución: La primera ecuación puede ser reescrita como:

$$x^2+2xy+y^2=84+xy \ \Rightarrow \ (x+y)^2=84+xy$$

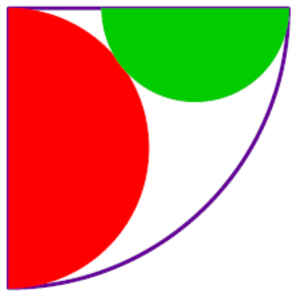
Con la segunda ecuación, tenemos:

$$x+y=6+\sqrt{xy} \ \Rightarrow \ (x+y)^2=\left(6+\sqrt{xy}\right)^2=36+xy+12\sqrt{xy}$$

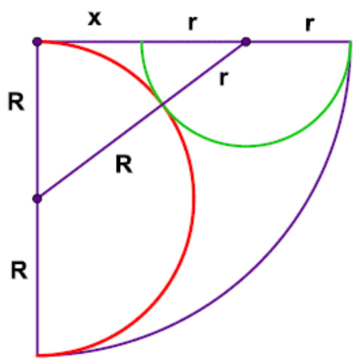
Igualando los segundos miembros:

$$84+xy=36+xy+12\sqrt{xy} \ \Rightarrow 84-36=12\sqrt{xy} \ \Rightarrow xy=\left(\frac{48}{12}\right)^2=16$$

Enero 11: El dibujo muestra un cuadrante de radio s y dos semicircunferencias tangentes. Halla el radio de la semicircunferencia pequeña.



Solución:



Sea R (r) el radio de la semicircunferencia grande (pequeña). Aplicando Pitágoras tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} R^2+(x+r)^2=(R+r)^2 \\ x+2r=2R=s \end{array}\right\}$$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

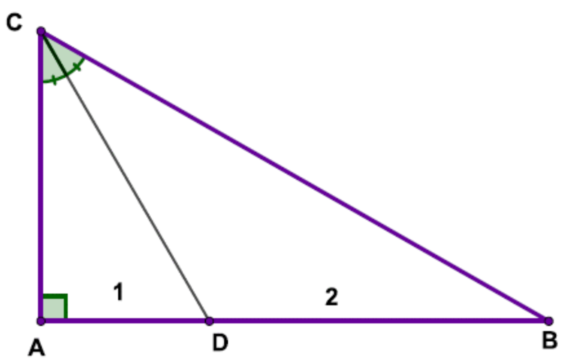
$$R^2+(2R-2r+r)^2=(R+r)^2$$

que lleva a:

$$4R(R-r)=2Rr \ \Rightarrow \ r=\frac{2R}{3}=\frac{s}{3}$$

Enero 12: En un triángulo rectángulo la bisectriz de un ángulo agudo corta al cateto opuesto en dos trozos de longitud 1 y 2: ¿Cuál es la longitud del segmento de bisectriz interior al triángulo?

Solución:



Por el teorema de la bisectriz, tenemos:

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{DB}}$$

Si a=AC, tendremos:

$$\frac{\mathrm{a}}{1} = \frac{\mathrm{CB}}{2} \Rightarrow \mathrm{CB} = 2\mathrm{a}$$

Y aplicando Pitágoras, en ΔABC:

$$\mathrm{CB}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CA}^2 \Rightarrow 4\mathrm{a}^2 = 9 + \mathrm{a}^2 \Rightarrow \mathrm{a} = \sqrt{3}$$

Y ahora en ΔCAD:

$$\mathrm{CD}^2 = 1 + \mathrm{a}^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \mathrm{CD} = 2$$

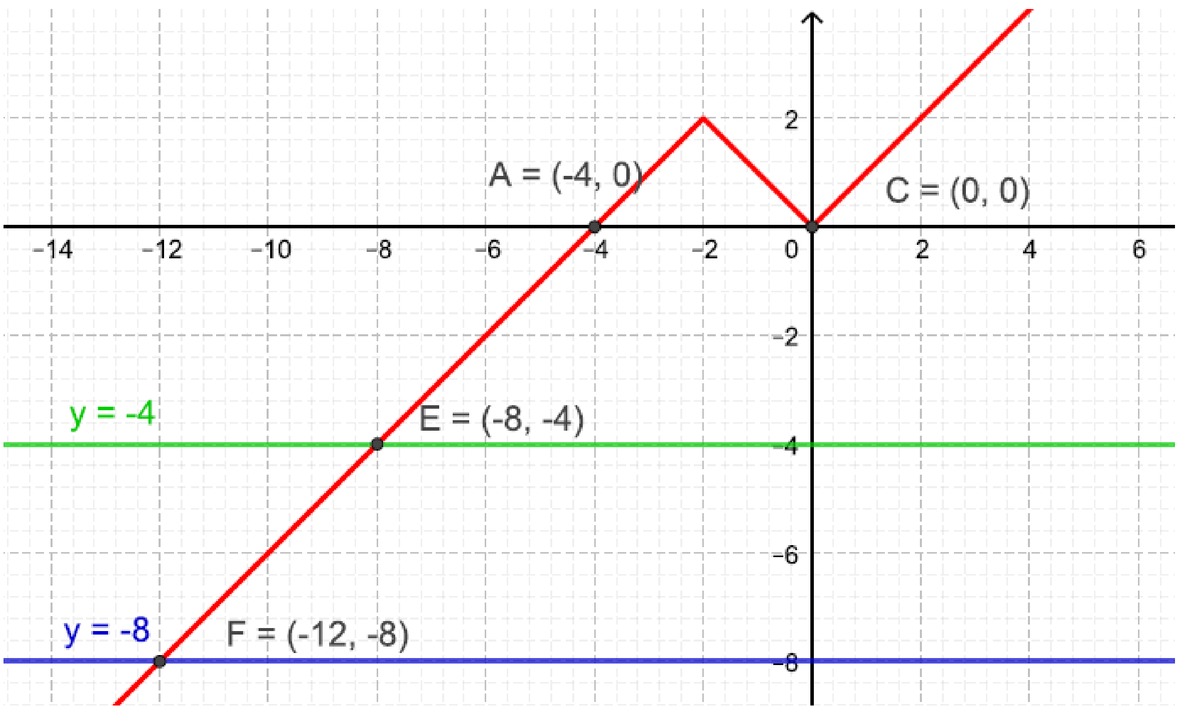
Enero 13: Consideremos los naturales con nueve cifras. ¿Cuántos números hemos de extraer para asegurar que al menos dos de ellos tienen la misma cifra en las decenas de millar?

Solución: La cifra que aparece en las decenas de millar, puede ser cualquiera de las del conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9}. Si llamamos nido i a los números que tienen en las decenas de millar el dígito i tendremos un total de 10 nidos. Extrayendo del conjunto inicial 11 números tendremos que al menos 2 están en el mismo nido, es decir, al menos dos tendrán la misma cifra en las decenas de millar.

Enero 14: Resuelve **f(f(f(x))) = 0**, donde:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x + 4 \text{ sii } x \leq -2} \\ \mathbf{-x \text{ sii } -2 < x < 0} \\ \mathbf{x \quad \text{sii } x \geq 0} \end{cases}$$

Solución: Basta con tener la representación gráfica de la función y analizar la ecuación proporcionada.



Tendremos:

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = 0 \Rightarrow f\big(f(x)\big) = \begin{cases} = 0 \quad \Rightarrow f(x) = \begin{cases} = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{cases} = 0 \\ = -4 \end{cases} \\ = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -8 \end{cases} \\ = -4 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -8 \quad \Rightarrow \quad x = -12 \end{cases}$$

Luego, la ecuación tiene cuatro raíces, a saber: x = 0, x = – 4, x = – 8, x = – 12.

Enero 15: De la función f(x) se sabe que es periódica de periodo 5 y que en [3, 8[verifica:

$$\mathbf{f(x) = x^2 - 10x + 25}$$

Hallad f(2022).

Solución: Veamos a qué intervalo pertenece el valor x = 2022.

$$2022 \geq 3 + 5(n-1) \ \Rightarrow \ \frac{2022-3}{5} \geq n - 1 \ \Rightarrow 403{,}8 \geq n - 1 \ \Rightarrow n = 404$$

Es decir:

$$3 + 5(404-1) = 2018 \leq 2022 \leq 8 + 5(404-1) = 2023$$

Como 2022 – 2018 = 4, tendremos:

$$f(2022) = f(3+4) = f(7) = 7^2 - 10 \cdot 7 + 25 = 4$$

Enero 17: ¿Cuántas parejas de enteros (x, y) con $x \leq y$, verifican que su producto es igual a cinco veces su suma?

Solución: Hay que resolver en $\mathbb{Z}$ la ecuación:

$$x \cdot y = 5(x+y) \quad \text{con} \quad x \leq y$$

Tenemos:

$$xy - 5y = 5x \ \Rightarrow \ y(x-5) = 5x \ \Rightarrow \ y = \frac{5x}{x-5} = \frac{5x - 25 + 25}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}$$

(ya que $x \neq 5$, pues si x = 5 $\Rightarrow$ 5y = 5(5 + y) =25 + 5y $\Rightarrow$ 0 = 25). Así pues, x – 5 debe ser un divisor de 25, i. e.:

$$x - 5 \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$$

Analicemos, caso a caso:

$$x - 5 = 1 \ \Rightarrow \ x = 6 \ \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{1} = 30 \ \Rightarrow \ \mathbf{x = 6;\ \ y = 30 \text{ es solución}}$$

$$x - 5 = -1 \ \Rightarrow \ x = 4 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{-1} = -20 \Rightarrow x = 6;\ y = -20 \text{ no es solución pues } x = 4 > y = -20$$

$$x - 5 = 5 \ \Rightarrow \ x = 10 \ \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{5} = 10 \ \Rightarrow \ \mathbf{x = 10;\ \ y = 10 \text{ es solución}}$$

$$x - 5 = -5 \ \Rightarrow \ x = 0 \ \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{-5} = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{x = 0;\ \ y = 0 \text{ es solución}}$$

$$x - 5 = 25 \Rightarrow \ x = 30 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{25} = 6 \ \Rightarrow \ x = 30;\ y = 6 \text{ no es solución pues } x = 30 > y = 6$$

$$x - 5 = -25 \Rightarrow x = -20 \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{-25} = 4 \ \Rightarrow \ \mathbf{x = -20;\ \ y = 4 \text{ es solución}}$$

Enero 18 : ¿Cuál es el resto de la división de

$$\mathbf{P(x) = x^{200} - 2x^{199} + x^2 + x + 1}$$

entre $D(x) = x^2 - 3x + 2$?

Solución 1: Tendremos, puesto que $D(x) = (x - 1)\cdot(x - 2)$, que existen polinomios $q(x)$ y $ax + b$:

$$\mathrm{P(x) = q(x) \cdot (x-1) \cdot (x-2) + ax + b}$$

Dándole a x el valor 1, tenemos:

$$\mathrm{P(1)} = \begin{cases} = 1^{200} - 2 \cdot 1^{199} + 1^2 + 1 + 1 = 2 \\ = \mathrm{q(1)} \cdot (1-1) \cdot (1-2) + \mathrm{a} + \mathrm{b} \end{cases} \Rightarrow 2 = \mathrm{a} + \mathrm{b}$$

Dándole a x el valor 2, tenemos:

$$\mathrm{P(2)} = \begin{cases} = 2^{200} - 2 \cdot 2^{199} + 2^2 + 2 + 1 = 7 \\ = \mathrm{q(1)} \cdot (2-1) \cdot (2-2) + 2\mathrm{a} + \mathrm{b} \end{cases} \Rightarrow 7 = 2\mathrm{a} + \mathrm{b}$$

Por último:

$$\begin{cases} \mathrm{a + b = 2} \\ \mathrm{2a + b = 7} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{a = 5, b = -3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r(x) = 5x - 3}$$

Solución 2: Puesto que $D(x) = (x - 1)\cdot(x - 2)$, por el teorema del resto:

$$\mathrm{P(x) = Q_1(x)(x-1) + P(1) \quad \Rightarrow \quad (x-2)P(x) = Q_1(x)(x-1)(x-2) + P(1)(x-2)}$$

$$\mathrm{P(x) = Q_2(x)(x-2) + P(2) \quad \Rightarrow \quad (x-1)P(x) = Q_1(x)(x-1)(x-2) + P(2)(x-1)}$$

Restando las dos últimas igualdades:

$$\mathrm{\big((x-2)-(x-1)\big)P(x) = (-1)P(x) = \big(Q_1(x) - Q_2(x)\big)(x-1)(x-2) + P(1)(x-2) - P(2)(x-1)}$$

De donde:

$$\mathrm{P(x) = \big(Q_2(x) - Q_1(x)\big)(x-1)(x-2) + P(2)(x-1) - P(1)(x-2)}$$

Y, por la unicidad de la descomposición de la división de polinomios, (puesto que $\mathrm{grd}\big(\mathrm{P(2)(x-1) - P(1)(x-2)}\big) = 1 < 2 = \mathrm{grd}\big(\mathrm{(x-1)(x-2)}\big)$, el cociente y el resto de la división entre P(x) y D(x) son:

$$\mathrm{C(x) = Q_2(x) - Q_1(x); \quad R(x) = P(2)(x-1) - P(1)(x-2)}$$

Por último, como $P(2) = 7$ y $P(1) = 2$, tenemos:

$$\mathrm{R(x) = 7(x-1) - 2(x-2) = 5x - 3}$$

Enero 19: Se tienen diez naturales consecutivos. La suma de nueve de ellos da 2022. ¿Qué número no hemos sumado?

Solución: Sean los diez naturales consecutivos:

$$\mathrm{x-4, \quad x-3, \quad x-2, \quad x-1, \quad x, \quad x+1, \quad x+2, \quad x+3, \quad x+4, \quad x+5}$$

Tendremos, si el no sumado es $x - k$ ($k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$) :

$$\mathrm{10x + 5 = 2022 + (x - k) \ \Rightarrow \ 9x = 2017 - k \ \Rightarrow \ x = \frac{2017 - k}{9} = \frac{224 \cdot 9 + 1 - k}{9} = 224 + \frac{1 - k}{9}}$$

Y como x es natural, 9 a de dividir a $1 - k$. La única posibilidad (debido a los valores de k) es que $1 - k = 0$, es decir que $k = 1$. Con ello $x = 224$ y el número no sumado es ($x - 1 =$) 223

Enero 20: Los puntos A y B son puntos de la gráfica de

$$y = x^2 - 7x - 1$$

Halla la longitud del segmento AB si (0, 0) es su punto medio.

Solución: Como A y B son puntos de la parábola tendremos:

$$A(a;\ a^2 - 7a - 1)\quad B(b;\ b^2 - 7b - 1)$$

Y como (0; 0) es el punto medio del segmento AB, tendremos:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 0 \\ \dfrac{a^2 - 7a - 1 + b^2 - 7b - 1}{2} = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$b = -a$$

que sustituida en la segunda lleva a:

$$2a^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad b = \mp 1$$

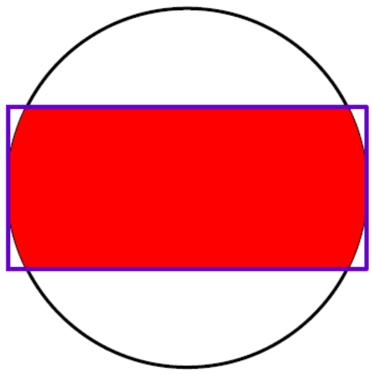
Los puntos son, pues:

$$A(1;\ -7)\ \text{y}\ B(-1; 7) \quad \text{o} \quad A(-1;\ 7)\ \text{y}\ B(1;\ -7)$$

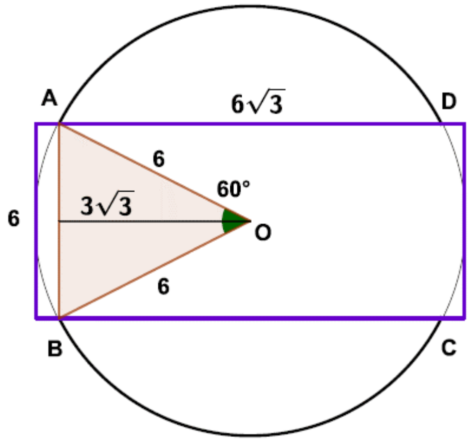
La distancia entre ellos es:

$$d(A; B) = \sqrt{(1+1)^2 + (-7-7)^2} = 10\sqrt{2}$$

Enero 21-22: El círculo y el rectángulo de la figura tienen el mismo centro. Las dimensiones del rectángulo son 6x12 y los lados pequeños del rectángulo son tangentes al círculo, ¿cuál es el área de la región común al círculo y al rectángulo?



Solución:



El triángulo ΔAOB es equilátero de lado 6, por lo que el ángulo en O es de 60° y su altura es

$$\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad AD = 6\sqrt{3}$$

El área de la zona solicitada será, el área de dos sectores circulares de ángulo 60° y radio 6 más el área de dos triángulos ΔAOD.

El área del sector circular es:

$$\frac{1}{6}\pi 6^2 = 6\pi$$

El área del triángulo ΔAOD es:

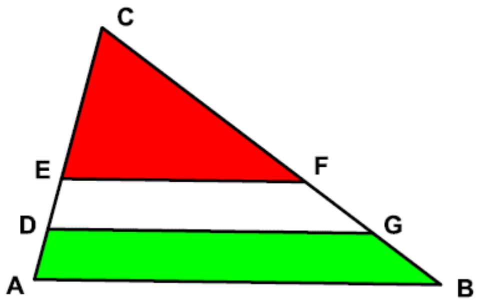
$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$

Así pues, el área pedida es:

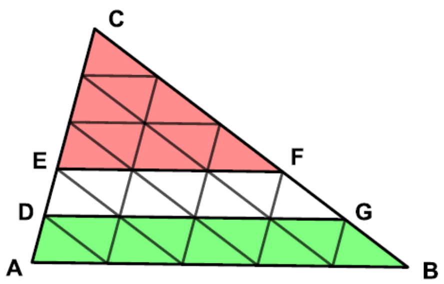
$$2\left(6\pi + 9\sqrt{3}\right) = 12\pi + 18\sqrt{3}$$

Enero 24-25-31: En el dibujo EF//DG//AB. Las zonas sombreadas tienen igual área y CD = 4·DA.

Halla la razón entre CE y EA



Solución "sin palabras":



$$A_{\Delta ECF} = 9\Delta$$
$$A_{ABGD} = 9\Delta$$
$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

Solución 2: Tomando AD = 1 entonces DC= 4 y AC = 5. Los triángulos ΔCDG y ΔCAB son semejantes (pues están en posición de Tales) con razón de semejanza

$$k = \frac{DC}{AC} = \frac{4}{5}$$

Por tanto, sus áreas estarán en proporción:

$$k^2 = \frac{16}{25}$$

Por tanto:

$$A_{\Delta CDG} = \frac{16}{25} A_{\Delta ABC}$$
$$A_{ABGD} = \frac{9}{25} A_{\Delta CEF}$$

Los triángulos ΔCEF y ΔCAB también son semejantes y la razón de sus áreas es 9/25, luego su razón de semejanza es 3/5. De aquí:

$$\frac{CE}{CA} = \frac{3}{5}$$

y como CA = 5, entonces CE = 3 y EA = 2, de donde:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

Enero 26: Resuelve en $\mathbb{R}$

$$\mathbf{x^2 + y^2 = |x| + |y|}$$

Solución: Las soluciones de la ecuación serán los puntos de la gráfica de la expresión.

Sea $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Entonces:

$$x^2 + y^2 = |x| + |y| \Rightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

que es una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalmente sólo sirven los puntos de esta circunferencia que cumplen $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Sea $x \geq 0$ e $y < 0$. Entonces:

$$x^2 + y^2 = |x| + |y| \Rightarrow x^2 - x + y^2 + y = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

que es una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalmente sólo sirven los puntos de esta circunferencia que cumplen $x \geq 0$ e $y < 0$.

Sea $x < 0$ e $y \geq 0$. Entonces:

$$x^2 + y^2 = |x| + |y| \Rightarrow x^2 + x + y^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

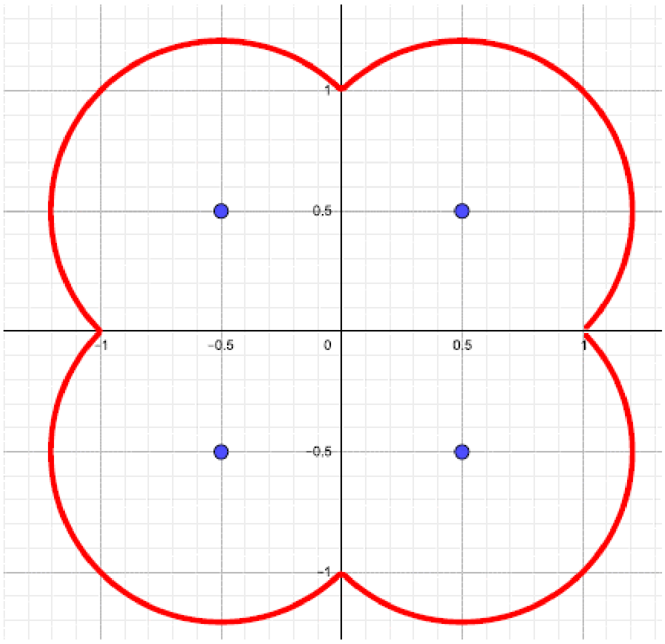
que es una circunferencia de centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalmente sólo sirven los puntos de esta circunferencia que cumplen $x < 0$ e $y \geq 0$.

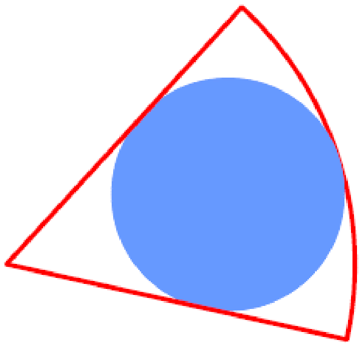
Sea $x < 0$ e $y < 0$. Entonces:

$$x^2 + y^2 = |x| + |y| \Rightarrow x^2 + x + y^2 + y = 0 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

que es una circunferencia de centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Naturalmente sólo sirven los puntos de esta circunferencia que cumplen $x < 0$ e $y < 0$.

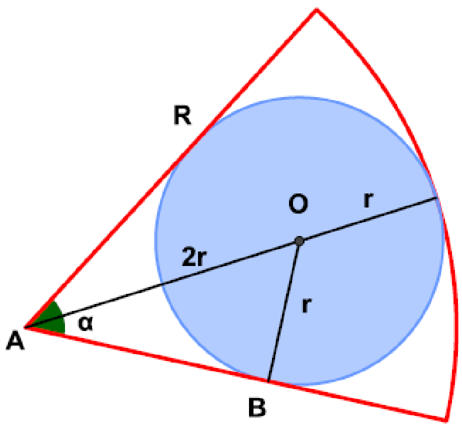
Las soluciones de la ecuación son los puntos de la curva roja:





Enero 27: Si el cociente entre el radio del sector circular y el radio del círculo es tres, ¿cuál es el cociente entre sus áreas?

Solución:

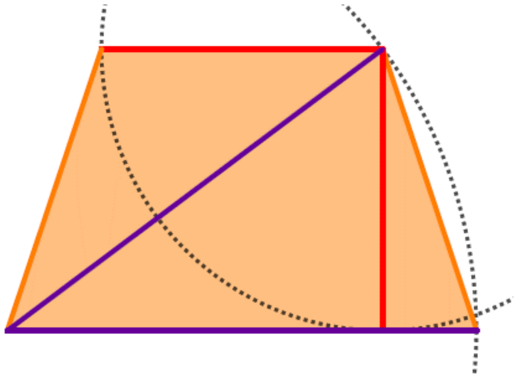


Sea R (r) el radio del sector circular y el radio del círculo. Del enunciado R = 3r. Sea O el centro del círculo, tendremos en el triángulo rectángulo ΔAOB:

$$\mathrm{OB} = \mathrm{r} \;\Rightarrow\; \mathrm{AO} = 2\mathrm{r} \;\Rightarrow\; \Delta\mathrm{AOB} \text{ es } 30° - 60° - 90° \;\Rightarrow\; \alpha = 60°$$

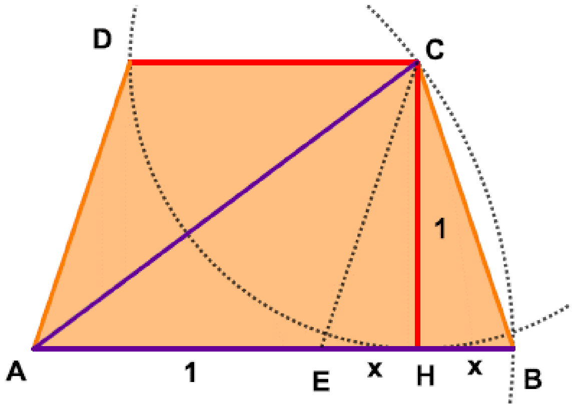
Luego, si A_R (A_r) es el área del sector circular (círculo) tendremos:

$$\frac{A_R}{A_r} = \frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2} = \frac{R^2}{6r^2} = \frac{(3r)^2}{6r^2} = \frac{3}{2}$$



Enero 28: Si la base mayor de un trapecio isósceles mide igual que la diagonal y la base menor mide igual que la altura del trapecio, halla el cociente entre la longitud de la base menor y la de la base mayor.

Solución:



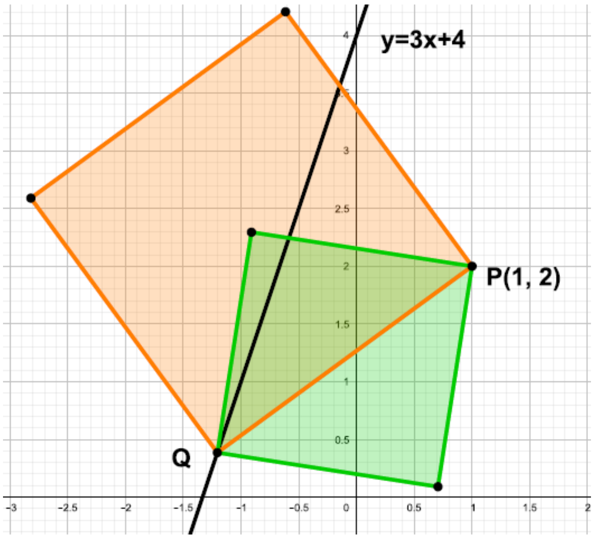
Trazamos el segmento CE, paralelo al AD. Tomemos la altura del trapecio como 1. Entonces: AE = 1, AC = AB = 1 + 2x siendo x = EH = HB, y aplicando Pitágoras en ΔAHC, rectángulo en H:

$$(1+2x)^2 = 1^2 + (1+x)^2 \;\; \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ sin sentido} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto:

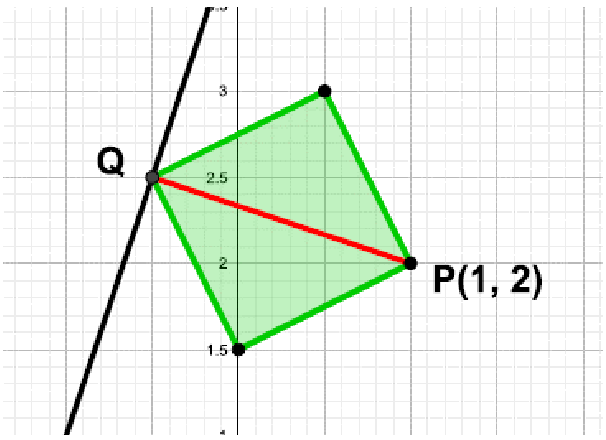
$$AB = 1 + \frac{2}{3}, \quad \frac{AB}{DC} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$$

Enero 29: Un cuadrado tiene un vértice en el punto P(1, 2) y otro en la recta y = 3x + 4. ¿Cuál es el menor valor posible para su área?



Solución: Según se observa en la ilustración de la derecha, la elección de un punto de la recta origina dos cuadrados: el de lado PQ (de color naranja) y el de diagonal PQ (de color verde). Como interesa el cuadrado de menor área, consideraremos solo el de diagonal PQ

Buscamos, pues, el punto de la recta y = 3x + 4 que aporte la menor diagonal posible. Ese punto es, obviamente la proyección del punto P sobre la recta y = 3x + 4.



El cuadrado buscado tiene un área de:

$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{d^2}{2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

donde d es la diagonal del cuadrado, es decir:

$$d = d\big((x_0, y_0); Ax + By + C = 0\big) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|-3 + 2 - 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$