

SOLUCIONS OCTUBRE 2021

PROBLEMES DE LA CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD: 1974, 1975, 1976. PREPARACIÓ OME (<http://cms.math.ca/Competitions/CMO/>) ORGANITZACIÓ I SOLUCIONS: Rafael Martínez Calafat. Professor jubilat.

Octubre 1-2: (1).- Si $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ i $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ comparar x^y amb y^x . (2).- Prova que, per a tot enter positiu n :

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n+1} \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

Solució: Per a (1), tenim: Per a alguns valors particulars de n obtenim que $x^y = y^x$. Així, que intentem provar la igualtat de les dues expressions per a qualsevol valor de n .

$$\begin{aligned} x^y &= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n}} \\ y^x &= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right]^{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n}} \end{aligned}$$

Com que s'obté la mateixa base elevada al mateix exponent, les dues expressions coincideixen.

Per a (2) utilitzarem inducció sobre n . Més detalladament, provarem que la fórmula és certa per a $n = 1$ i $n = 2$, suposarem que la fórmula és una certa per a $n - 1$ i la demostrarem per a $n + 1$.

Per a $n = 1$, tenim:

$$1^2 = 1 = (-1)^{1+1} \cdot 1$$

Per a $n = 2$, tenim:

$$1^2 - 2^2 = 1 - 4 = -3 = (-1) \cdot 3 = (-1)^{2+1} \cdot (1 + 2)$$

Suposem la fórmula certa per a $n - 1$:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 = (-1)^n \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))$$

i vegem-la per a $n + 1$:

$$\begin{aligned} &1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 + (-1)^{n+1} n^2 + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = \\ &= 1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 + (-1)^{n+1} n^2 + (-1)^{n+2} (n^2 + 2n + 1) = \\ &= 1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 + (-1)^{n+1} n^2 + (-1)^{n+1} (-n^2 - 2n - 1) = \\ &1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 + (-1)^{n+1} n^2 - (-1)^{n+1} n^2 + (-1)^{n+1} (-2n - 1) = \\ &= 1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 + (-1)^{n+1} (-2n - 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{hipòtesi} \\ \text{d'inducció} \end{array} \right\} = \\ &= (-1)^n (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + (-1)^{n+1} (2n + 1) = \\ &= (-1)^n (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n+1)) = (-1)^{n+2} (1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)) \end{aligned}$$

Octubre 4-5: Siga n un enter positiu fix. A qualsevol elecció de n nombres reals que complisquen $0 \leq x_i \leq 1$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) els fem correspondre la suma

$$(*)_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \dots + |x_1 - x_n| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_2 - x_n| + \dots + |x_{n-1} - x_n|$$

Trobeu el major valor possible d'aquesta suma.

Solució: Notem que $(*)_n$ és una espècie de mesura de dispersió dels reals $\{x_i\}_{i=1}^n$. Vegem com obtindrem aquesta màxima suma. Si disposem de dos punts, la màxima suma s'aconsegueix amb:

$$x_1 = 0; x_2 = 1; (*)_2 = |x_1 - x_2| = 1$$

Si disposem de tres punts, la màxima suma s'aconsegueix amb:

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0 \quad (*)_3 = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + (*)_2 = 1 + 0 + 1 = 2$$

Si disposem de quatre punts, la màxima suma s'aconsegueix amb:

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 1 \quad (*)_4 = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + (*)_3 = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$$

Si disposem de cinc punts, la màxima suma s'aconsegueix amb:

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 1; x_5 = 0 \quad (*)_5 = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + |x_1 - x_5| + (*)_4 = 1 + 0 + 1 + 0 + 4 = 6$$

S'observa que:

$$(*)_n = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \dots + |x_1 - x_n| + (*)_{n-1}; \quad (*)_2 = 1; (*)_3 = 2; (*)_4 = 4; (*)_5 = 6; \dots$$

I com:

$$|x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \dots + |x_1 - x_n| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

on $\lfloor \cdot \rfloor$ és la funció part entera, tenim:

$$(*)_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (*)_{n-1}; \quad \text{amb } (*)_2 = 1$$

Octubre 6: Simplifica:

$$\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n}}$$

Solució: Tenim:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n}} &= \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n} \right)^{1/3} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{cada sumando del numerador} \\ \text{conté al factor } 2^3 \\ \text{cada sumando del denominador} \\ \text{conté al factor } 3^3 \end{array} \right\} = \left(\frac{2^3(1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)}{3^3(1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)} \right)^{1/3} = \left(\frac{2^3}{3^3} \right)^{1/3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Octubre 7-8: Una funció $y = f(x)$ es diu periòdica si existeix un nombre real positiu p tal que $f(x + p) = f(x)$ per a tot x . Per exemple, $y = \sin x$ és periòdica de període 2π . És periòdica la funció:

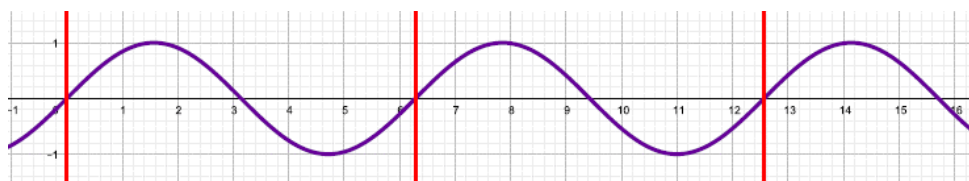
$$y = \sin(x^2)?$$

Demostreu la vostra afirmació.

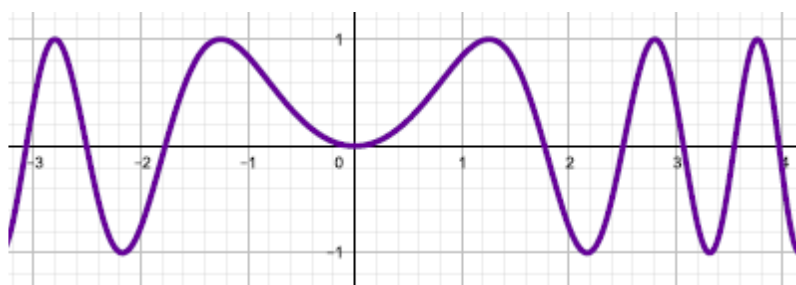
Solució: Si una funció és periòdica hi ha un tros de la seua gràfica que es repeteix indefinidament tant cap a la dreta com cap a l'esquerra:



La gràfica de $y = \sin x$ es periòdica de període 2π



Com x^2 es fa molt gran a mesura que x es fa gran, $y = \sin x^2$ complirà que l'ona sinodal s'anirà estrenyent a mesura que ens desplacem a la dreta o a l'esquerra (a part de que la gràfica seria la d'una funció parell). Es dir, la gràfica de la funció $y = \sin x^2$, serà del tipo:



El que impossibilita que siga una funció periòdica. Per a provar-ho suposarem que és periòdica i arribarem a un absurd. Siga p el període de $y = \sin x^2$. Aleshores:

$$\sin(x + p)^2 = \sin x^2 \quad \forall x$$

Donant-li a x el valor 0:

$$\sin p^2 = \sin 0 = 0 \Rightarrow p^2 = k\pi \text{ per a algun } k \in \mathbb{N} \Rightarrow p = \sqrt{k\pi} \text{ per a algún } k \in \mathbb{N}$$

Tindrem aleshores:

$$\sin(x + \sqrt{k\pi})^2 = \sin x^2 \quad \forall x$$

i ara busquem algun valor de x per al qual la part esquerra de l'anterior igualtat done diferent a la part dreta.

Tindrem, fent $x = \sqrt{\frac{k\pi}{2}}$

$$\sin\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2}} + \sqrt{k\pi}\right)^2 = \begin{cases} = \sin\left[\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 \frac{k\pi}{2}\right] \\ = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{si } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{cases}$$

Però:

$$5 < (1 + \sqrt{2})^2 < 6$$

d'on:

$$5 \frac{k\pi}{2} < (1 + \sqrt{2})^2 \frac{k\pi}{2} < 3k\pi$$

per el que:

$$\sin \left[(1 + \sqrt{2})^2 \frac{k\pi}{2} \right] \neq \begin{cases} \sin \frac{5k\pi}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{si } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \\ \sin 3k\pi = 0 \end{cases}$$

que contradiu

$$\sin \left[(1 + \sqrt{2})^2 \frac{k\pi}{2} \right] = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Octubre 9: Una successió $a_1, a_2, a_3, \dots$ compleix que

$$(1) a_1 = \frac{1}{2}$$

$$(2) a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 \cdot a_n, \text{ para cualquier } n.$$

Determineu el valor de a_n .

Solució: Tindrem:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n &= n^2 a_n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} &= (n-1)^2 a_{n-1} \end{aligned}$$

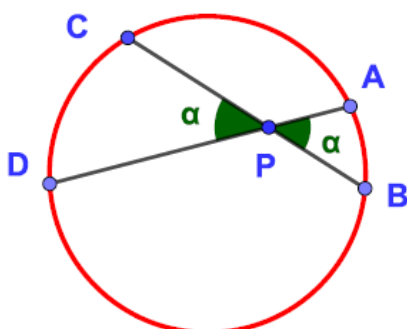
i restant totes dues expressions:

$$a_n(n^2 - 1) = (n-1)^2 a_{n-1} \stackrel{n \neq 1}{\Leftrightarrow} a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$$

d'on:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} a_{n-2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} a_{n-3} = \dots = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} a_1 \\ &= \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

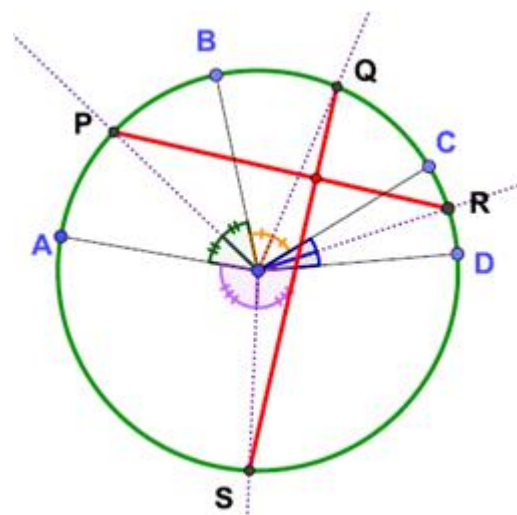
Octubre 11: Siguen A, B, C i D quatre punts consecutius d'una circumferència i P, Q, R i S els punts mitjans dels arcs AB, BC, CD i DA. Proveu que $PR \perp QS$.



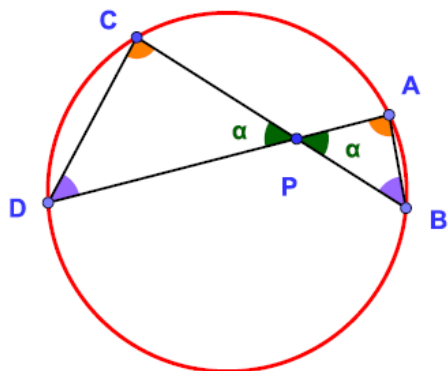
Lema prèvi: Si P és un punt interior del cercle, es denomina angle interior a l'angle $\angle APB = \angle CPD$.

En el contexte de la anterior definició:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DC}}{2}$$



Demostració del lema:

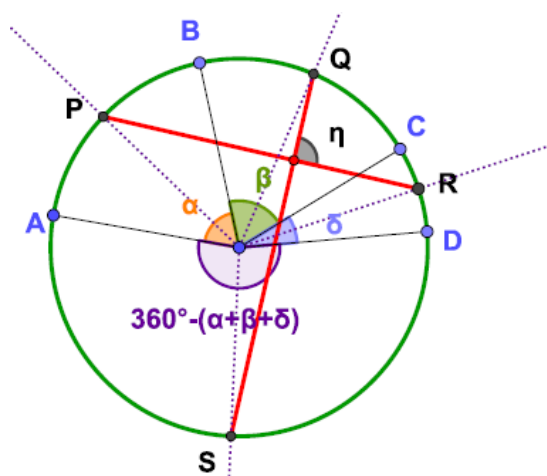


Considerem el triangle $\triangle PCD$. En ell, tenim:

$$\alpha + \angle D + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \frac{\widehat{CA}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2} = 180^\circ$$

$$2\alpha + \widehat{CA} + \widehat{BD} = 360^\circ = \widehat{CA} + \widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{DC} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DC}}{2}$$

Solució:



Haurem de provar que $\eta = 90^\circ$. Del lema prèvi:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\widehat{QR} + \widehat{SP}}{2} = \frac{\widehat{QC} + \widehat{CR} + \widehat{SA} + \widehat{AP}}{2} \\ &= \frac{\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{2} + \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

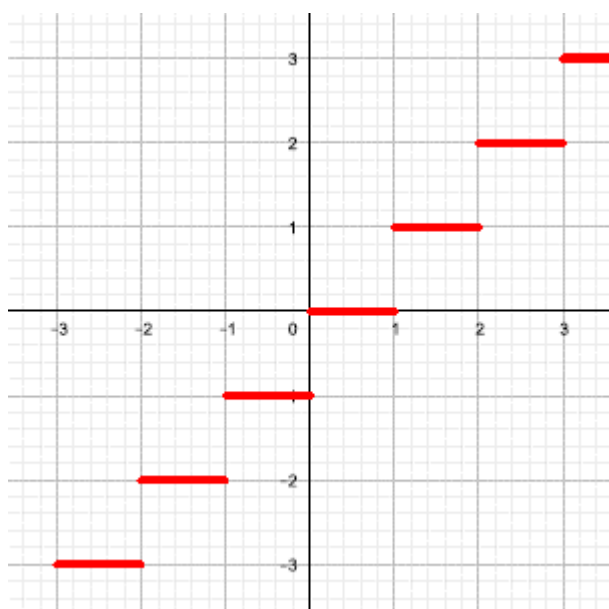
Octubre 12-13: Per a cada real r , es defineix:

$$[r] = \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq r\}$$

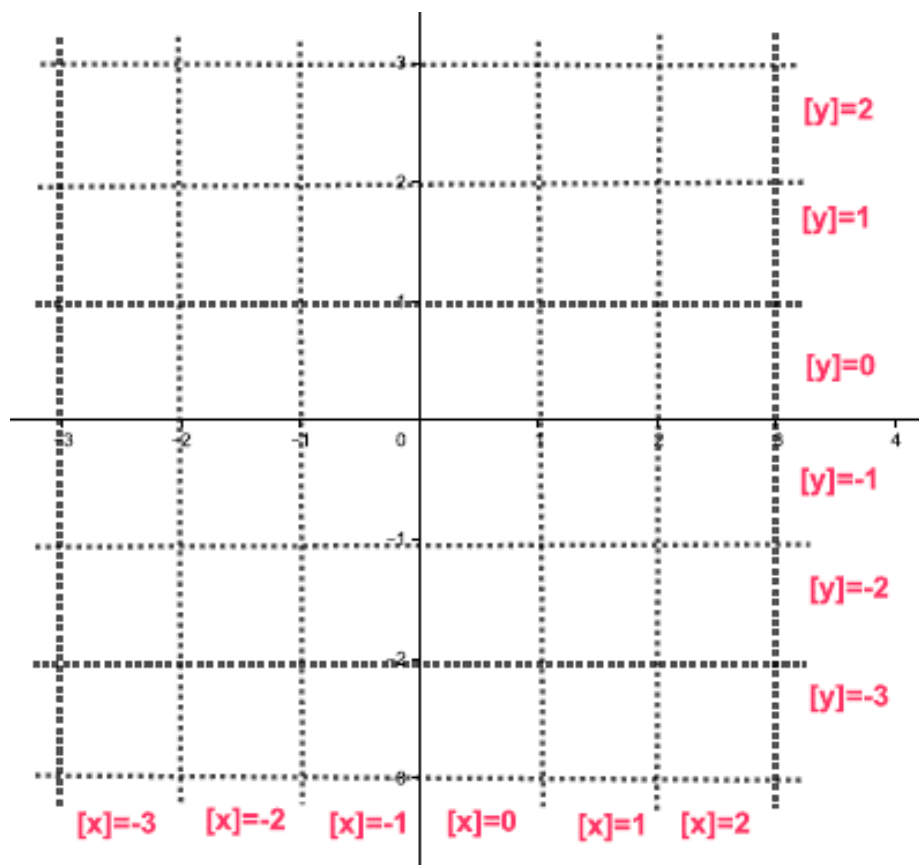
(e. g. $[6] = 6$; $[\pi] = 3$; $[-1,5] = -2$). Dibuixa en el pla (x, y) el conjunt de punts:

$$[x]^2 + [y]^2 = 4$$

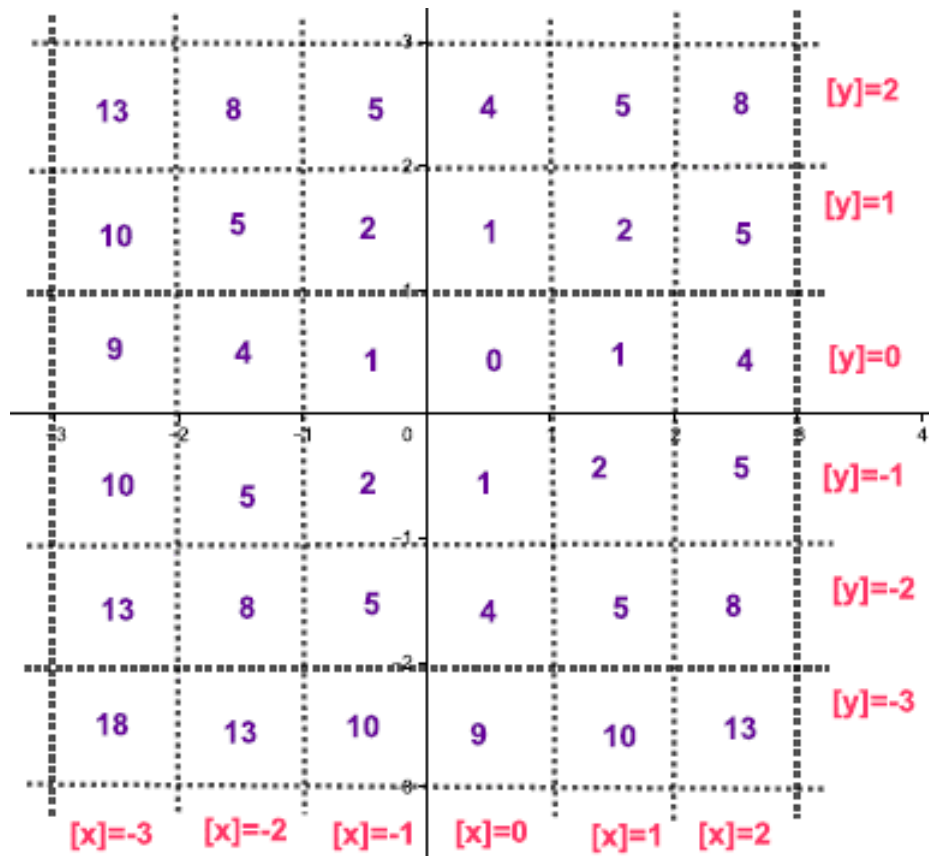
Solució: De la definició de $[r]$ tenim que la seua gràfica és:



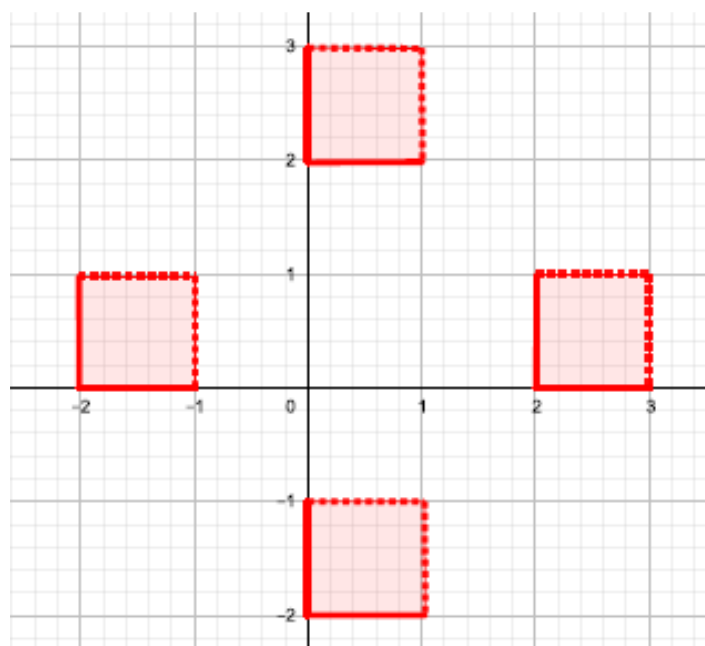
Por el que:



Amb això, el pla x-y està particionat en quadrats. En cada quadrat hem calculat $[x]^2 + [y]^2$



Per tant, el sol·licitat en l'enunciat és:



Octubre 14: Donats quatre pesos que estan en progressió aritmètica i una balança de dos braços, mostra com trobar el pes més gran utilitzant la balança únicament dues vegades.

Solució: Siguen:

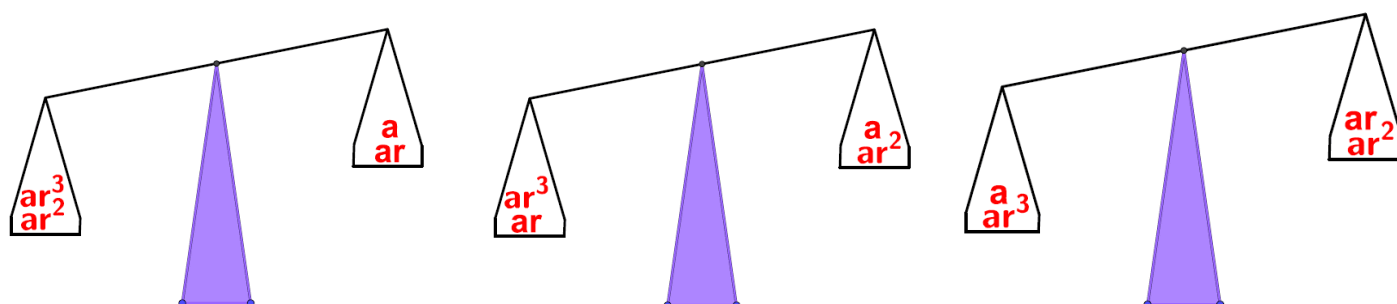
$$a; ar; ar^2; ar^3$$

els pesos amb $r > 1$ (i així els pesos van creixent).

Donats els quatre pesos els separem en dos grups de dos pesos cadascun.

- Posem un parell de pesos en un platet i l'altre parell de pesos en l'altre platet. El parell de pesos que conté al pes amb r al cub és el més pesat dels dos grups.
- Localitzat el parell que conté al pes amb r elevat al cub, posem cadascun dels dos pesos en els plateterets de la balança. El pes més gran és el que està en el platet més baix.

Provarem, ara, l'afirmació exposada en A: En fer els dos grups de dos pesos caben tres possibilitats:



Hem de provar que si $r > 1$:

$$A - 1: r^2 + r^3 > 1 + r$$

$$A - 2: r^3 + r > r^2 + 1$$

$$A - 3: r^3 + 1 > r^2 + r$$

Tenim, per a A-1:

$$r > 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (*) r^2 > r \\ (**) r^3 > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r^3 + r^2 > r + 1}$$

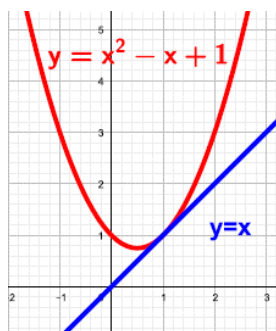
(*) Multiplicant cada membre de la desigualtat $r > 1$, per $r (>0)$

(**) Multiplicant per $r^2 (>0)$ la desigualtat $r > 1$: $r^3 > r^2 > 1$

Per a A-2: Multiplicant per $r^2+1 (>0)$ la desigualtat $r > 1$:

$$r(r^2 + 1) = \mathbf{r^3 + r > r^2 + 1}$$

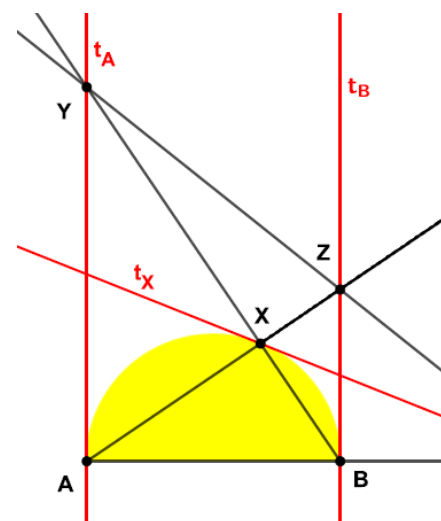
Per a A-3:



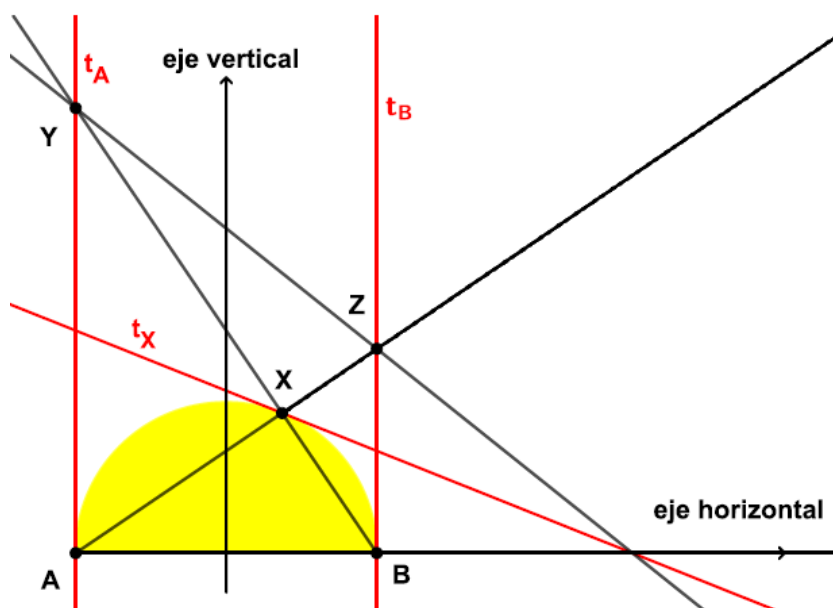
De la gràfica adjunta, tenim, (que per a $r > 1$), $r^2 - r + 1 > r$. Multiplicant cada membre d'aquesta desigualtat per $r + 1 (>0)$, tenim:

$$(r + 1) \cdot (r^2 - r + 1) = \mathbf{r^3 + 1 > r^2 + r} = (r + 1) \cdot r$$

Octubre 15-16: Donat un cercle de diàmetre AB i un punt X diferent d'A i de B, siguen t_A , t_B i t_X les tangents al cercle en A, B i X. Siga Z la intersecció de AX amb t_B i Y la intersecció de BX amb t_A . Proveu que les tres rectes AB, t_X i ZY són concurrents o paral·leles.



Solució:



Triem el sistema de referència de manera que l'eix horitzontal és la línia AB i l'eix vertical és la paral·lela a t_A pel punt mitjà del segment AB. En aquest cas, tenim:

$$A(-a, 0); \quad B(a, 0); \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$X(\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = a^2 \quad (-a \neq \alpha \neq a)$$

$$t_A \equiv x = -a; \quad t_B \equiv x = a$$

t_x :

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'^{l(\alpha, \beta)} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$t_x \equiv y - y_0 = -\frac{\alpha}{\beta}(x - x_0) \equiv y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) + \beta$$

AX

$$\left. \begin{array}{l} A(-a, 0) \\ X(\alpha, \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y - 0}{x + a} = \frac{\beta - 0}{\alpha + a} \Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha + a}(x + a)$$

$Z = t_B \cap AX$

$$AX \equiv y = \frac{\beta}{\alpha + a}(x + a) \equiv \{t_B \equiv x = a\} y = \frac{2\beta a}{\alpha + a} \Rightarrow Z\left(a, \frac{2\beta a}{\alpha + a}\right)$$

BX

$$\left. \begin{array}{l} B(a, 0) \\ X(\alpha, \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y - 0}{x - a} = \frac{\beta - 0}{\alpha - a} \Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha - a}(x - a)$$

$Y = t_X \cap BX$

$$BX \equiv y = \frac{\beta}{\alpha - a}(x - a) \equiv \{t_A \equiv x = -a\} y = \frac{-2\beta a}{\alpha + a} \Rightarrow Y\left(-a, \frac{2\beta a}{a - \alpha}\right)$$

YZ

$$\left. \begin{array}{l} Z\left(a, \frac{2\beta a}{\alpha + a}\right) \\ Y\left(-a, \frac{2\beta a}{a - \alpha}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y - \frac{2\beta a}{\alpha + a}}{x - a} = \frac{\frac{2\beta a}{a - \alpha} - \frac{2\beta a}{\alpha + a}}{-2a} \Rightarrow y = \frac{2\beta \alpha}{\alpha^2 - a^2}(x - a) + \frac{2\beta a}{\alpha + a}$$

$C = YZ \cap t_x$

$$YZ \equiv y = \frac{2\beta \alpha}{\alpha^2 - a^2}(x - a) + \frac{2\beta a}{\alpha + a}, \quad t_x \equiv y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) + \beta$$

$$\frac{2\beta \alpha}{\alpha^2 - a^2}(x - a) + \frac{2\beta a}{\alpha + a} = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) + \beta \dots (\text{recordar } \alpha^2 + \beta^2 = a^2) \dots \Rightarrow x = \frac{a^2}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{a^2}{\alpha} - \alpha\right) + \beta = \dots = 0 \Rightarrow t_x \cap AB \cap YZ = C\left(\frac{a^2}{\alpha}, 0\right) \quad (\alpha \neq 0)$$

Per al cas $\alpha = 0$ tenim:

$$t_x \equiv y = \beta; \quad YZ \equiv y = \frac{2\beta a}{a} = 2\beta$$

que són rectes paral·leles

Octubre 18-19: Tenim una quantitat il·limitada de segells de 8 cèntims i de 15 cèntims. Algunes quantitats de franqueig postal no es poden obtenir exactament, e. g. 7 cèntims o 29 cèntims. Quina és la quantitat més gran que no es pot obtenir exactament, i. e. la quantitat de franqueig que no es pot aconseguir exactament, mentre que totes les quantitats majors són assolibles?

Solució: Imaginem la següent taula:

								(1,k)	
							n-15	n	
							n-7	n+8	
						n-14	n+1	.+16	
						n-6	n+9		
					n-13	n+2	.+17		
					n-5	n+10			
				n-12	n+3	.+18			
			n-4	.+11					
		n-11	n+4	.+19					
		n-3	.+12						
	n-10	n+5	.+20						
	n-2	.+13							
	n-9	n+6	.+21						
	n-1	.+14							
(2k-1, k-(k-1))=(15, 1)	n-8	n+7	.+22						
	.+15								
	.+23								

No estarà en la taula el número $n - 8$, perquè les seues coordenades cauen fora de la taula. I a més en la taula estaran tots els números posteriors a $n - 8$ ($= 105 - 8$). És a dir, faltarà en número 97 i estaran tots els posteriors a 97. La contestació a l'enunciat és el número 97.

Nota: Els valors de n per als quals no existeix solució en $8x + 15y = n$ poden ser obtinguts emplenant la taula descrita i analitzant els resultats

Valores de n sin solución = Franqueos imposibles de cumplir		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
9, 10, 11, 12, 13, 14	1	8	23	38	53	68	83	98	113	128	143	158	173
17, 18, 19, 20, 21, 22	2	16	31	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181
25, 26, 27, 28, 29	3	24	39	54	69	84	99	114	129	144	159	174	189
33, 34, 35, 36, 37	4	32	47	62	77	92	107	122	137	152	167	182	197
41, 42, 43, 44	5	40	55	70	85	100	115	130	145	160	175	190	205
49, 50, 51, 52	6	48	63	78	93	108	123	138	153	168	183	198	213
57, 58, 59	7	56	71	86	101	116	131	146	161	176	191	206	221
65, 66, 67	8	64	79	94	109	124	139	154	169	184	199	214	229
73, 74	9	72	87	102	117	132	147	162	177	192	207	222	237
81, 82	10	80	95	110	125	140	155	170	185	200	215	230	245
97	11	88	103	118	133	148	163	178	193	208	223	238	253
	12	96	111	126	141	156	171	186	201	216	231	246	261
	13	104	119	134	149	164	179	194	209	224	239	254	269
	14	112	127	142	157	172	187	202	217	232			

Octubre 20-27: Siga donat un cercle i AB un dels seus diàmetres. Siga C un punt fix d'AB i Q un punt variable sobre la circumferència del cercle. Siga P un punt de la línia determinada per Q i C per al qual:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{QC}{CP}$$

Descriu el lloc geomètric del punt P

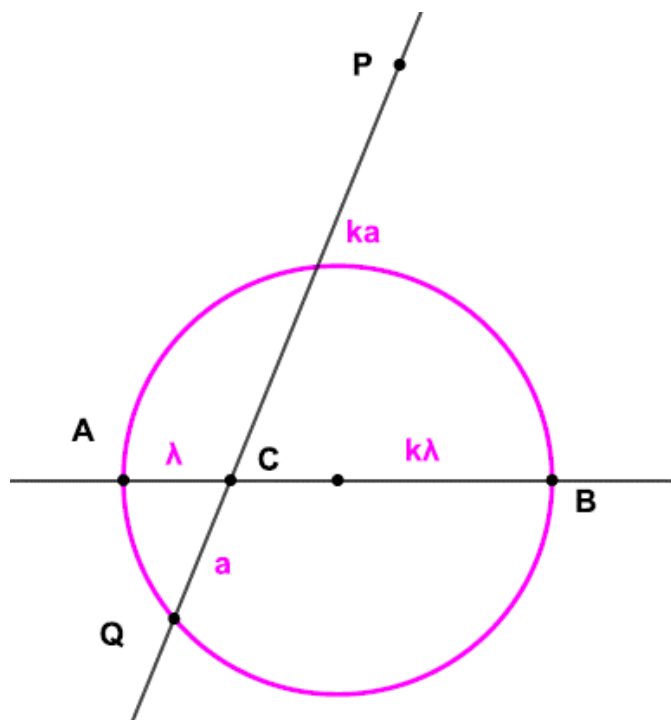
Solució:

Dibuixem la situació descrita.

Siga k la constant de proporcionalitat entre AC i CB :

$$\frac{1}{k} = \frac{AC}{CB} \left(= \frac{\lambda}{k\lambda} \right) = \frac{QC}{CP}$$

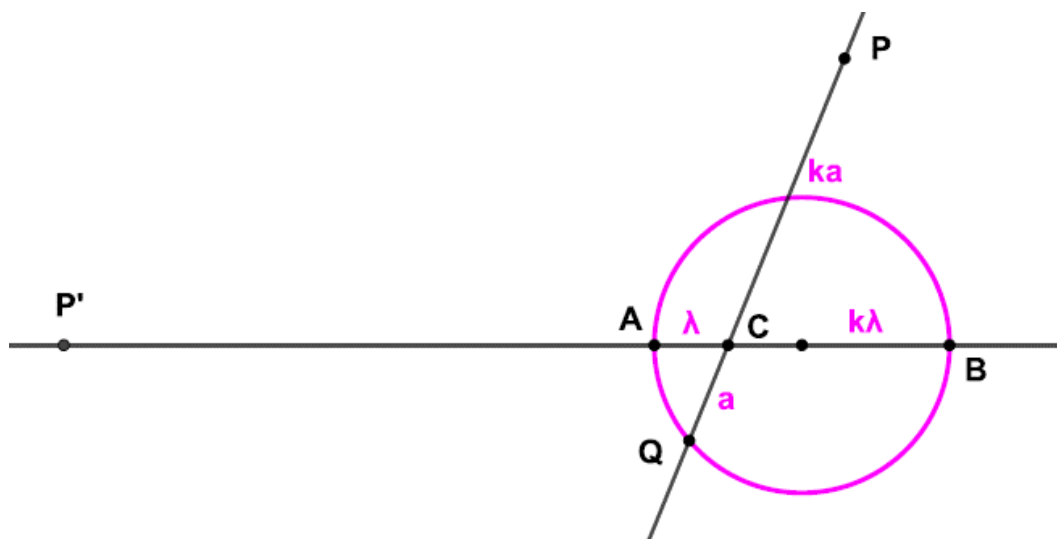
Se'ns demana el lloc geomètric dels punts P en fer que Q descriu la circumferència de diàmetre AB . Com que C es manté fix, si l'extrem Q del segment QP descriu una circumferència, l'extrem P del segment QP també descriu una circumferència. A més perquè C està en un diàmetre de la circumferència de diàmetre AB , un diàmetre de la circumferència traçada per P també està en la recta que genera el segment AB . Fent coincidir Q amb A i amb B tindrem el diàmetre de la circumferència que descriu P



Si $Q \rightarrow A$ aleshores $P \rightarrow B$. Pel que B és un punt de la circumferència descrita per P

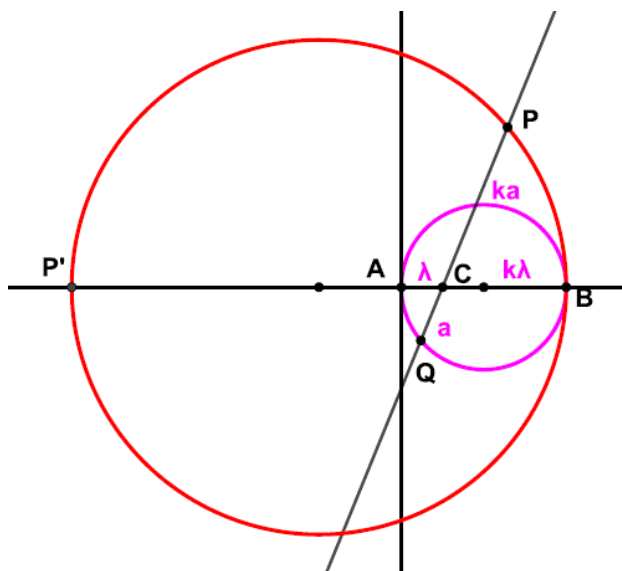
Si $Q \rightarrow B$ aleshores $P \rightarrow P'$ sent P' un punt de la recta que passa per AB que compleix:

$$CP' = k \cdot CB = k \cdot k\lambda = k^2\lambda$$



És a dir, si R és el radi de la circumferència descrita pel punt P tenim:

$$2R = P'B = P'C + CB = k^2\lambda + k\lambda = \lambda k(k + 1) \Rightarrow R = \frac{\lambda k(k + 1)}{2}$$



Octubre 21-22: 1.- Demostreu que, si un número és racional, la part decimal, la part entera i el número no poden estar en progressió geomètrica.

2.- Trobeu un número positiu tal que la seua part decimal, la seua part entera i el número estiguen en progressió geomètrica

Solució: Per a la primera part procedirem per reducció a l'absurd. Siga $e + \frac{p}{q}$ el nombre racional i suposem que:

$$\frac{p}{q}, \quad e, \quad e + \frac{p}{q}$$

estan en progressió geomètrica. Aleshores:

$$\frac{e}{\frac{p}{q}} = \frac{e + \frac{p}{q}}{e} \quad (= r)$$

Simplificant:

$$\frac{eq}{p} = \frac{eq + p}{qe} \Rightarrow e^2 q^2 = (eq + p)p \Rightarrow e^2 q^2 - epq - p^2 = 0$$

L'última equació és una equació de segon grau respecte a cadascuna de les incògnites: e , p y q , que deu de tenir solucions enteres. Per exemple, respecte de e , tenim:

$$e = \frac{pq \pm \sqrt{p^2 q^2 + 4p^2 q^2}}{2q^2} = \begin{cases} \frac{(1 + \sqrt{5})p}{2q} \\ \frac{(1 - \sqrt{5})p}{2q} \end{cases}$$

Amb el que:

$$\frac{(1 \pm \sqrt{5})p}{2q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (1 \pm \sqrt{5}) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{5} \in \mathbb{Z}$$

que és un absurd.

Per a la segona part, representem per $\{x\}$ la part decimal i per $[x]$ la part entera. Si $\{x\}$, $[x]$ i x estan en progressió geomètrica, tindrem que:

$$\frac{[x]}{\{x\}} = \frac{x}{[x]} \Rightarrow \frac{[x]}{x - [x]} = \frac{x}{[x]} \Rightarrow \frac{1}{\frac{x}{[x]} - 1} = \frac{x}{[x]}$$

Si fem

$$z = \frac{x}{[x]}$$

l'equació anterior es transforma en:

$$\frac{1}{z - 1} = z \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(menyspreem la solució negativa). Per tant, si $\{x\}$, $[x]$ i x estan en progressió geomètrica

$$\frac{x}{[x]} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (***)$$

Provarem que si $\{x\}$, $[x]$ i x estan en progressió geomètrica aleshores $[x] = 1$. Per reducció al absurd.

Si $[x] = p \geq 2$, aleshores: ($\{x\}$, p i x estan en progressió geomètrica)

$$\{x\} \cdot r = p \geq 2 \Rightarrow r \geq \frac{2}{\{x\}} > 2$$

Si $r > 2$:

$$[x] \cdot r = x > 2[x] \quad ; \text{absurdo!}$$

Per últim, en (***) tenim:

$$\frac{x}{[x]} = \frac{x}{1} = x = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Nota: L'únic número positiu x tal que $\{x\}$, $[x]$ i x estan en progressió geomètrica és el número àureo: φ

$$\{\varphi\} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$[\varphi] = 1 = \{\varphi\} \cdot r$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [\varphi] \cdot r$$

Octubre 23: Siga n un enter positiu. Prova que si n és una potència de 2 llavors n no es pot posar com a suma d'enters positius consecutius.

Solució: Per reducció a l'absurd. Suposem que $n = 2^p$ amb $p \geq 0$. Si $p = 0$, tenim $n = 1$ i 1 no es pot expressar com a suma d'almenys dos enters positius consecutius. Si $p = 1$, tenim $n = 2$ i 2 no es pot expressar com a suma d'almenys dos enters positius consecutius. Siga, doncs, $p \geq 2$. Suposem que 2^p és suma de k (≥ 2) enters positius consecutius, llavors

$$2^p = (s + 1) + (s + 2) + \dots + (s + k) = ks + (1 + 2 + \dots + k) = ks + \frac{k + 1}{2}k = \frac{2ks + k^2 + k}{2} \quad (*)$$

Per tant:

$$0 = k^2 + k(2s + 1) - 2^{p+1} \quad \text{con } p \geq 2 \text{ y } k \geq 2$$

és una equació de segon grau (respecte de k) amb almenys una solució entera major o igual a 2. Per les relacions de Cardano-Vietà, tenim:

$$\text{suma de solucions} = -(2s + 1)$$

$$\text{producte de solucions} = -2^{p+1}$$

És a dir, la suma de solucions és imparell (per tant, una ha de ser parell i l'altra imparell) i el producte de solucions és una potència de dos i per tant les dos son parells (el que contradiu que una siga parell i l'altra imparell). Ja que $k = 1$ no és solució (de ser-ho tindriem en (*) $2^p = 2^p + 1$)

Octubre 25-26: Suposem:

$$n \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} = n \cdot (n-1) \cdot a_n - (n-2) \cdot a_{n-1} \quad (*)$$

per a tot enter positiu $n \geq 1$. Si $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$, trobeu:

$$\sum_{i=0}^{50} \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{50}}{a_{51}}$$

Solució: Tenim:

$$n = 1 \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot a_2 = 1 \cdot 0 \cdot a_1 - (1-2) \cdot a_0 = a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 2a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3!}$$

$$\begin{aligned} n = 3 \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot a_4 &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 - a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3} \left(3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3!} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4 \cdot 3} \left(3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3!} - \frac{3}{3!} \right) \\ &= \frac{1}{4 \cdot 3} \left(\frac{3 \cdot 2 - 3}{3!} \right) = \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{3}{3!} = \frac{1}{4!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 4 \Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot a_5 &= 4 \cdot 3 \cdot a_4 - 2 \cdot a_3 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{5 \cdot 4} \left(4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4!} - 2 \cdot \frac{1}{3!} \right) = \frac{1}{5 \cdot 4} \left(4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4!} - \frac{2 \cdot 4}{4!} \right) \\ &= \frac{1}{5 \cdot 4} \left(\frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 4}{4!} \right) = \frac{1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{4}{4!} = \frac{1}{5!} \end{aligned}$$

I ix com a hipòtesi d'inducció

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Vegem si es compleix l'equació recurrent (*)

$$n \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} = n \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot a_n - (n-2) \cdot a_{n-1} &= n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n!} - (n-2) \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} - \frac{n-2}{(n-1)!} \\ &= \frac{n-1}{(n-1)!} - \frac{n-2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Amb això, tindrem:

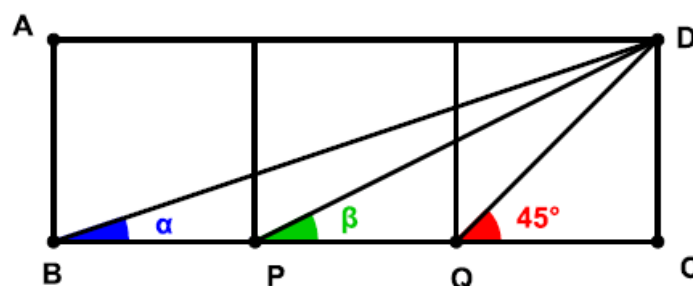
$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{50}}{a_{51}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2!}} + \frac{\frac{1}{2!}}{\frac{1}{3!}} + \dots + \frac{\frac{1}{50!}}{\frac{1}{51!}} = \frac{1}{2} + \frac{4}{1} + \frac{3!}{2!} + \dots + \frac{51!}{50!} = \frac{1}{2} + 4 + 3 + 4 + \dots + 51$$

$$= \frac{9}{2} + (3 + 4 + 5 + \dots + 51) = \frac{9}{2} + \frac{3 + 51}{2} \cdot 49 = \frac{2655}{2}$$

Octubre 28: Siga ABCD un rectangle amb $BC = 3 \cdot AB$. Proveu que si P i Q són punts de BC amb $BP = PQ = QC$, llavors:

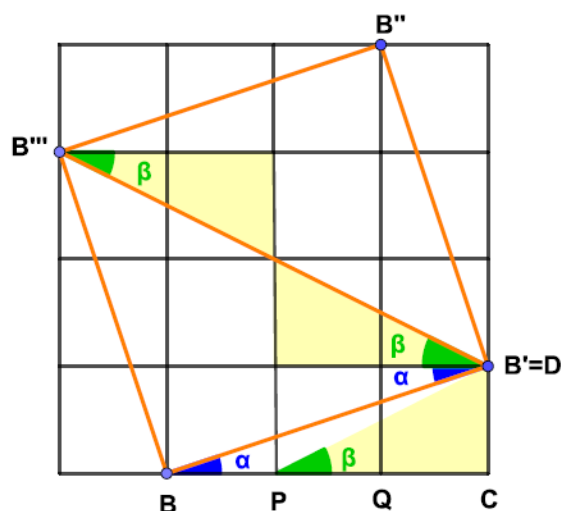
$$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$$

Solució: Tindrem, dibuixant la situació descrita en l'enunciat:



Hem de provar que $\alpha + \beta = 45^\circ$ (ja que $\angle DQC = 45^\circ$).

A partir del rectangle ABCD construïm un quadrat 4x4. A partir d'ell, construïm el quadrat $BB'B''B'''$



Els angles de color blau són iguals per alterns interns. Els angles en verd són iguals perquè els triangles grocs són iguals.

Tenim, aleshores que $\alpha + \beta = 45^\circ$ ja que $B'''B'$ és la diagonal del quadrat $BB'B''B'''$

Octubre 29-30: A dos estudiants de seté grau se'ls va permetre jugar en un torneig d'escacs per a estudiants de huité grau. Cada parella de participants va jugar una vegada entre si i cadascun dels participants va rebre un punt per guanyar cada partida, mig punt per fer taules i zero punts per partida perduda. Els dos estudiants de seté grau van rebre un total de huit punts i els estudiants de huité grau van obtenir, tots ells, la mateixa quantitat de punts. Quants estudiants de huité grau (com a mínim) van participar en el torneig? És la solució única?

Solució: Si hi ha n jugadors de huité, hi ha en total $n + 2$ jugadors en el torneig: Com que cada parell de jugadors juga una partida, s'hauran celebrat C_2^{n+2} partides d'escacs. Com que en cada partida es distribueix un punt entre els dos jugadors tindrem que en tot el torneig s'han distribuït

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2}$$

punts. Com que els dos alumnes de seté grau han obtingut un total de 8 punts, si cada jugador de huité grau aconsegueix x punts i haurà de complir-se l'equació:

$$nx + 8 = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \Rightarrow n^2 + (3 - 2x)n - 14 = 0 \Rightarrow n = \frac{2x - 3 \pm \sqrt{(3 - 2x)^2 + 56}}{2}$$

I com que l'equació ha de tindre almenys una solució entera positiva, deu de ser:

$$(3 - 2x)^2 + 56$$

un quadrat perfecte (major que $\sqrt{56} = 7,48 \dots$). Analitzem els casos possibles:

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 8^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 9^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ No} \\ \mathbf{x = 4} \Rightarrow n = \frac{5 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{n = 7} \\ n = -2 \text{ No} \end{cases} \end{cases}$$

Per tant, ja tenim una solució (la de menor valor de n): Hi ha ($n =$) 7 jugadors de huité grau i cadascun d'ells ha aconseguit en el torneig 4 punts

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 10^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm\sqrt{44} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 11^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm\sqrt{65} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 12^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm\sqrt{88} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 13^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm\sqrt{113} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 14^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm\sqrt{140} \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

$$(3 - 2x)^2 + 56 = 15^2 \Rightarrow 3 - 2x = \pm 13 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ No} \\ \mathbf{x = 8} \Rightarrow n = \frac{5 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{n = 14} \\ n = -1 \text{ No} \end{cases} \end{cases}$$

Per tant, apareix una altra solució: hi ha ($n =$) 14 jugadors de huité grau i cadascun d'ells ha aconseguit 8 punts en el torneig