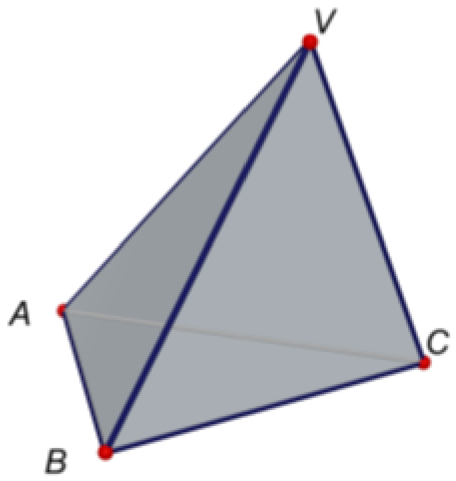
SOLUCIONES FEBRERO 2022

PROBLEMAS PARA UTILITZAR PROGRAMAS GEOMÉTRICOS. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

Febrero 1-2: La base de un tetraedro es un triangulo equilátero, y les tres caras laterales desplegadas y puestas en un plano forman un trapecio de lados 10, 10, 10 y 14 unidades de longitud.

Calcular la suma de las longitudes de todas las aristas del tetraedro y también determinad su área.

KöMaL C1559.



Solución: Sea ABCV el tetraedro de base el triángulo equilátero de lados 10, puesto que el desarrollo tiene tres lados iguales a 10.
Sea el trapecio isósceles AA'CB formado por el desarrollo de las caras laterales.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA'} = 10$ aristas de la base del tetraedro,

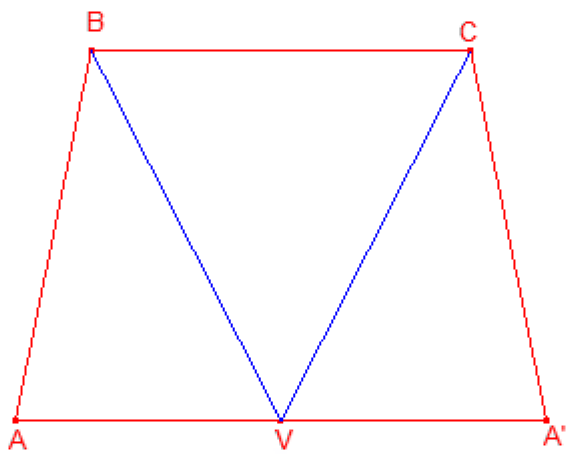
$$\overline{AA'} = 14$$

El vértice V del tetraedro es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$

$$\overline{AV} = 7$$

Sean $\overline{BV} = \overline{CV} = a$ las otras dos aristas. Sea P la proyección de B sobre $\overline{AA'}$

$$\overline{PV} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 5.$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BPV}$

$$a = 11$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{APB}$

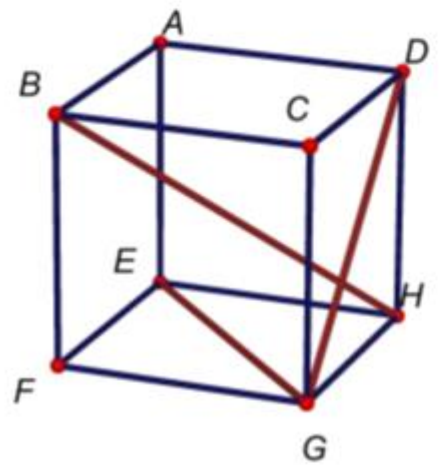
$$\overline{BP} = 4\sqrt{6}$$

La suma de las longitudes de las aristas es:

$$L_{arestes} = 3\overline{AB} + 2a + \overline{AV} = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 7 = 59 \text{ u}$$

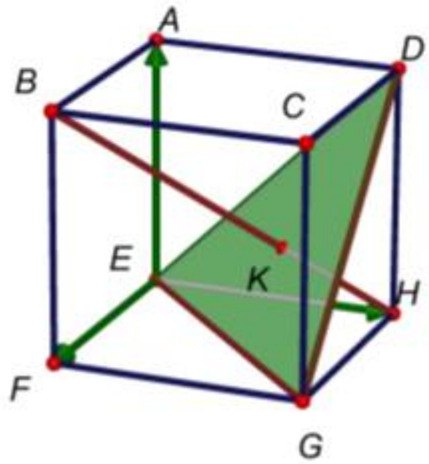
El área del tetraedro es:

$$S_{ABCV} = S_{ABC} + S_{AA'CB} = \frac{\sqrt{3}}{4}10^2 + \frac{14+10}{2} \cdot 4\sqrt{6} = 25\sqrt{3} + 48\sqrt{6}$$



<u>Febrero 3-4:</u> Sea el cubo ABCDEFGH, de arista 1.

a) Probad que $\overline{\mathrm{BH}}$ es perpendicular a $\overline{\mathrm{EG}}$.
b) Probad que $\overline{\mathrm{BH}}$ es perpendicular a $\overline{\mathrm{GD}}$.
c) Probad que $\overline{\mathrm{BH}}$ es perpendicular al plano EDG.
d) Calculad la intersección de $\overline{\mathrm{BH}}$ y el plano EDG.
e) Calculad la distancia de $\overline{\mathrm{BH}}$ al plano EDG



<u>Solución 1:</u>
Consideremos el cubo con las siguientes coordenadas:
$\mathrm{E}(0,0,0), \mathrm{F}(1,0,0), \mathrm{H}(0,1,0), \mathrm{G}(1,1,0)$
$\mathrm{A}(0,0,1), \mathrm{B}(1,0,1), \mathrm{D}(0,1,1), \mathrm{C}(1,1,1)$.
$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = (-1,1,-1)$; $\overrightarrow{\mathrm{EG}} = (1,1,0)$; $\overrightarrow{\mathrm{GD}} = (-1,0,1)$;

A) Veamos que los vectores $\overrightarrow{\mathrm{BH}}, \overrightarrow{\mathrm{EG}}$ son ortogonales.

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EG}} = 0.$$

Por tanto, $\overline{\mathrm{BH}}$ es perpendicular a $\overline{\mathrm{EG}}$.

B) Veamos que los vectores $\overrightarrow{\mathrm{BH}}, \overrightarrow{\mathrm{GD}}$ son ortogonales.

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GD}} = 0.$$

Por tanto, $\overline{\mathrm{BH}}$ es perpendicular a $\overline{\mathrm{GD}}$.

C) La ecuación del plano que contiene EDG es:

$$\Pi_{\mathrm{EDG}} \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Simplificando:

$$\Pi_{\mathrm{EDG}} \equiv x - y + z = 0$$

El vector característico del plano es $a = (1,-1,1)$ és el linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = (-1,1,-1)$. Por tanto, $\overline{\mathrm{BH}}$ és perpendicular al plano EDG.

D) La ecuación de la recta que pasa por B, H tiene ecuación:

$$r_{\mathrm{BH}} \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \alpha(-1,1,-1)$$

$$(x,y,z) = (1-\alpha, \alpha, 1-\alpha)$$

Sustituyendo las coordenadas de un punto cualquiera de la recta en el plano:

$$(1-\alpha) - \alpha + (1-\alpha) = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

El punto intersección de $\overline{\mathrm{BH}}$ y el plano EDG es:

$$\mathrm{K}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

E) La distancia de B al plano EDG es igual a la distancia de B a K.

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

O bien, la distancia del punto al plano DEG:

$$d = \left|\frac{1 - 0 + 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}}\right| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Solución 2:

A) $\overline{BF}$ es perpendicular al plano AGHE.

Por tanto, $\overline{BF}$ es perpendicular a $\overline{EG}$. $\overline{FH}$ es perpendicular a $\overline{EG}$, diagonales del cuadrado EGGH.

Por tanto, el plano BFH es ortogonal a $\overline{EG}$. Per tanto, $\overline{BH}$ es perpendicular a $\overline{EG}$.

B) $\overline{BC}$ es perpendicular al plano CGHD. Por tanto, $\overline{BC}$ es perpendicular a $\overline{GD}$. $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{GD}$, diagonales del cuadrado CGHD. Por tanto, el plano BCH es perpendicular a $\overline{GD}$. Per tanto, $\overline{BH}$ es perpendicular a $\overline{GD}$.

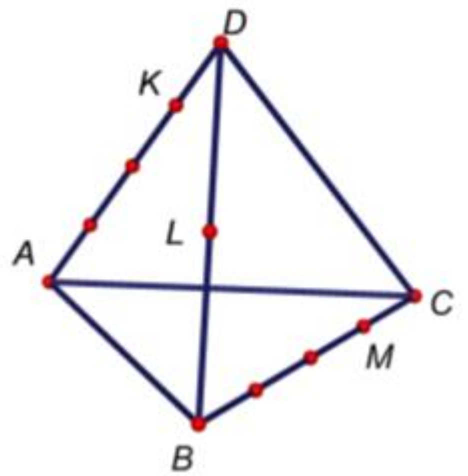
C) $\overline{BH}$ es perpendicular al plano DEG ya que $\overline{BH}$ es perpendicular a $\overline{EG}$ y $\overline{GD}$.

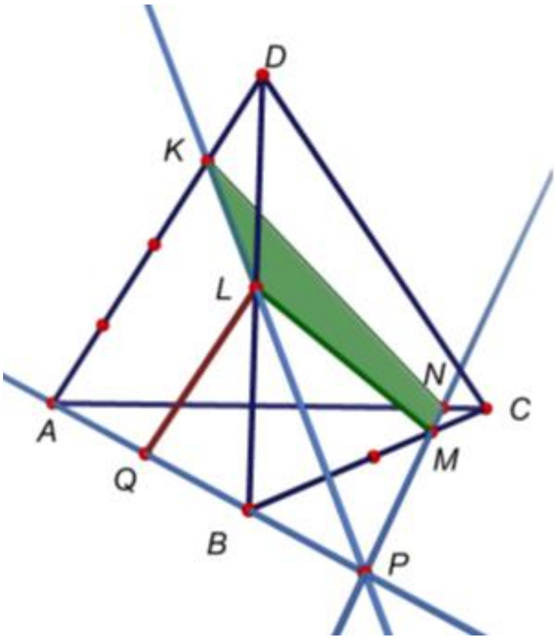
D) Notemos que BDEG es un tetraedro regular ya que todas las aristas son iguales a las diagonales de las caras del cubo. $\overline{BH}$ es la altura del tetraedro y su pie es K el baricentro del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{DEG}$.

E) $\overline{DK} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\overline{BD} = \sqrt{2}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BDK}$

$$d = \overline{BK} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Febrero 5-12: Sea el tetraedro ABCD de arista 1. Sea K el punto de la arista $\overline{AD}$, tal que $\overline{AK} = 3 \cdot \overline{DK}$. Sea L el punto medio de la arista $\overline{BD}$. Sea M el punto de la arista $\overline{BC}$ tal que $\overline{BM} = 3 \cdot \overline{CM}$. Calculad el área de la sección del tetraedro determinada por el plano que pasa por los puntos K, L, M.





Solución:

$$\overline{AK} = \overline{BM} = \frac{3}{4}, \overline{DK} = \overline{CM} = \frac{1}{4}, \overline{BL} = \overline{DL} = \frac{1}{2}$$

Las rectas AB, KL se intersectan en el punto P. La recta PM corta a la arista $\overline{AC}$ en el punto N. La sección es el cuadrilátero KLMN.

$$\overline{DK} = \frac{1}{4}, \overline{DL} = \frac{1}{2}, \angle KDL = 60°$$

Per tanto, $\angle DKL = 90°$. Por tanto, $\overline{KL} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{LBM}$

$$\overline{LM}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 2\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{2}$$

$$\overline{LM} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Sea Q el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{KAP}, \overset{\Delta}{LQP}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \overline{BP}}{\frac{1}{2} + \overline{BP}}$$

Resolviendo la ecuación: $\overline{BP} = \frac{1}{2}$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{BPM}$

$$\overline{PM}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 2\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{2}$$

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{19}}{4}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{LBP}$

$$\overline{PL}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$$

$$\overline{LM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Notemos que $\overline{PM}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{PL}^2$. Por tanto, $\angle MLP = 90°$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MLP}$

$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Sea $\angle BMP = \alpha$. Aplicando el teorema del seno al triángulo $\overset{\Delta}{BMP}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{19}}{4}}{\sin 120°}$$

Por tanto, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{57}}{19}, \cos\alpha = \frac{4\sqrt{19}}{19}$. Aplicando el teorema del seno al triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{MCN}}$

$$\frac{\overline{\mathrm{MN}}}{\sin 60°} = \frac{\frac{1}{4}}{\sin(60° + \alpha)} = \frac{\overline{\mathrm{CN}}}{\sin\alpha}$$

$$\overline{\mathrm{MN}} = \frac{\sqrt{19}}{20}, \overline{\mathrm{CN}} = \frac{1}{10}$$

$$\overline{\mathrm{AN}} = \frac{9}{10}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{AKN}}$

$$\overline{\mathrm{KN}}^2 = \frac{81}{100} + \frac{9}{16} - 2\frac{9}{10}\frac{3}{4}\frac{1}{2}$$

$$\overline{\mathrm{KN}} = \frac{3\sqrt{31}}{20}$$

Sea $\angle\mathrm{KNM} = \beta$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{KNM}}$

$$\frac{10}{16} = \frac{19}{400} + \frac{279}{400} - 2\frac{\sqrt{19}}{20}\frac{3\sqrt{31}}{20}\cos\beta$$

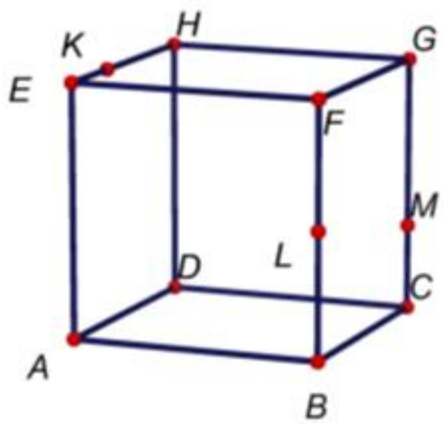
$$\cos\beta = \frac{8\sqrt{31}}{589}, \sin\beta = \frac{5\sqrt{651}}{589}$$

El área del cuadrilátero KLMN es:

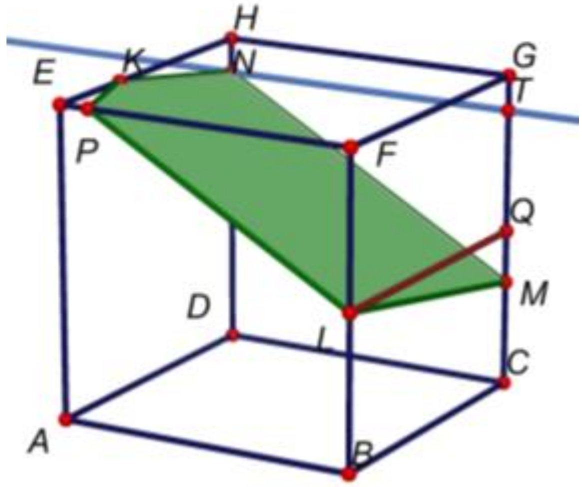
$$S_{\mathrm{KLMN}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{KL}} \cdot \overline{\mathrm{ML}} + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{KN}} \cdot \overline{\mathrm{MN}} \cdot \sin\beta$$

$$S_{\mathrm{KLMN}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{31}}{20} \cdot \frac{\sqrt{19}}{20} \cdot \frac{5\sqrt{651}}{589} = \frac{\sqrt{21}}{32} + \frac{3\sqrt{399}}{3040}$$

Febrero 7-8: Sea ABCDEFGH de arista $\overline{\mathrm{AB}} = 1$. Sea K de la arista $\overline{\mathrm{EH}}$ tal que $\overline{\mathrm{HK}} = 2 \cdot \overline{\mathrm{EK}}$. Sea L el punto medio de la arista $\overline{\mathrm{BF}}$. Sea M de la arista $\overline{\mathrm{CG}}$ tal que $\overline{\mathrm{GM}} = 2 \cdot \overline{\mathrm{CM}}$. Determinad los lados de la sección del cubo que determina el plano que pasa por los puntos K, L, M.



Solución: Sea Q el punto medio de la arista $\overline{CG}$



$$\overline{QM} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\overline{LM} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{LQM}, \overset{\Delta}{KHN}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{HN}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2}{3}}, \overline{HN} = \frac{1}{9}$$

$$\overline{KN} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{9}$$

Sea T la proyección de N sobre la arista $\overline{CG}$

$$\overline{MT} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{106}}{9}$$

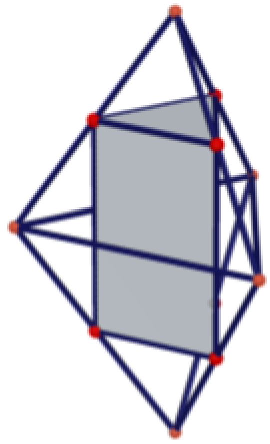
Los triángulos $\overset{\Delta}{NTM}, \overset{\Delta}{PEL}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

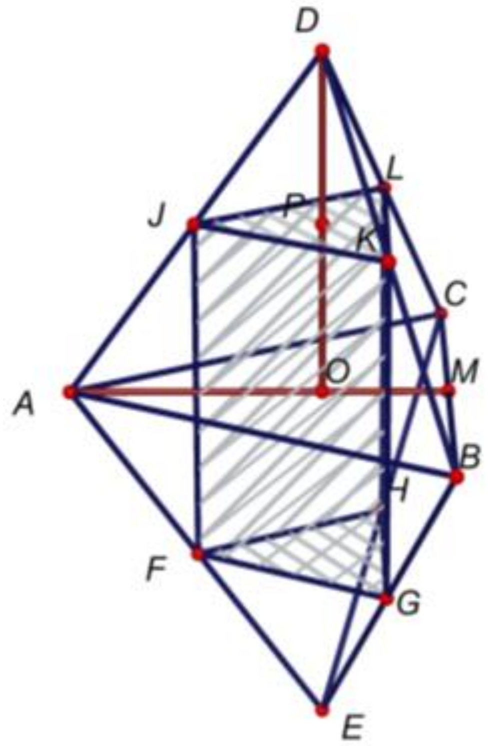
$$\frac{\overline{PF}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}}, \overline{PF} = \frac{9}{10}, \overline{PE} = \frac{1}{10}$$

$$\overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{106}}{10}$$

$$\overline{KP} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{109}}{30}$$

Febrero 9-16: Dos tetraedros regulares están unidos por una cara. Determinad la proporción de los volúmenes del prisma de vértice los puntos medios de las aristas de los tetraedros y la suma de los volúmenes de los dos tetraedros





Solución: Sean los tetraedros regulares $ABCD, ABCE$ de arista $\overline{AB} = a$. Sea O el centro de la base común $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea $\overline{OD} = h$

Sea el prisma regular FGHJKL de arista de la base $\overline{JK} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$. La recta OD corta la base del prisma $\overset{\Delta}{JKL}$ en el punto P. Sea $\overline{OP} = x$. La altura del prisma es $2x$. Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOD}$

$$a^2 = \frac{1}{3}a^2 + \overline{OD}^2$$

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\overline{OP} = x = \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_{KLM} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2$$

El volumen de la suma de los dos tetraedros es:

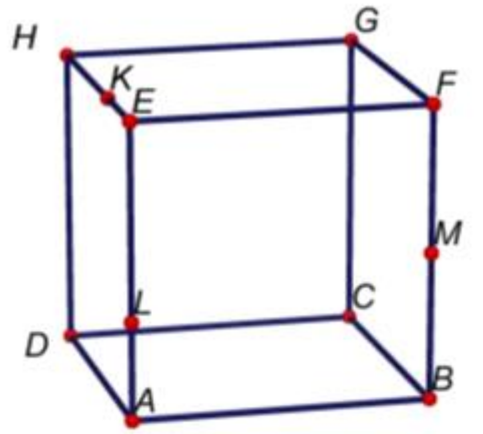
$$V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

El volumen del prisma es:

$$V_{FGHJKL} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2 \cdot 2\frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{2}}{16}a^3$$

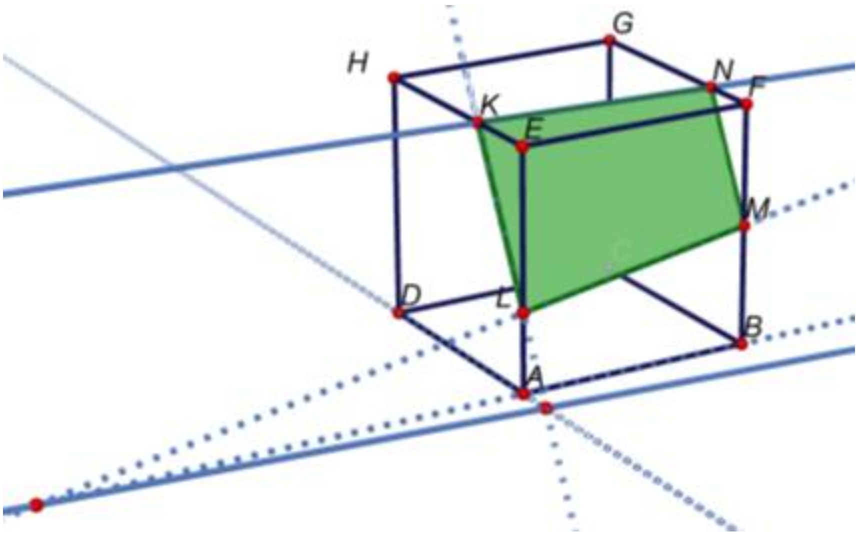
La proporción de los volúmenes es:

$$\frac{V_{FGHJKL}}{V_{ABCDE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{16}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}a^3} = \frac{3}{8}$$



Febrero 10-11: Sea ABCDEFGH un cubo de arista $\overline{AB} = 1$. Sea K de la arista $\overline{EH}$ tal que $\overline{HK} = 2 \cdot \overline{EK}$. Sea L de la arista $\overline{AE}$ tal que $\overline{EL} = 2 \cdot \overline{AL}$. Sea M el punto medio de la arista $\overline{BF}$. Determinad el perímetro y el área de la sección del cubo que determina el plano que pasa por los puntos K, L, M.

Solución:



La sección es el trapecio KLMN donde N pertenece a la arista $\overline{FG}$.

$$\overline{EK} = \overline{AL} = \frac{1}{3}, \overline{MF} = \frac{1}{2}$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{LEK}, \overset{\Delta}{MFN}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FN}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}, \overline{FN} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{KL} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\overline{LM} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

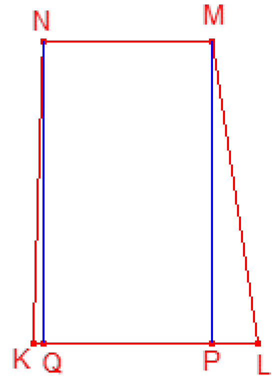
$$\overline{KN} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{145}}{12}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

El perímetro del trapecio KLMN es:

$$P_{KLMN} = \frac{7\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{37}}{6} + \frac{\sqrt{145}}{12}$$

Sea P la proyección de M sobre $\overline{KL}$. Sea Q la proyección de N sobre $\overline{KL}$. Sea $x = \overline{PL}$, entonces, $\overline{KQ} = \frac{\sqrt{5}}{12} - x$. Sea $h = \overline{PM}$ la altura del trapecio KLMN. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{MPL}, \overset{\Delta}{NQK}$



$$h^2 = \frac{37}{36} - x^2$$

$$h^2 = \frac{145}{144} - \left(\frac{\sqrt{5}}{12} - x\right)^2$$

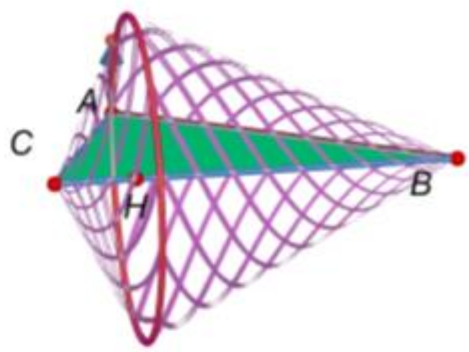
Resolviendo el sistema formado per las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{15} \\ h = \dfrac{\sqrt{905}}{30} \end{cases}$$

El área del trapecio KLMN es:

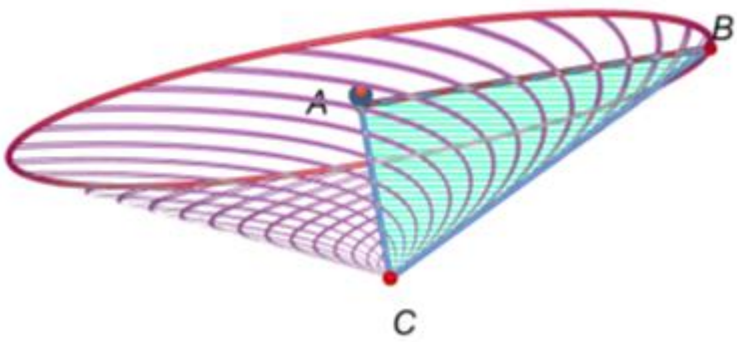
$$S_{KLMN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} \frac{\sqrt{905}}{30} = \frac{7\sqrt{181}}{144}$$

<u>Febrero 14-15:</u> La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 5. Determinad la medida de los catetos sabiendo que los volúmenes engendrados por el triángulo al girar alrededor de los catetos son uno el doble que el otro. Calculad el volumen de los dos conos. Determinad el volumen del doble cono engendrado por el triángulo al girar sobre la hipotenusa.



<u>Solución:</u> Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de hipotenusa $\overline{BC} = 5$. Sea V_b el volumen del cono generado al girar el triángulo sobre el cateto $b = \overline{AC}$. El radio es $c = \overline{AB}$. El volumen es:

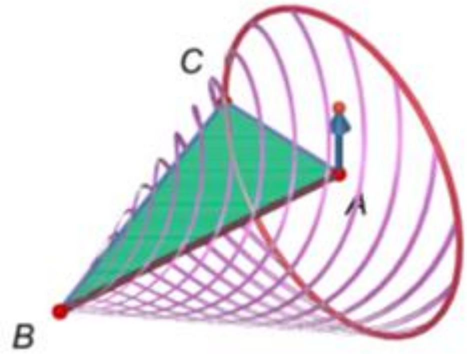
$$V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$$



Supongamos que el volumen V_b es el doble que el volumen V_c

$$\frac{1}{3}\pi c^2 b = 2\cdot\frac{1}{3}\pi b^2 c$$

Simplificado: $c = 2b$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:



$$b^2 + (2b)^2 = 5^2$$

Resolviendo la ecuación:

$$b = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{5}$$

Los volúmenes de los conos son:

$$V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b = \frac{\pi}{3}20\sqrt{5} = 46.83$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c = \frac{\pi}{3}10\sqrt{5} = 23.42$$

El radio de los dos conos, que están engendrados per la rotación del triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, es igual a la altura del triángulo sobre la hipotenusa. Sea $h = \overline{AH}$ la altura sobre la hipotenusa. El área del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$S_{ABC} = \frac{5h}{2} = \frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}$$

Resolviendo la ecuación: $h = 2$. El volumen del doble cono es:

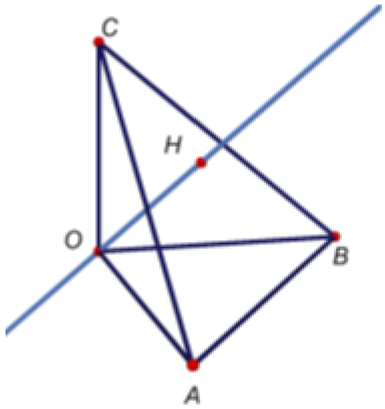
$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot 5 = \frac{20\pi}{3} \approx 20.94$$

Febrero 17-24: Las aristas que salen del vértice O del tetraedro OABC son perpendiculares dos a dos.

Demostrad que la proyección ortogonal H de O sobre la cara es el ortocentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$

Probad que $\frac{1}{\overline{OH}^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$.

Demostrad que el simétrico de O respecto del baricentro del tetraedro es el centro de la esfera circunscrita al tetraedro



Solución: Consideremos el tetraedro OABC con las siguientes coordenadas cartesianas:

$$O(0,0,0),\ A(a,0,0),\ B(0,b,0),\ C(0,0,c)\quad \overrightarrow{AB} = (-a,b,0),\ \overrightarrow{AC} = (-a,0,c).$$

La ecuación implícita del plano que contiene a los puntos A, B, C es:

$$\Pi_{ABC} \equiv \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificando: $\Pi_{ABC} \equiv bcx + acy + abz - abc = 0$.

El vector normal es: $v = (bc, ac, ab)$.

La recta OH tiene ecuación: $r_{OH} \equiv (x, y, z) = \alpha(bc, ac, ab)$.

Resolviendo el sistema formado por la recta y el plano, se determinan las coordenadas del punto H. Sus coordenadas son:

$$H\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right).$$

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\left(ab^2c^2, a^2bc^2, -b^2c^3-a^2c^3\right).$$

Veamos que $\overrightarrow{CH}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$. Calculemos su producto escalar:

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\left(ab^2c^2, a^2bc^2, -b^2c^3-a^2c^3\right)(-a, b, 0) = 0.$$

Análogamente, $\overrightarrow{AH}$ es ortogonal a $\overrightarrow{BC}$. Por tanto, H es el ortocentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Vamos por la segunda afirmación:

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\left(ab^2c^2, a^2bc^2, a^2b^2c\right).$$

$$\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = \frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\left\|\left(ab^2c^2, a^2bc^2, a^2b^2c\right)\right\| = \frac{abc}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{OH}\right\|} = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}. \quad \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OH}\right\|^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \quad \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2} = \frac{1}{a^2}, \ \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2} = \frac{1}{b^2}, \ \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2} = \frac{1}{c^2}.$$

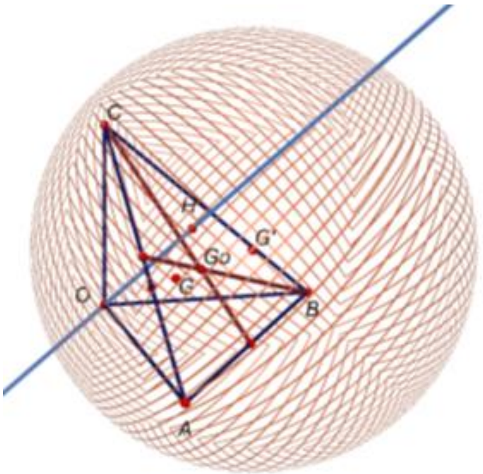
Por tanto, $\dfrac{1}{\overline{OH}^2} = \dfrac{1}{\overline{OA}^2} + \dfrac{1}{\overline{OB}^2} + \dfrac{1}{\overline{OC}^2}$.

Vamos por la tercera afirmación. El baricentro G_O de la cara $\overset{\Delta}{ABC}$ tiene coordenadas:

$$G_O\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

El baricentro G del tetraedro pertenece al segmento $\overline{OG_O}$ tal que $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG_O}$. Sea $G(x, y, z)$.

$(x, y, z) = \frac{3}{4}\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$. Las coordenadas del baricentro del tetraedro son:



$$G\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right).$$

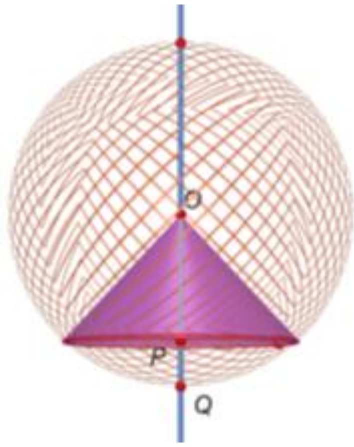
Sea $G'(x, y, z)$ el simétrico de O respecto de G.

$$\overrightarrow{OG'} = 2\cdot\overrightarrow{OG}.$$

$(x, y, z) = 2\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$. Las coordenadas de G’ son:

$$G'\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

Notemos que $\overline{G'O} = \overline{G'A} = \overline{G'B} = \overline{G'C} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, entonces G’ es el centro de la esfera circunscrita al tetraedro OABC



Febrero 18-19: Una esfera de radio r tiene inscrito un cono que tiene el vértice en el centro de la esfera y un ángulo 2α en el vértice.

Determinad el área y el volumen de la zona de la esfera que corta el cono.

Problema propuesto por Joan Galiana, alumno y matemático

Solución: Para el área, tenemos: El cono corta la esfera en dos casquetes esféricos. Consideraremos el menor. (El mayor sería fácil de calcular a partir la diferencia entre de la superficie de la esfera y el casquete menor). Sea el eje de simetría del cono que corta la esfera en el punto Q y pasa por el centro de la base del cono P. Sea $h = \overline{PQ}$ la altura del casquete. El área del casquete es:

$$S_{casquet} = 2\pi r \cdot h \,.\quad \overline{OP} = r \cdot \cos\alpha \,.\quad \overline{PQ} = (1-\cos\alpha)\, r \,.$$

El área del casquete es:

$$S_{casquet} = 2\pi r \cdot h = 2\pi(1-\cos\alpha) r^2 \,.$$

Para el volumen, tenemos: El cono determina dos partes un casquete y el mismo cono y la otra parte que es el que queda del anterior. El volumen del casquete es:

$$V_{casquet} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

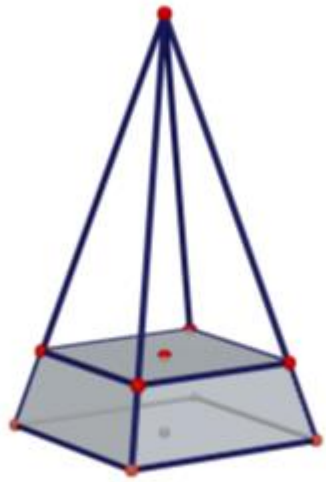
$$V_{casquet} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi}{3}(1-\cos\alpha)^2 (2+\cos\alpha) r^3 \,.$$

El radio del cono es: $s = r \cdot \sin\alpha$. La altura del cono es $t = \overline{OP} = r \cdot \cos\alpha$. El volumen del cono es:

$$V_{casquet} = \frac{1}{3}\pi s^2 t = \frac{1}{3}\pi \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot r^3 \,.$$

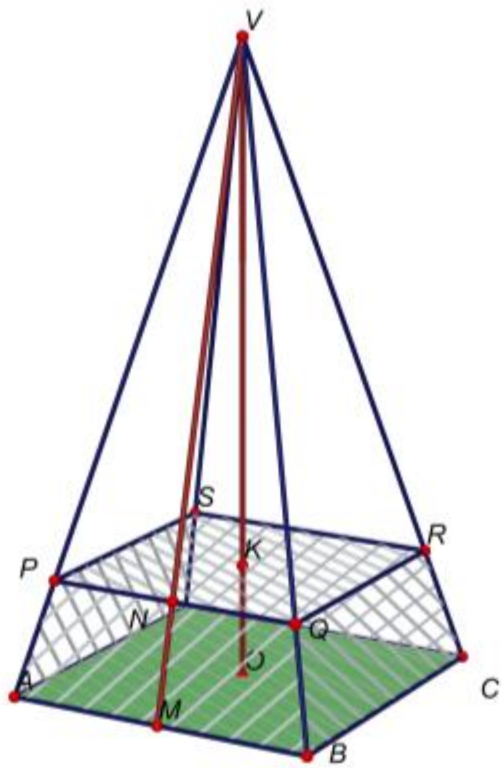
El volumen de la parte inferior es:

$$V_{total} = V_{casquet} + V_{con} = \frac{\pi}{3}\left((1-\cos\alpha)^2 (2+\cos\alpha) r^3 + \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha\right) r^3$$



Febrero 21-28: La altura de una cara lateral de una pirámide regular cuadrangular es el doble que la arista de la base.

Qué porcentaje de esta altura de la pirámide (contando desde la base) tenemos que cortar con un plano paralelo a la base de forma que el área total de la superficie lateral más el cuadrado superior del tronco de pirámide resultante sea igual a la mitad de la superficie lateral de la pirámide original.



Solución: Sea $\overline{AB} = a$ la arista de la base de la pirámide $ABCDV$. Sea $\overline{MV} = 2a$ la altura de una cara lateral. Sea el tronco de pirámide $ABCDPQRS$. Sea $\overline{PQ} = b$ la arista de la cara superior del tronco. Sea O el centro de la base $ABCD$. Sea K el centro de la base $PQRS$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{VMO}$. La altura de la pirámide es:

$$H = \overline{VM} = \frac{\sqrt{15}}{2}a.$$

El área lateral de la pirámide es:

$$S_L = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a = 4a^2$$

Sea N el punt medio de la arista $\overline{PQ}$. Las pirámides $ABCDV, PQRSV$ son semejantess. Entonces:

$$\overline{NV} = 2b$$

La altura del trapecio $ABQP$ es $\overline{MN}$.

$$\overline{MN} = 2(a - b)$$

El área del trapecio es:

$$S_{ABQP} = \frac{a+b}{2} \cdot 2(a - b)$$

El área de la superficie lateral más el cuadrado superior del tronco de pirámide es: $S_2 = 4(a+b)(a-b) + b^2$, el área total de la superficie lateral más el cuadrado superior del tronco de pirámide resultante

$$S_2 = \frac{1}{2} S_L$$

$$4(a+b)(a-b) + b^2 = 2a^2$$

Simplificando:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

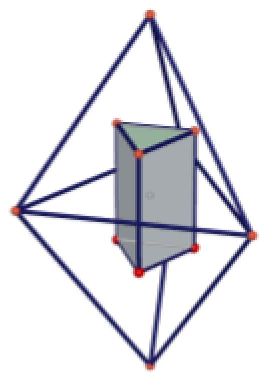
Sea $h = \overline{OK}$ la altura del tronco de pirámide. Las pirámides $ABCDV, PQRSV$ son semejantes. Entonces,

$$\frac{b}{a} = \frac{H-h}{H}$$

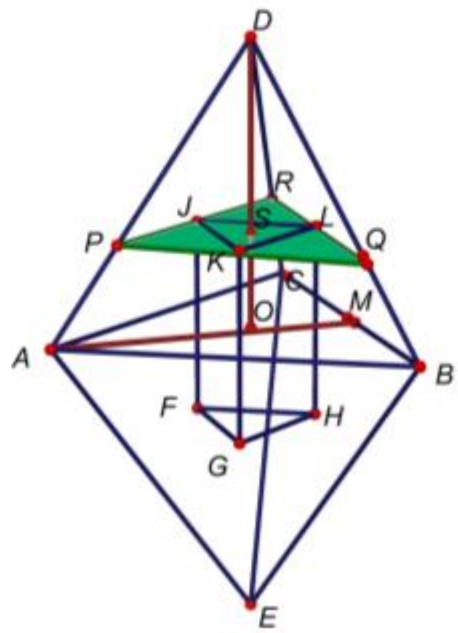
$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.1835$$

Es decir, corta la pirámide inicial a un 18.35% de su altura.

Febrero 22-23: Dado el doble tetraedro regular, determináis la proporción entre los volúmenes del poliedro dual (prisma de vértices los centros de las 6 caras) y del doble tetraedro regular.



Solución: Sean los tetraedros regulares $ABCD, ABCE$ de arista $\overline{AB} = a$. Sea O el centro de la base común $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea $\overline{OD} = h$. Sea el prisma regular $FGHJKL$ tal que los vértices son los baricentros de las caras. La recta OD corta la base del prisma $\overset{\Delta}{JKL}$ en el punto S. Sea $\overline{OS} = x$. La altura del prisma es $2x$. El plano que contiene la base $\overset{\Delta}{JKL}$ corta las aristas del tetraedro $ABCD$ en los puntos P, Q, R. Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$



$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOD}$

$$a^2 = \frac{1}{3}a^2 + \overline{OD}^2$$

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

El volumen de la suma de los dos tetraedros es:

$$V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

Los triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{PQD}$ son semejantes y de razón 3:2. Entonces:

$$\overline{PQ} = \frac{2}{3}a$$

$$S_{JKL} = \frac{1}{4}S_{PQR} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{\mathrm{AOD}}, \overset{\Delta}{\mathrm{PSD}}$ son semejantes y de razón 3:2. Entonces:

$$\overline{\mathrm{OS}} = \overline{\mathrm{OD}} - \overline{\mathrm{SD}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{a} = \frac{\sqrt{6}}{9}\mathrm{a}$$

El volumen del prisma es:

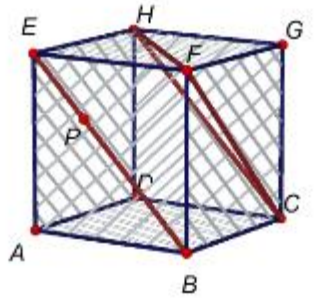
$$\mathrm{V_{FGHJKL}} = \frac{\sqrt{3}}{36}\mathrm{a}^2 \cdot 2\frac{\sqrt{6}}{9}\mathrm{a} = \frac{\sqrt{2}}{54}\mathrm{a}^3$$

La proporción de los volúmenes es:

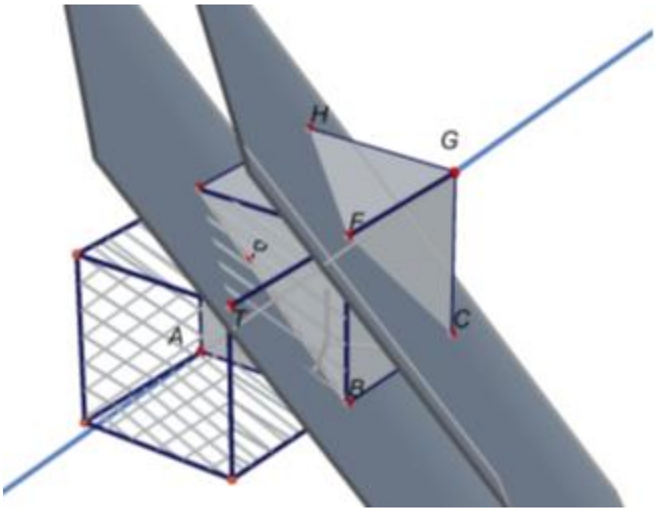
$$\frac{\mathrm{V_{FGHJKL}}}{\mathrm{V_{ABCDE}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{54}\mathrm{a}^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{a}^3} = \frac{1}{9}$$

Febrero 25-26: Sea ABCDEFGH un cubo de arista 1. Sea P un punto del segmento $\overline{\mathrm{BE}}$ tal que $\overline{\mathrm{EP}} : \overline{\mathrm{BE}} = 1:3$.

Calculad la distancia del punto P al plano que determinan los vértices C, F, H del cubo.



Solución: La distancia del punto P al plano que determina los puntos C, F, H es igual a la distancia del plano que contiene la recta BE y es paralelo al anterior y el plano inicial. Es decir, el plano que contiene los puntos B, E, T (donde T es el vértice de un cubo adosado al anterior, ver figura). Notamos que la diagonal AG es perpendicular a los dos planos. Sea h la altura del tetraedro CFHG sobre la base CFG.



El volumen del tetraedro CFHG es:

$$\mathrm{V_{Tetraedre}} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CG}}^2 = \frac{1}{3}\mathrm{S_{CFH}} \cdot \mathrm{h}.$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \mathrm{h}.$$

Resolviendo la ecuación:

$$\mathrm{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La distancia entre los dos planos es:

$$\mathrm{d} = \overline{\mathrm{AG}} - 2\mathrm{h} = \sqrt{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Solución 2: Sea el cubo con les siguientes coordenadas:

$$\mathrm{A}(0,0,0),\ \mathrm{B}(1,0,0),\ \mathrm{C}(1,1,0),\ \mathrm{D}(0,1,0).\ \mathrm{E}(0,0,1),\ \mathrm{F}(1,0,1),\ \mathrm{G}(1,1,1),\ \mathrm{H}(0,1,1).$$

Las coordenadas de P son:

$$P\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right).$$

$$n\,\overrightarrow{FH} = (-1, 1, 0)\,,\ \overrightarrow{FC} = (0, 1, -1)\,.$$

La ecuación general del plano que pasa por los puntos C, F, H es:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Simplificando: $\Pi \equiv x + y + x - 2 = 0$.

La distancia de P al plano es:

$$d(P, \Pi) \equiv \left| \frac{\frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} - 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$