

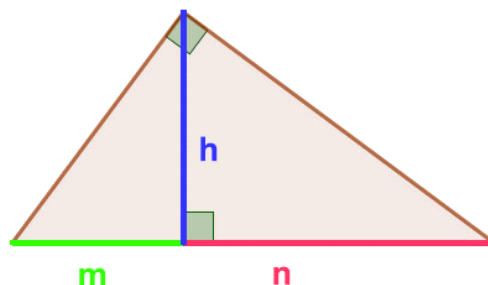
SOLUCIONS SETEMBRE 2021

PROBLEMES DE GEOMETRIA DE TWITTER (3r y 4t d'ESO i batxillerat). SOLUCIONS DE MIGUEL HERRAIZ HIDALGO. SES de Cabanes. Castelló.

Petit compendi de resultats geomètrics utilitzats.

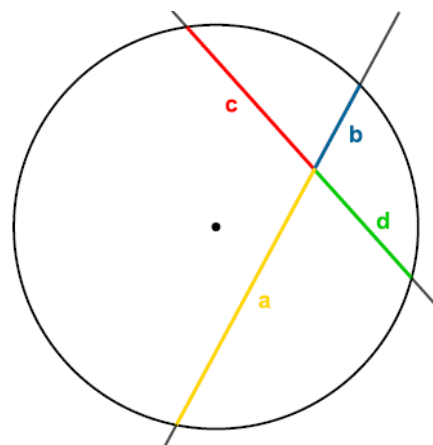
Teorema de l'altura:

$$h^2 = m \cdot n$$



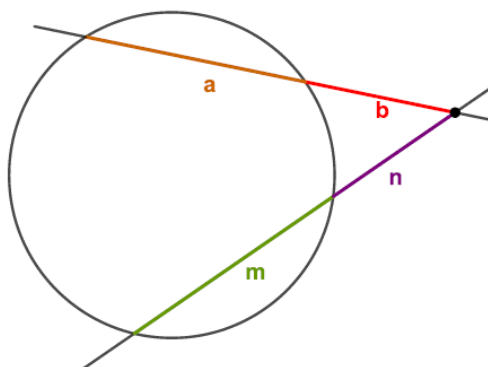
Teorema de les cordes (problema del dia 29):

$$a \cdot b = c \cdot d$$



Potència d'un punt respecte a una circumferència:

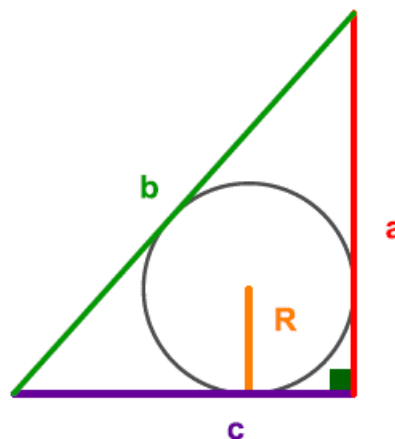
$$(a + b) \cdot b = (m + n) \cdot n$$



Relació entre àrea i perímetre d'un triangle rectangle i el radi de la circumferència inscrita al triangle (problema del dia 13):

$$c \cdot a = (a + b + c) \cdot R$$

$$2A = P \cdot R$$

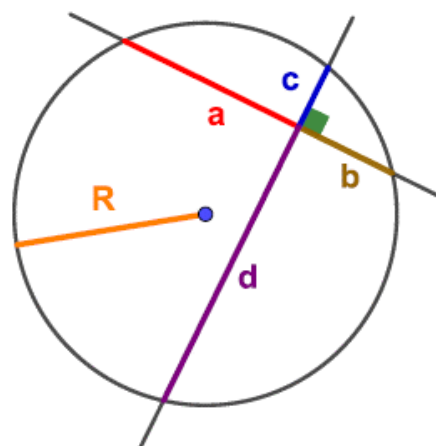


Raons de l'angle doble:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Teorema de Faure (problema del dia 27):

$$4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$



Angle central i angle inscrit (t és la tangent a la circumferència en B)

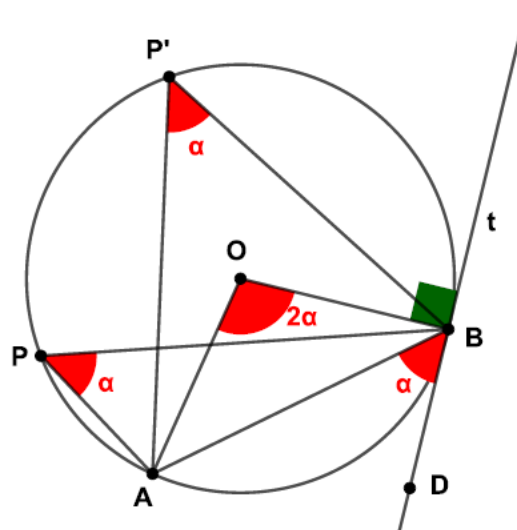
$$2\alpha = \widehat{AB}$$

Angle inscrit:

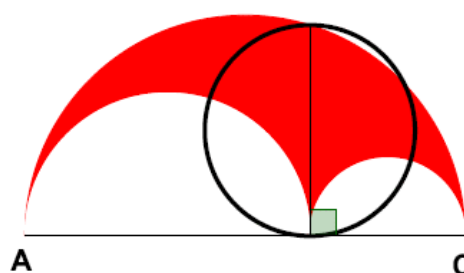
$$\angle APB = \angle AP'B = \angle ABD = \alpha$$

Angle central:

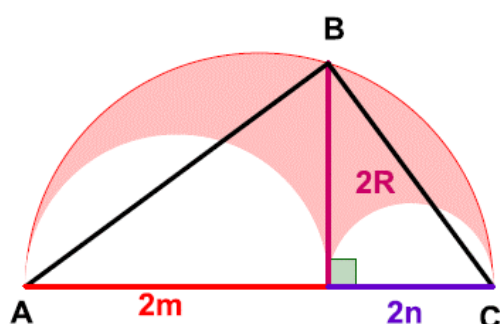
$$\angle AOB = 2\alpha$$



Setembre 1: Tres semicircumferències amb centre en el segment AC. Relaciona l'àrea de la zona roja i l'àrea del cercle negre



Solució:



Considerem el triangle $\triangle ABC$. Aquest triangle és rectangle en B (perquè AC en un diàmetre de la semicircumferència gran), amb hipotenusa $2n + 2m$ (sent m i n els radis de les semicircumferència mitjana i xicoteta) i amb altura des de B de $2R$ (sent R el radi del cercle negre).

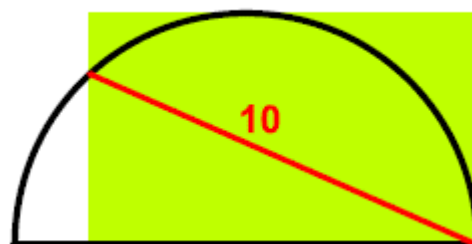
Si apliquem el teorema de l'altura al triangle $\triangle ABC$, tenim:

$$2m \cdot 2n = (2R)^2 \Rightarrow m \cdot n = R^2$$

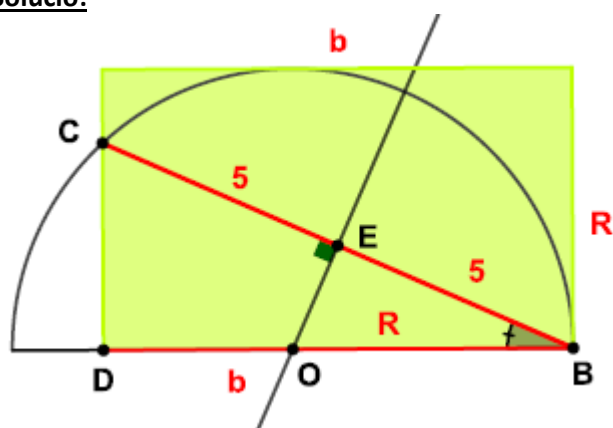
Per tant:

$$\text{Àrea zona roja} = \frac{\pi[(m+n)^2 - m^2 - n^2]}{2} = \frac{2\pi mn}{2} = \pi R^2 = \text{àrea cercle negre}$$

Setembre 2: Semicercle, corda de longitud 10 i rectangle. Trobeu l'àrea del rectangle



Solució:

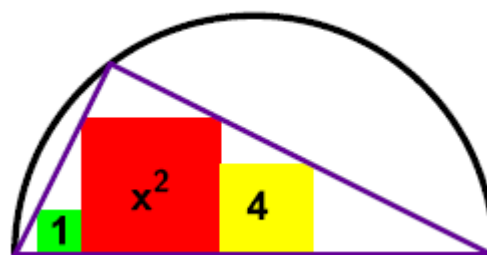


Siga b la base del rectangle i R la seua altura.

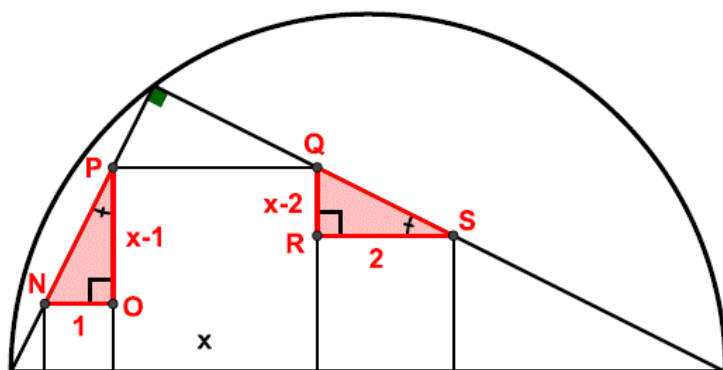
Tracem pel punt mitjà de la corda (el punt E) una perpendicular a la corda. Aquesta perpendicular passa pel centre de la semicircumferència. Queden generats els triangles $\triangle EOB$ i $\triangle DBC$. Tots dos són rectangles (en E i en D) i tenen en comú l'angle en B. Per tant són semblants. D'ací:

$$\frac{R}{5} = \frac{5+5}{b} \Rightarrow Rb = 50$$

Setembre 3: Semicercle, tres quadrats d'àrees 1, x^2 i 4 i triangle. Trobeu x



Solució:

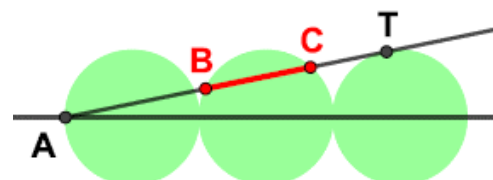


Els triangles $\triangle OPN$ i $\triangle RSQ$ són semblants perquè són rectangles (en O i en R) i els angles assenyalats són iguals (per tindre costats perpendiculars). Per tant:

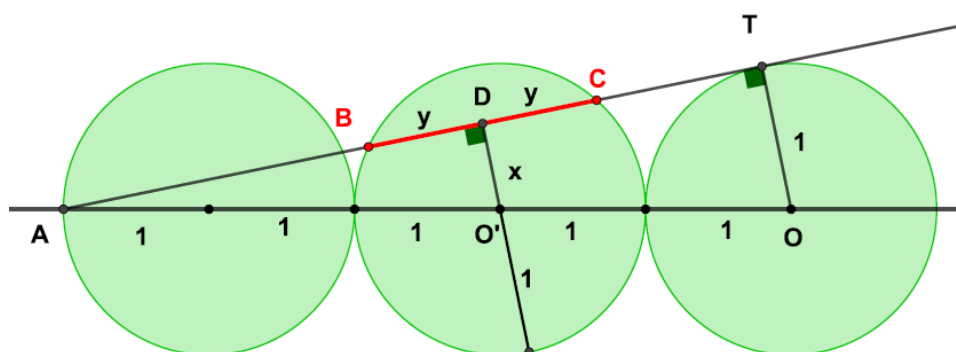
$$\frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{2} \Rightarrow x(x-3) = 0$$

D'ací $x = 3$, (ja que $x = 0$ careix de sentit)

Setembre 4: Tres cercles iguals, de radi 1, tangents entre si, T punt de tangència. Trobeu BC



Solució:



Considerem D, el punt mitjà del segment BC. La perpendicular per D al segment BC passa pel centre de la circumferència intermèdia: O'.

Tenim que $\triangle ATO \approx \triangle ADO'$ perquè tots dos són rectangles (en T i D) i tenen en comú l'angle en A. Per tant:

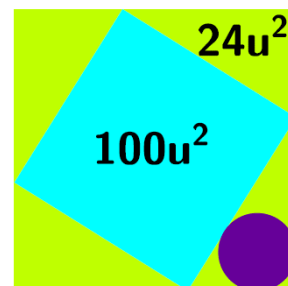
$$\frac{5}{1} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

Pel teorema de les cordes en la circumferència intermèdia, tindrem:

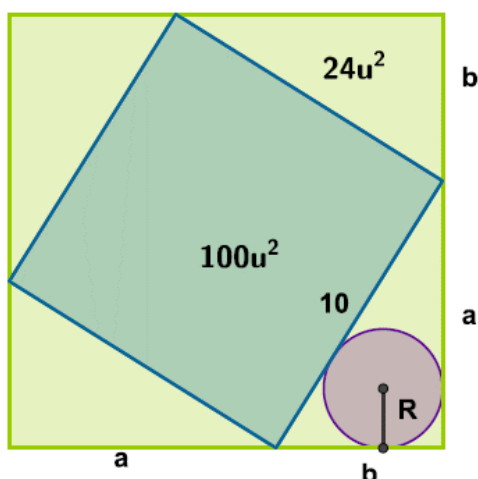
$$y \cdot y = \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) \Rightarrow y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = \frac{4}{5}$$

$$BC = 2y = \frac{8}{5}$$

Setembre 6: Dos quadrats i un cercle. Trobeu l'àrea del cercle



Solució:



Els quatre triangles de color verd són iguals (en tindre els catets mesures a i b i hipotenusa 10). L'àrea del quadrat gran és:

$$100 + 4 \cdot 24 = 196 = 14^2 \Rightarrow a + b = 14$$

Per la relació entre l'àrea i el perímetre (A i P) d'un triangle rectangle i el radi del cercle inscrit (R) (problema del dia 13), tenim:

$$2A = P \cdot R \Rightarrow 2 \cdot 24 = (10 + a + b) \cdot R \Rightarrow R = \frac{2 \cdot 24}{(10 + 14)} = 2$$

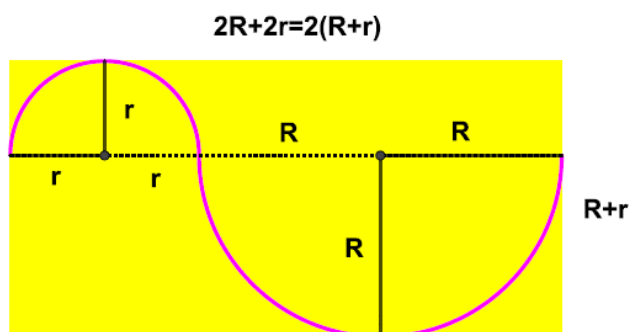
L'àrea del cercle, és, doncs:

$$\text{Àrea cercle} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

Setembre 7: Dues semicircumferències amb diàmetres en AB || base. Si la línia fúcsia mesura π , trobeu el perímetre del rectangle



Solució:



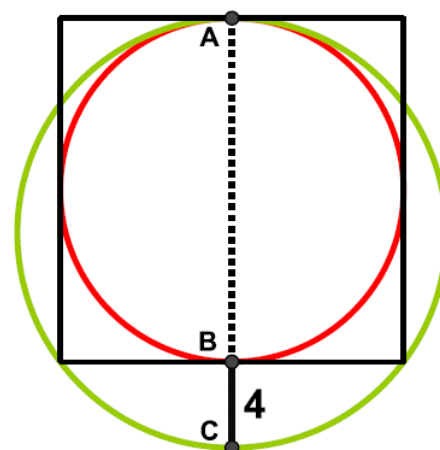
La longitud de les dues semicircumferències és:

$$\frac{2\pi r}{2} + \frac{2\pi R}{2} = \pi \Rightarrow R + r = 1$$

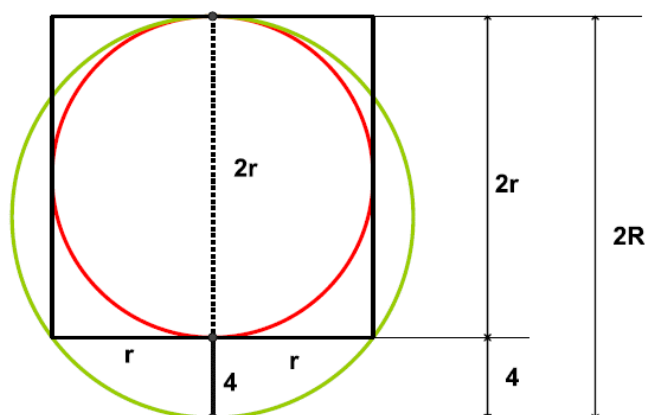
Per al rectangle color groc, tindrem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Altura} = R + r = 1 \\ \text{base} = 2(R + r) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow P = 2 \cdot (1 + 2) = 6$$

Setembre 8: Dues circumferències amb centre en AB. Si BC = 4 cm, trobeu l'àrea tancada entre els cercles.



Solució:



Si apliquem el teorema de les cordes a les dues entenimentades del cercle verd tenim:

$$2r \cdot 4 = r \cdot r \Rightarrow r = 8$$

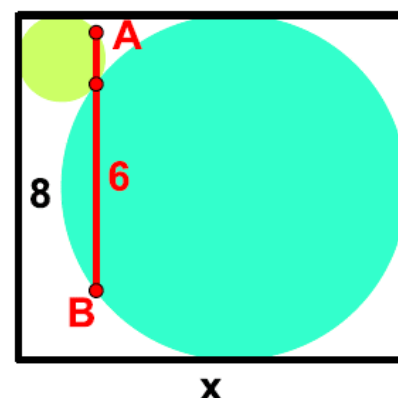
De la figura:

$$2r + 4 = 2R \Rightarrow R = r + 2 = 8 + 2 = 10$$

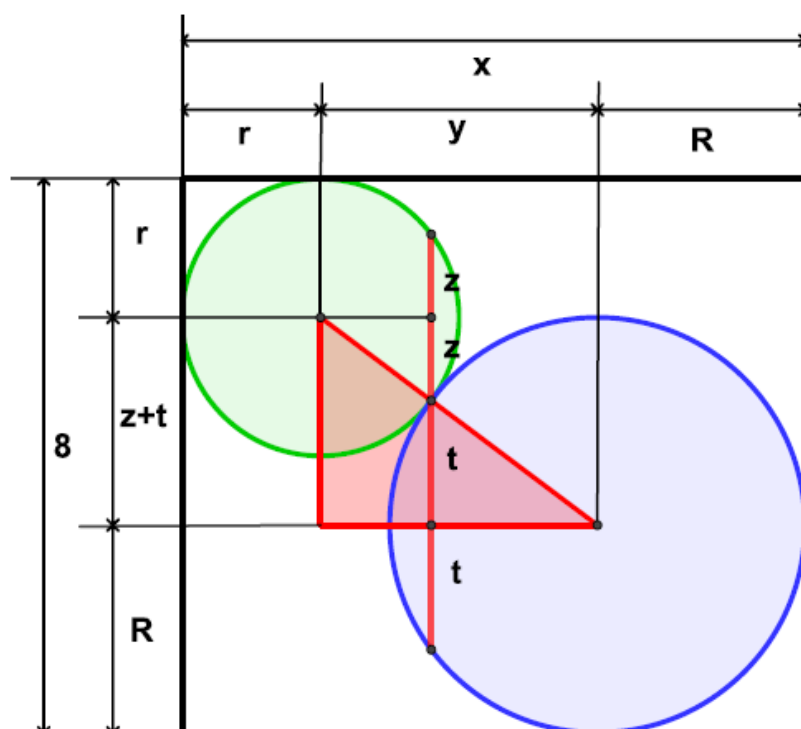
Per tant, l'àrea entre els dos cercles és:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(10^2 - 8^2) = 36\pi$$

Setembre 9: Dos cercles tangents i un rectangle de base x i altura 8. Si $AB = 6$, trobeu x .



Solució:



De la figura tenim:

$$x = y + r + R$$

Com que el segment AB mesura 6:

$$2t + 2z = 6 \Rightarrow t + z = 3$$

I, a més:

$$r + t + z + R = 8 \Rightarrow r + R = 8 - 3 = 5$$

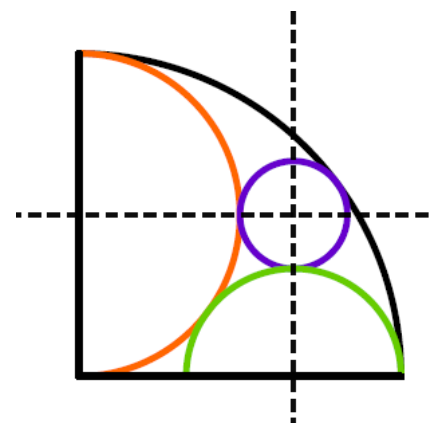
Considerem el triangle roig, que és rectangle amb catets: $t + z = 3$ i y , i hipotenusa $r + R = 5$. En aplicar-li el teorema de Pitàgores, tenim:

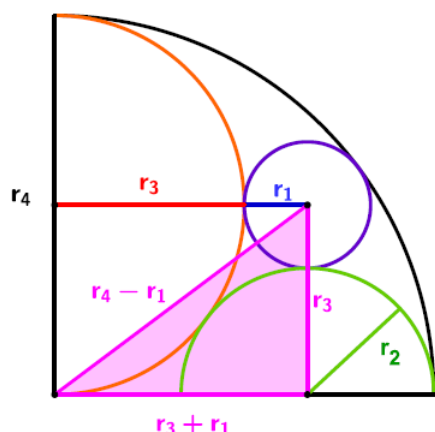
$$y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Per tant:

$$x = y + r + R = 4 + 5 = 9$$

Setembre 10: Un quadrant, un cercle i dues semicircumferències, totes tangents entre si. Trobeu la relació entre radis



Solució:


Siguen: r_1 el radi de la circumferència xicoteta, r_2 i r_3 els radis de les semicircumferència petita i gran i r_4 el radi del quadrant. Òbviament:

$$2r_3 = r_4 \quad ; \quad r_3 = r_1 + r_2 \quad (*) \quad ; \quad r_3 + r_1 = r_4 - r_2$$

Considerem el triangle rectangle de color magenta: En aplicar el teorema de Pitàgores tenim:

$$(r_4 - r_1)^2 = (2r_3 - r_1)^2 = r_3^2 + (r_1 + r_3)^2 \Rightarrow 2r_3^2 = 6r_3r_1$$

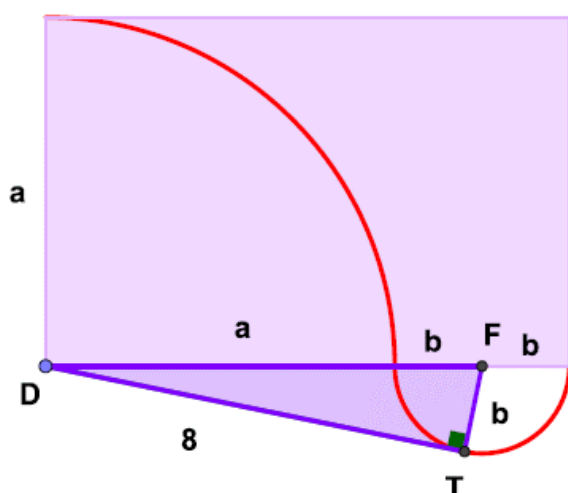
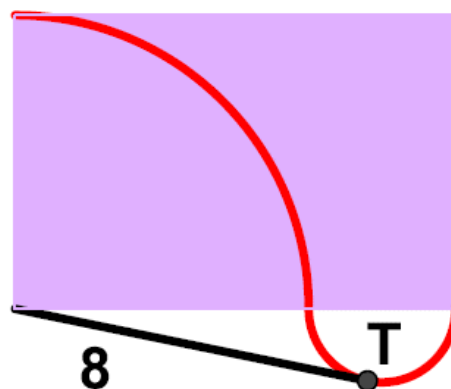
Menyspreant $r_3 = 0$, ens queda **$r_3 = 3r_1$** . Substituint en (*), tenim:

$$r_3 = r_1 + r_2 = \frac{r_3}{3} + r_2 \Rightarrow \mathbf{3r_2 = 2r_3}$$

Amb això:

$$r_4 = 2r_3 = 3r_2 = 6r_1 \Rightarrow \mathbf{r_4 : r_3 : r_2 : r_1 = 6 : 3 : 2 : 1}$$

Setembre 11: Un quadrant, un semicircle, un rectangle, T és un punt de tangència. Trobeu l'àrea del rectangle



Solució 1: Considerem el triangle rectangle $\triangle DTF$. En aplicar Pitàgores tindrem:

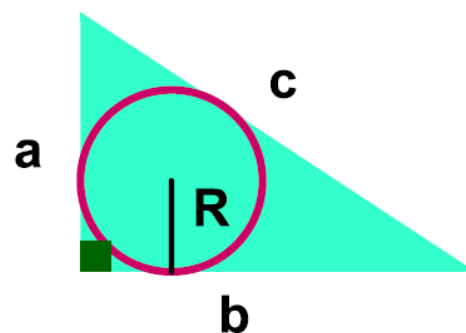
$$(a + b)^2 = b^2 + 64 \Rightarrow a^2 + 2ab = 64$$

$$\Rightarrow \text{altura} \cdot \text{base} = A_{\text{rec}} = 64$$

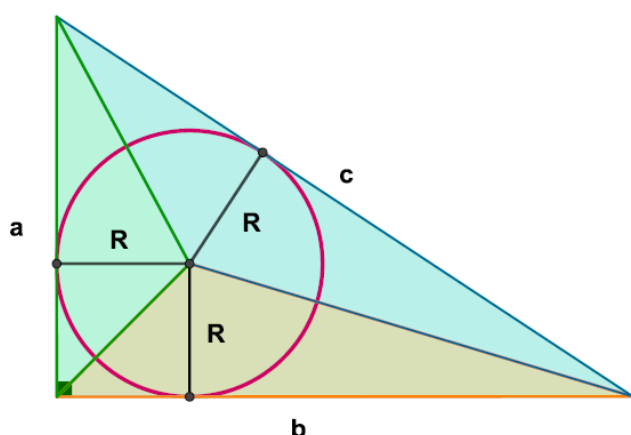
Solució 2: Si calculem la potència del punt D respecte a la semicircumferència, tenim:

$$8^2 = a \cdot (a + 2b) = A_{\text{rec}}$$

Setembre 13: (Relació entre àrea i perímetre d'un triangle rectangle i radi de la circumferència inscrita) Trobeu R en funció de a, b i c.



Solució:



El centre de la circumferència inscrita (de radi R) divideix al triangle inicial en tres triangles de base els costats del triangle inicial i altura R. Llavors.:

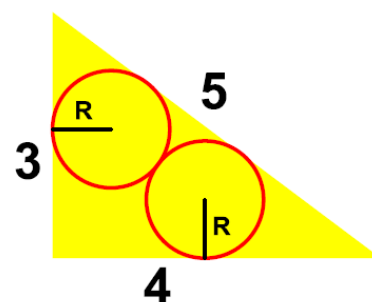
$$\frac{ab}{2} = A = \frac{aR}{2} + \frac{bR}{2} + \frac{cR}{2} = \frac{R(a+b+c)}{2}$$

En altres paraules:

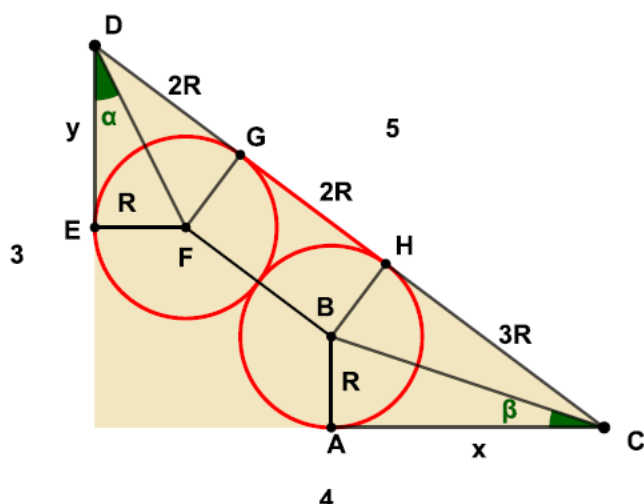
$$2A = R \cdot P$$

on A és l'àrea i P el perímetre del triangle inicial i R és el radi de la circumferència inscrita

Setembre 14: Trobeu R



Solució 1:



Siguen F i B els centres de les circumferències. Llavors, ja que F (B) equidista de les rectes que generen l'angle en D (C), tindrem que F (B) és de la bisectriu de l'angle en D (C).

Dels triangles $\triangle DEF$ i $\triangle ABC$ tindrem:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 \alpha + 3\operatorname{tg} \alpha - 2 \\ &= 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(menyspreant $\operatorname{tg} \alpha = -2$)

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3\operatorname{tg}^2\beta + 8\operatorname{tg}\beta - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$$

(menyspreant $\operatorname{tg}\beta = -3$).

Tindrem en $\triangle DEF$:

$$\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{y} \Rightarrow y = 2R$$

I en $\triangle ABC$:

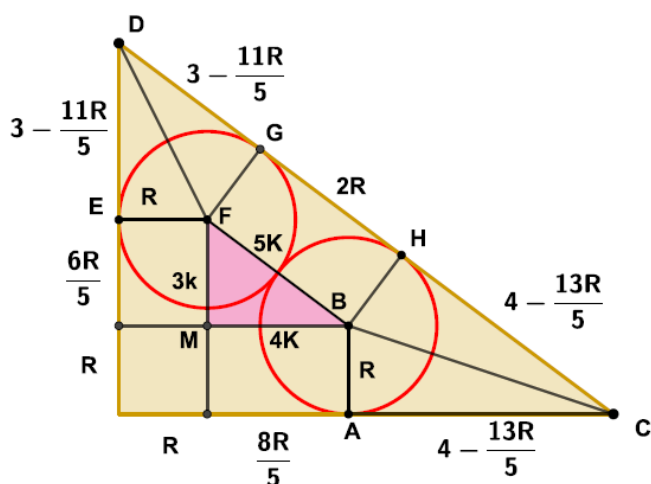
$$\frac{1}{3} = \operatorname{tg}\beta = \frac{R}{x} \Rightarrow x = 3R$$

A més: $\triangle DEF = \triangle DFG$ per ser rectangles i tindre els mateixos catets xicotets i la mateixa hipotenusa. ($\triangle ABC = \triangle HBC$, per la mateixa raó). Per tant: $DG = 2R$ i $HC = 3R$.

Per últim:

$$5 = 2R + 2R + 3R = 7R \Rightarrow R = \frac{5}{7}$$

Solució (Toni Gomà):



Siguen F i B els centres de les circumferències. Els triangles inicial i $\triangle MFB$ són semblants perquè tots dos tenen els costats paral·lels. Per tant, $FB = 5k = 2R$, $MB = 4k$ i $MF = 3k$. Pel que:

$$5k = 2R \Rightarrow k = \frac{2R}{5} \Rightarrow \begin{cases} MB = \frac{8R}{5} \\ MF = \frac{6R}{5} \end{cases}$$

D'ací:

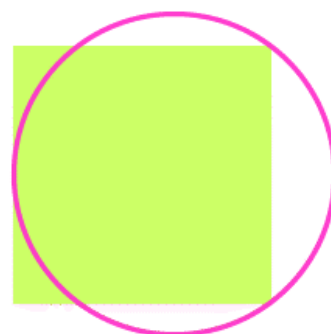
$$AC = 4 - \left(R + \frac{8R}{5}\right) = 4 - \frac{13R}{5}$$

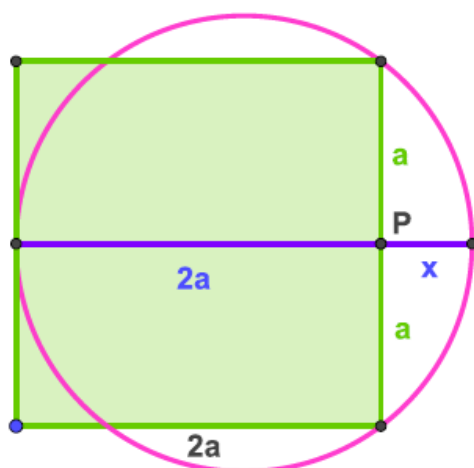
$$ED = 3 - \left(R + \frac{6R}{5}\right) = 3 - \frac{11R}{5}$$

A més: $\triangle DEF = \triangle DFG$ per ser rectangles i tindre els mateixos catets xicotets i la mateixa hipotenusa. ($\triangle ABC = \triangle HBC$, per la mateixa raó). Per tant, en tindre en compte la hipotenusa del triangle inicial, tenim:

$$5 = DG + GH + HC = 3 - \frac{11R}{5} + 2R + 4 - \frac{13R}{5} \Rightarrow R = \frac{5}{7}$$

Setembre 15: Un quadrat i un cercle. Quin dels dos té el perímetre més gran?



Solució:


Siga $2a$ el costat del quadrat. En calcular la potència del punt P respecte de la circumferència, tenim:

$$a \cdot a = a^2 = 2a \cdot x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

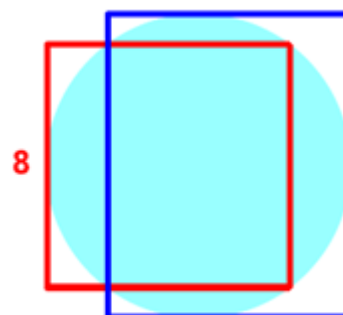
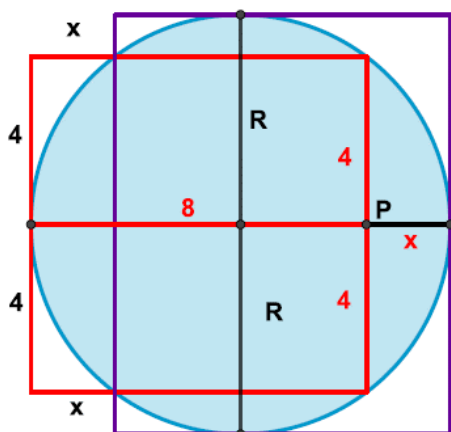
(ja que $a \neq 0$). Per tant, si R és el radi de la circumferència:

$$2R = 2a + x = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2} \Rightarrow R = \frac{5a}{4}$$

Per últim:

$$P_{\text{quadrat}} = 4 \cdot 2a = 8a > \frac{5a\pi}{2} = 2R\pi = P_{\text{cercle}}$$

Setembre 16: Un quadrat de costat 8, un rectangle i un cercle. Troba l'àrea del cercle i el rectangle.


Solució:


Calculant la potència de P respecte de la circumferència, tenim:

$$4 \cdot 4 = x \cdot 8 \Rightarrow x = 2$$

Per tant el diàmetre de la circumferència és:

$$8 + 2 = 10 = 2R \Rightarrow R = 5$$

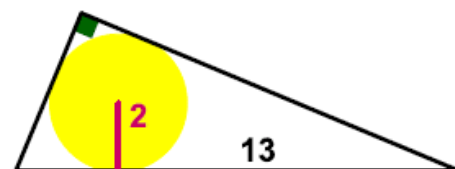
L'àrea del cercle és:

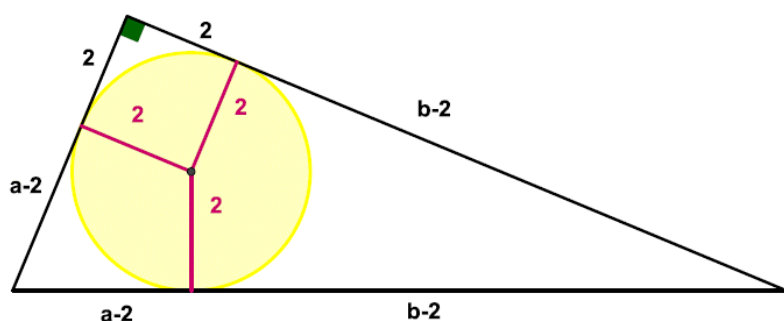
$$\pi R^2 = 25\pi$$

Finalment per al rectangle, tenim:

$$\left. \begin{array}{l} \text{base} = 8 - x + x = 8 \\ \text{altura} = 2R = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Àrea} = 8 \cdot 10 = 80$$

Setembre 17: Un triangle rectangle d'hipotenusa 13. Cercle inscrit de radi 2. Troba l'àrea del triangle



Solució:


Recordem que les dues tangents a la circumferència per un punt exterior a ella mesuren el mateix. Tindrem, llavors que si a (b) és el catet xicotet (gran) del triangle, ja que la hipotenusa mesura 13:

$$a - 2 + b - 2 = 13 \Rightarrow a + b = 17$$

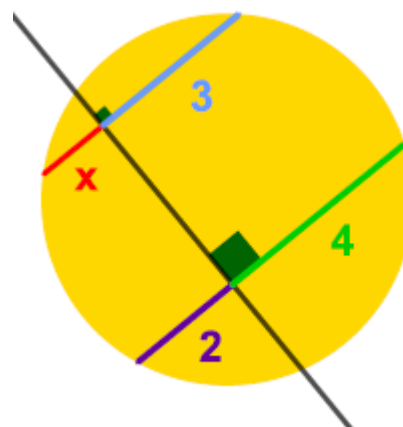
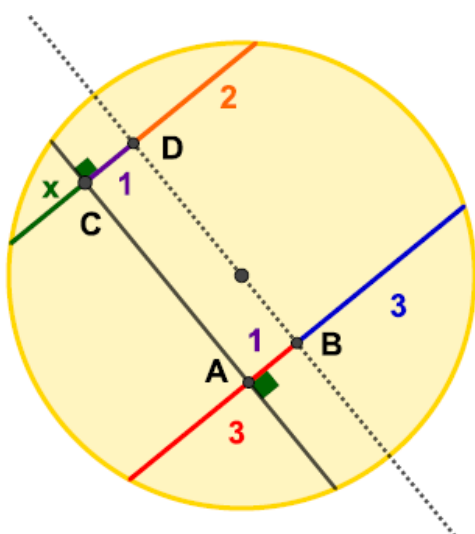
Com que en el triangle es compleix el teorema de Pitàgores, tindrem el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 17 \\ a^2 + b^2 = 13^2 \end{array} \right\} \Rightarrow (a + b)^2 = 17^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 + 2ab = 17^2 \\ a^2 + b^2 = 13^2 \end{array} \right\} \Rightarrow ab = \frac{17^2 - 13^2}{2} = 60$$

Per tant, l'àrea del triangle és:

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Setembre 18: Cercle i tres cordes, dues d'elles paral·leles. Trobeu x


Solució:


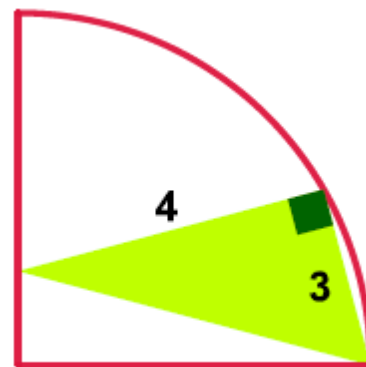
Recordem que el diàmetre és la intersecció amb el cercle de la perpendicular a una corda pel seu punt mitjà. Siga la recta que passa per B i D eixa perpendicular. Com:

$$\frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow AB = 1 = CD$$

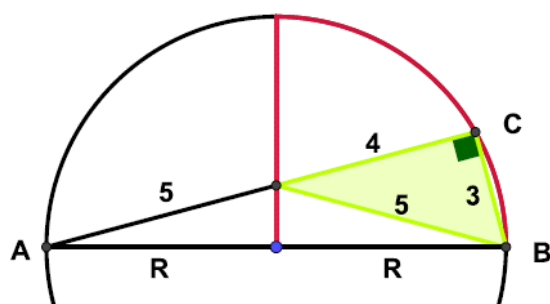
D'on:

$$x + 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

Setembre 20: Un quadrant i un triangle rectangle de catets 3 i 4. Troba l'àrea del quadrant



Solució:



En el triangle verd tindrem que la seua hipotenusa val 5.

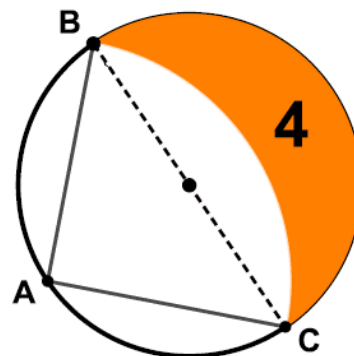
Considerem la circumferència generada pel quadrant. Com l'angle en C és de 90° , AB serà el diàmetre del cercle. D'ací:

$$2R = \sqrt{(4+5)^2 + 3^2} = 3\sqrt{10} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

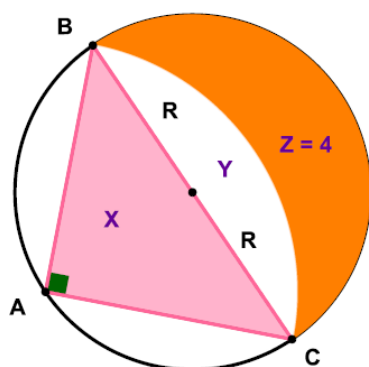
Per tant, l'àrea del quadrant serà:

$$\frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \frac{90}{4}}{4} = \frac{45}{8} \pi$$

Setembre 21: Un cercle de diàmetre BC i un quadrant. Àrea de la zona ombrejada 4. Troba l'àrea del cercle



Solució:



Siga R el radi del cercle, X l'àrea del triangle $\triangle ABC$, l'àrea del segment que genera el quadrant i $Z = 4$ l'àrea de la zona color taronja. En $\triangle ABC$, en aplicar Pitàgores (perquè $AB = AC = \text{radi del quadrant}$), tindrem:

$$AC = AB = \sqrt{2} \cdot R$$

Per tant:

$$\left. \begin{aligned} X + Y &= \frac{1}{4} \pi (\sqrt{2} R)^2 = \frac{\pi R^2}{2} \\ Y + Z &= \frac{1}{2} \pi R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X + Y = Y + Z \Rightarrow X = Z = 4$$

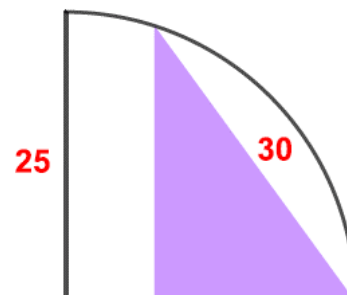
Però:

$$4 = X = \frac{AB \cdot AC}{2} = R^2$$

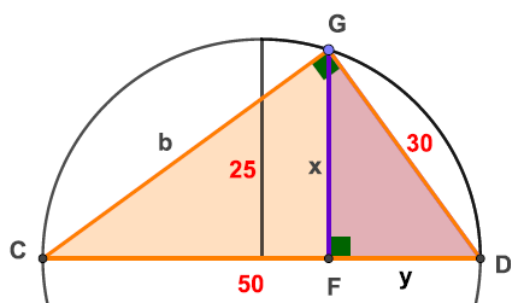
Per el que $R = 2$. I d'ací:

$$A_{\text{cercle}} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

Setembre 22: Quadrant de radi 25 i triangle rectangle d'hipotenusa 30. Troba els catets del triangle



Solució:



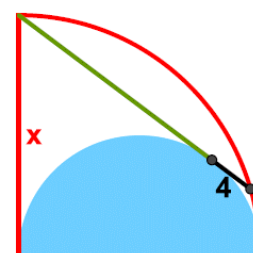
Considerem la circumferència generada pel quadrant. Tracem el segment CG. Com que CD és un diàmetre (de longitud $2 \cdot 25 = 50$), l'angle en G és de 90° . En aplicar Pitàgores en el $\triangle CDG$, tindrem:

$$b = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$$

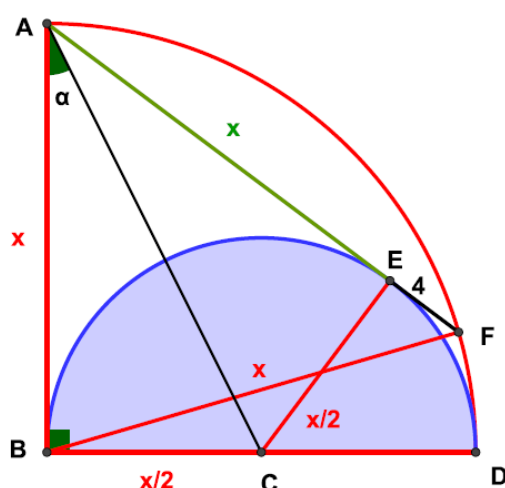
Com $\triangle CGD \approx \triangle GFD$ (al ser els dos rectangles i tindre en comú l'angle en D), tindrem:

$$\frac{x}{40} = \frac{30}{50} = \frac{y}{30} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 18 \end{cases}$$

Setembre 23: Un quadrant, un semicercle i una corda tangent. Trobeu x



Solució 1:



Considerem el triangle $\triangle ABF$, de costats x , x i $x + 4$. Si coneguérem algun angle del triangle podríem aplicar el teorema del cosinus, per a trobar x .

Siga C el centre de la semicircumferència. Considerem les dues tangents a la semicircumferència traçades per a i la bisectriu de l'angle format en A. Com que la bisectriu equidista de les rectes que generen els costats de l'angle tindrem que C pertany a la bisectriu i es generen dos triangles iguals: $\triangle ABC$ i $\triangle AEC$. En el triangle $\triangle ABC$, tindrem:

$$AB = x; BC = \frac{x}{2}; AC = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

Amb el que:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

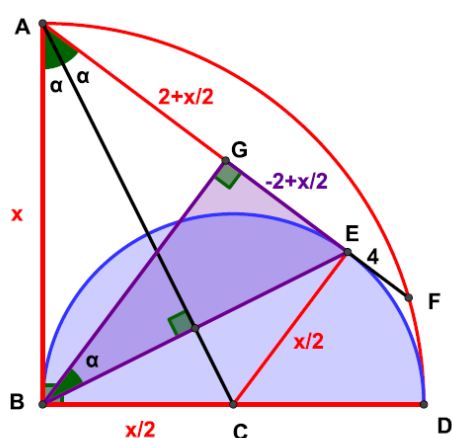
Aplicant el teorema del cosinus en $\triangle ABF$, tenim:

$$x^2 = x^2 + (x+4)^2 - 2x(x+4) \frac{3}{5}$$

que porta a:

$$\left. \begin{array}{l} x+4=0 \text{ que es menysprea} \\ x+4 = \frac{6x}{5} \Rightarrow x=20 \end{array} \right\}$$

Solució 2 (Toni Gomà):



Com les tangents a una circumferència per un punt exterior a ella mesuren el mateix tindrem que $\triangle ABE$ és isòsceles perquè $AB = AE = x$. A més, la bisectriu per A és l'altura (i la mitjana i la mediatriu) de $\triangle ABE$, per tant AC és perpendicular a BE.

Tracem per B la perpendicular a AF, generant el punt G. Com AF és una corda del quadrant, G divideix a AF en dues parts iguals. Per tant:

$$AG = GF = \frac{x+4}{2} = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow GE = \frac{x}{2} - 2$$

A més, $\alpha = \angle EBG$ perquè té els costats perpendiculars a $\angle CAG = \alpha$. Per tant: $\triangle ABC \approx \triangle BGE$ (perquè són rectangles i tots dos tenen un angle α)

Com en $\triangle ABC$ un catet és doble que l'altre tindrem que

$$BG = 2 \left(\frac{x}{2} - 2 \right) = x - 4$$

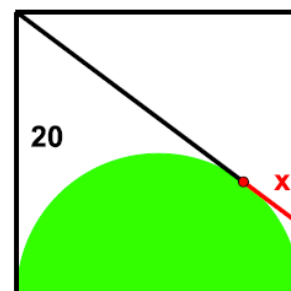
Finalment, en el triangle $\triangle AGB$ es compleix el teorema de Pitàgores (perquè és rectangle)

$$x^2 = \left(\frac{x}{2} + 2 \right)^2 + (x-4)^2 \Rightarrow x^2 - 24x + 80 = 0 \Rightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 20 \end{array} \right.$$

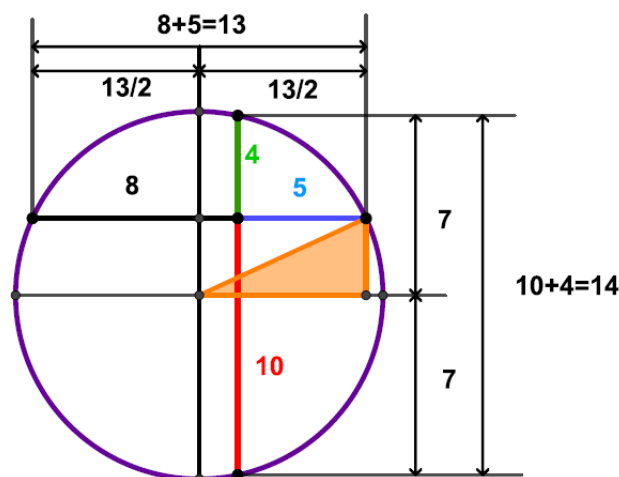
la solució $x = 4$ es menysprea, doncs amb ella:

$$GE = \frac{x}{2} - 2 = 0$$

Setembre 24: Quadrat de costat 20, semicircle i corda tangent. Trobeu x

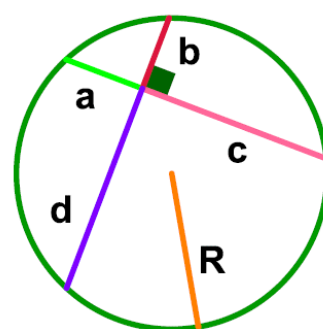


$$r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{205}}{2} \Rightarrow \pi r^2 = \frac{205\pi}{4}$$

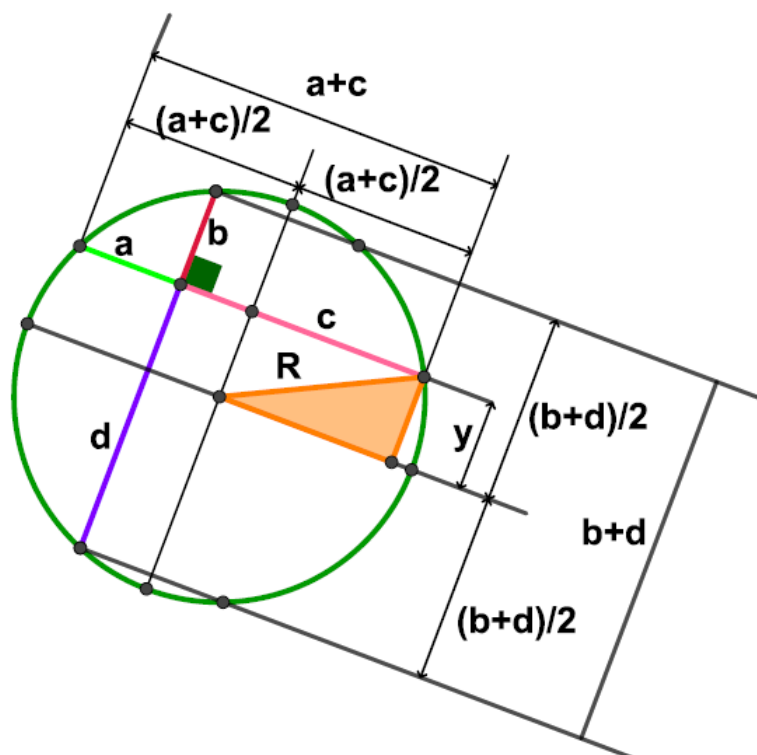


Setembre 27: (Teorema de Faure) En una circumferència de ràdio R i dues cordes perpendiculars:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$$



Solució:



Tracem les perpendiculars a les dues cordes pels seus punts mitjans. La intersecció d'aquestes perpendiculars és el centre del cercle. Quedarà generat el triangle taronja amb catets:

$$\frac{a+c}{2}$$

$$y = \frac{b+d}{2} - b = \frac{d-b}{2}$$

i hipotenusa R . Com les cordes són perpendiculars, el triangle és rectangle i en aplicar el teorema de Pitàgores:

$$R^2 = \frac{(a+c)^2}{4} + \frac{(d-b)^2}{4}$$

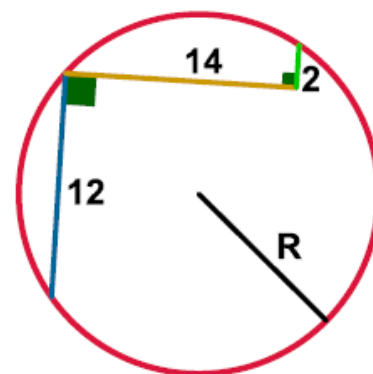
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - 2(ac - bd)$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - 2 \cdot 0$$

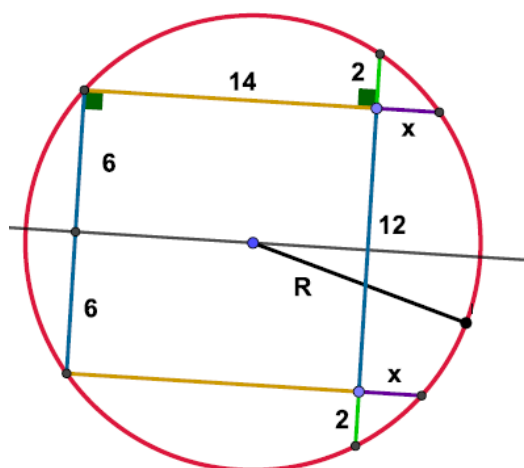
(doncs $a \cdot c = b \cdot d$, pel teorema de les cordes). D'on:

$$4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Setembre 28: Trobeu el radi de la circumferència



Solució:



Considerem la recta perpendicular a la corda que mesura 12 pel seu punt mitjà, que passarà pel centre del cercle. Trobem els simètrics dels extrems dels segments donats respecte a aquesta perpendicular i tindrem llavors la figura adjunta.

Apliquem el teorema de les cordes i obtenim:

$$14x = (12 + 2) \cdot x \Rightarrow x = 2$$

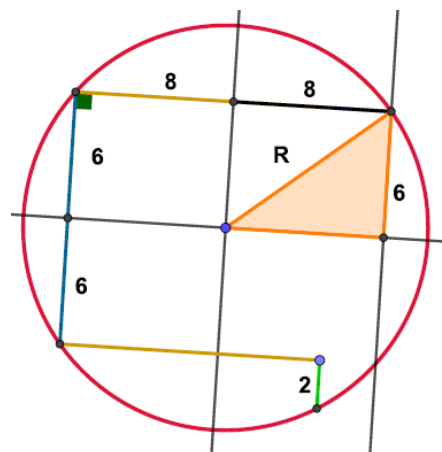
I, ara per a finalitzar:

1.- o bé apliquem el teorema de Faure (aprofitant que les cordes són perpendiculars):

$$4R^2 = 2^2 + 2^2 + 14^2 + (12 + 2)^2 \Rightarrow R = 10$$

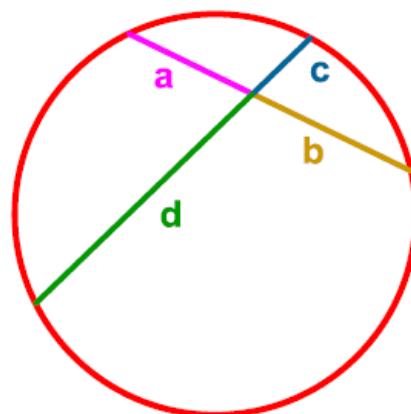
2.- o bé, tornem a traçar la perpendicular a la corda que mesura $(14 + 2 =) 16$ pel seu punt mitjà que es tallarà amb l'altra perpendicular en el centre del cercle. Apareix, llavors, el triangle color taronja que és rectangle (al ser els segments proporcionats al principi, perpendiculars). Aplicant a aquest triangle taronja el teorema de Pitàgores, tenim:

$$R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

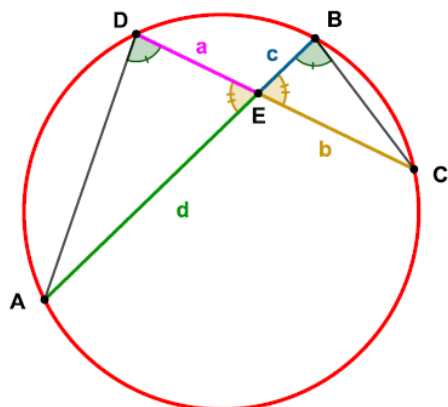


Setembre 29: TEOREMA DE LES CORDES:

$$a \cdot b = c \cdot d$$



Solució:

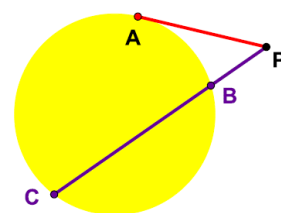


Els triangles $\triangle ADE$ i $\triangle CBE$ són semblants, perquè els angles en E són oposats pel vèrtex i els angles en D i en B subtendeixen el mateix arc (l'arc AC). Per tant:

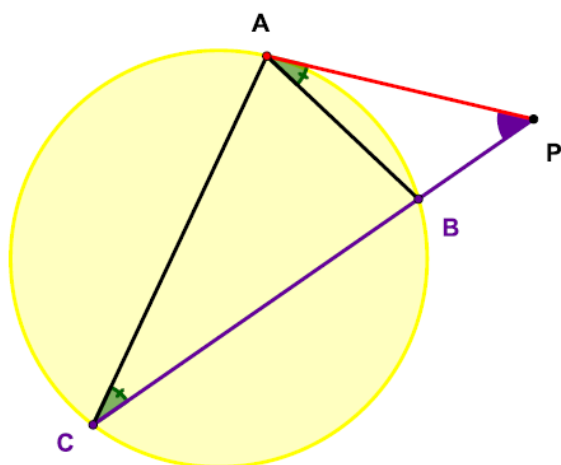
$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b} \Leftrightarrow ab = cd$$

Setembre 30: POTÈNCIA D'UN PUNT: Cercle, secant i tangent. Proveu que:

$$PA^2 = PB \cdot PC$$



Solució:



Considerem els triangles $\triangle CAP$ i $\triangle ABP$. Aquests dos triangles són semblants perquè tenen en comú l'angle en P i l'angle en A i l'angle en C (que subtendeixen a l'arc AB) són iguals (Si C s'aproxima a A per la circumferència les rectes que passen per C i A tendeixen a la tangent AP i el segment CB tendeix al segment AB). Per tant, tindrem:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{PB}{AP} \Leftrightarrow AP^2 = PC \cdot PB$$

