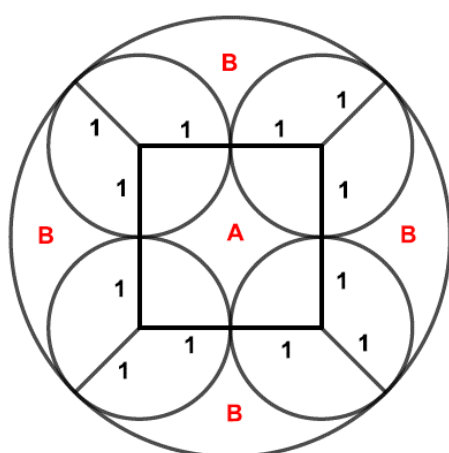
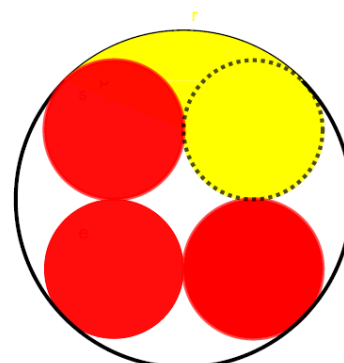


SOLUCIONS NOVEMBRE 2021

COLECCIÓ PER A LA PREPARACIÓ DE LA OLIMPIADA DE LA FESPM DE 1ESO Y 2ESO EN 2004 I 2005. AUTOR: JOSÉ COLÓN LACALLE. PROFESSOR JUBILAT.

Novembre 1-2: En la figura es mostren quatre cercles de radi 1 inscrits en un cercle més gran.

Quina és l'àrea de la zona de color groc?



Solució: Designarem Per a i B les zones del dibuix de l'esquerra. Per C i D els cercles de radi 1 i R i per E el quadrat de costat $(1 + 1 =) 2$.

L'àrea de la zona E (A_E) És L'àrea de la zona A (A_A) més l'àrea de quatre quadrants de radi 1 (A_C).

L'àrea de la zona B (A_B) és

$$2R = 1 + 2\sqrt{2} + 1 \Rightarrow R = 1 + \sqrt{2}$$

la quarta part de l'àrea de la zona D (A_D) menys l'àrea la zona A (A_A) menys ela àrea de quatre zones C (A_C).

Tindrem:

$$A_A = A_E - A_C = 2 \cdot 2 - \pi \cdot 1^2 = 4 - \pi$$

$$A_B = \frac{A_D - A_A - 4 \cdot A_C}{4} = \frac{\pi(1 + \sqrt{2})^2 - 4 + \pi}{4} - \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - 1$$

Per tant, l'àrea de la zona groga es l'àrea de la zona B (A_B) més l'àrea de un cercle de radi 1, és a dir:

$$A_{\text{groga}} = A_B + A_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - 1 + \pi = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \pi - 1$$

Novembre 3-10: Tres amics decideixen vendre granissat de taronja en l'entrada d'un estadi esportiu. Van comprar taronges i sucre i van pagar 50 €. A més, van pagar 100€ pel lloguer de taules, compra de gots i palletes per a xarrupar. Van calcular obtindre 250 gots de granissat. A quant han de vendre cada got per a obtindre uns guanys del 25%?

Solució: Els diners gastats pels tres amics és: $(100 \text{ €} + 50 \text{ €} =) 150 \text{ €}$. Els guanys d'un 25% pugen:

$$\frac{25}{100} \cdot 150 = 37,50 \text{ €}$$

Els ingressos haurien de ser:

$$150 \text{ €} + 37,50 \text{ €} = 187,50 \text{ €}$$

El preu de cada got, hauria de ser:

$$\frac{187,50}{250} = 0,75 \text{ €}$$

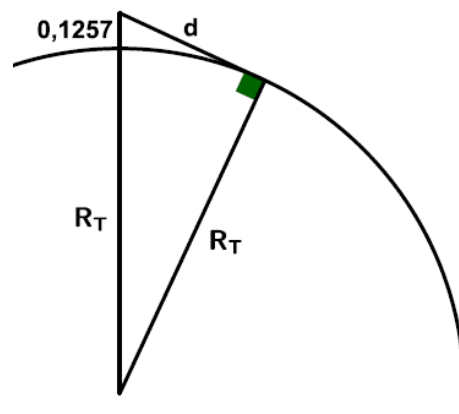
Novembre 4: Des de l'alt d'un far situat a 127,5 m sobre el nivell de la mar, es veu l'horitzó, a quina distància es troba aquest del far, sabent que una volta al món són 40.000 km?

Solució: De l'enunciat tenim:

$$2\pi R_T = 40000 \Rightarrow R_T = \frac{40000}{2\pi} = \frac{20000}{\pi}$$

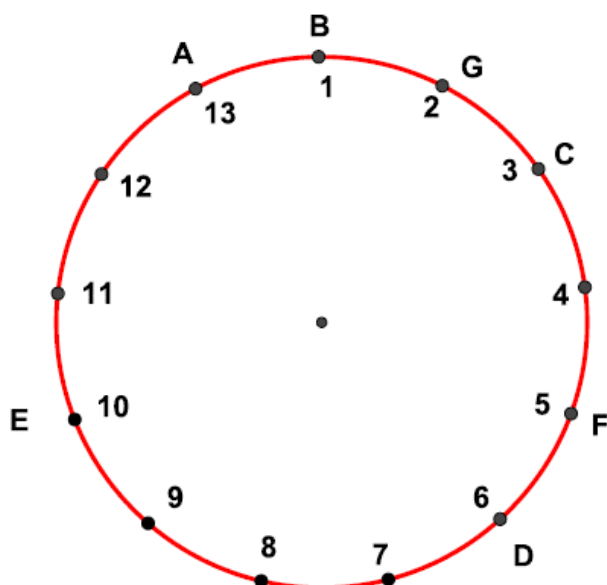
Aplicant Pitàgores:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(R_T + 0,1257)^2 - R_T^2} = \sqrt{2 \cdot R_T \cdot 0,1257 + 0,1257^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{20000}{\pi} \cdot 0,1257 + 0,1257^2} \\ &\cong 40,0059 \text{ km} \end{aligned}$$



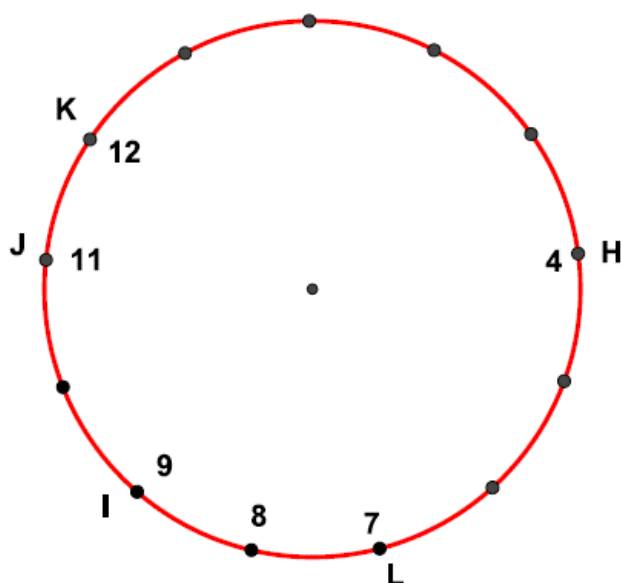
Novembre 5-6: Tenim 12 monedes de 50 cèntims d'euro i una moneda d'un euro. Les col·loquem en un cercle. Començant per la moneda que es vulga cal comptar 13 monedes cap a la dreta i la que hi haja en aqueix lloc, s'elimina. Tornem a comptar 13 monedes començant per la següent, a la nostra dreta, de la qual acabem de retirar. Repetim aquesta operació fins a deixar només una moneda. Per quina moneda hem de començar a comptar perquè l'última que retirem siga la moneda d'un euro?

Solució: Es tracta d'una variant del clàssic problema de *Josefo.



Realitzarem el joc fins que quede una única moneda. En eixa posició hem de deixar la moneda d'un euro.

Comencem per la moneda 1. Retirem la moneda 13 (A) (queden 12 monedes). Comencem a comptar per la moneda 1. Retirem la moneda 1 (B) (queden 11 monedes). Comencem a comptar per la moneda 2. Retirem la moneda 3 (C) (queden 10 monedes). Comencem a comptar per la lletra 4. Retirem la moneda 6 (D) (queden 9 monedes). Comencem a comptar per la moneda 7. Retirem la moneda 10 (E) (queden 8 monedes). Comencem a comptar per la moneda 11. Retirem la moneda 5 (F) (queden 7 monedes). Comencem a comptar per la moneda 7. Retirem la moneda 2 (G) (queden 6 monedes)



Comencem a comptar per la moneda 4. Retirem la moneda 4 (H) (queden 5 monedes). Comencem a comptar per la moneda 7. Retirem la moneda 9 (I) (queden 4 monedes). Comencem a comptar per la moneda 11. Retirem la moneda 11 (J) (queden 3 monedes). Comencem a comptar per la moneda 12. Retirem la moneda 12 (K) (queden 2 monedes): Comencem a comptar per la moneda 7. Retirem la moneda 7 (L). Eixa moneda ha de ser la moneda d'un euro. Queda una moneda que és la moneda 8

Novembre 8: Quin és el menor natural que dividit per 2, 3, 4, 5 i 6 dona, respectivament el residu 1, 2, 3, 4 i 5?

Solució: Considerem $N = \text{mcm}(2, 3, 4, 5, 6)$. Aleshores $N - 1$ dona residu 1 (2, 3, 4, 5) al ser dividit per 2 (3, 4, 5, 6). Per tant, $N - 1$ és un número que compleix el exigít en l'enunciat. Si existira un altre número p , menor que $N - 1$ que complira l'anterior tindríem:

$$p < N - 1 \Rightarrow p + 1 < N$$

però, $p + 1$ seria múltiple de 2, de 3, de 4, de 5 i de 6; contradient que N siga el més xicotet d'eixos múltiples. Tindrem llavors que $N - 1$ és el número buscat on $N = \text{mcm}(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Es adir, el número buscat és 59.

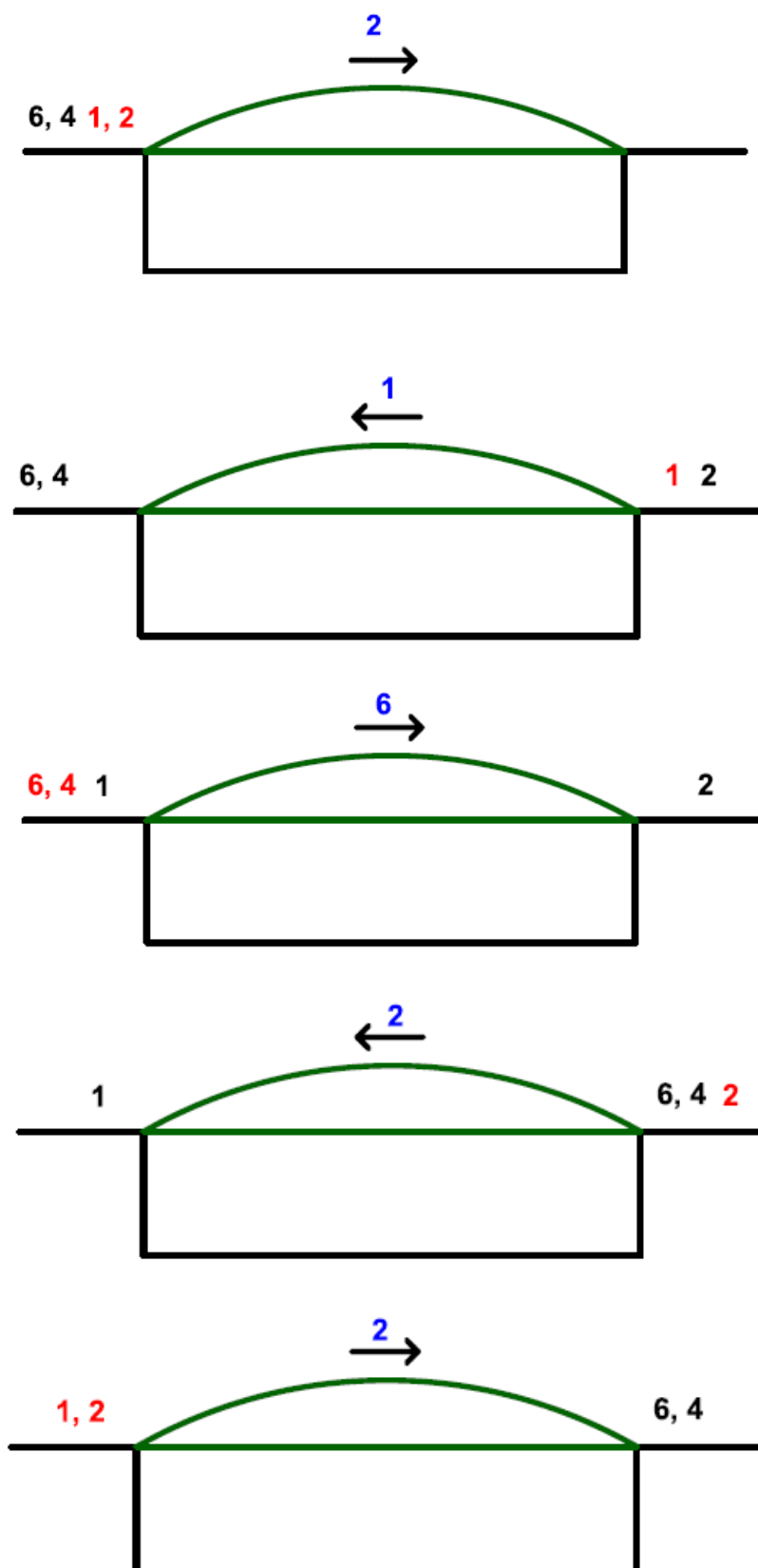
Novembre 9: Trobeu els naturals de manera que tots els seus divisors, excepte l'1, siguin nombres parells.

Solució: Per als números amb tots els seus divisors excepte el 1, nombres parells ha de complir-se que els seus divisors han de ser potències de 2. Per tant, en la descomposició factorial del número ha d'aparéixer el factor 2. Si hi haguera un altre nombre primer en la descomposició factorial del número, per exemple, p , p seria un divisor no parell del número i tots els seus divisors no serien parells. Per tant, el factor 2 ha d'aparéixer en la descomposició factorial del número i cap altre factor pot aparéixer. En definitiva, els números al·ludits en l'enunciat són les potències de 2.

Novembre 11-18: Quatre soldats ferits han de creuar un pont, seriosament danyat, a la nit per a escapar de l'enemic. El pont només suporta el pes de dos soldats alhora. Quan ho creuen dos soldats han de fer-ho a la velocitat del més lent. Els quatre soldats només tenen una llanterna que ha de ser utilitzada cada vegada que creuen el pont.

Individualment tarden 1, 2, 4 i 6 minuts a creuar el pont. Quin és el mínim temps que es necessita perquè els quatre el creuen?

Solució: El següent diagrama mostra la solució. En ell, els soldats estan representats pels minuts que tarden a creuar el pont. En roig, el parell de soldats o el soldat que creuarà a l'altra part del pont. Sobre el pont, en blau, estan els minuts que tarden a creuar el pont.



El temps per a tots els encreuaments és: $2 + 1 + 6 + 2 + 2 = 13$ minuts.

Novembre 12: Els participants d'un concurs de TV han de contestar 30 preguntes. Si encerten reben un punt. Si fallen es resta mig punt. Si no contesten reben zero punts. Si un concursant va rebre sis punts detalla les seues contestacions.

Solució: Siga x (y , z) el nombre de respostes correctes (incorrectes, no contestades). De l'enunciat, tenim:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x - \frac{y}{2} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 2x - y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ y = 2x - 12 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2x - 12 + z = 30 \Rightarrow 3x + z = 42$$

A més:

$$y = 2x - 12 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$$

$$z = 42 - 3x \geq 0 \Rightarrow \frac{42}{3} \geq x \Rightarrow 14 \geq x$$

Per tant, $x \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ i tindrem:

x correctes	$z = 42 - 3x$ no contestades	$y = 2x - 12$ incorrectes
6	24	0
7	21	2
8	18	4
9	15	6
10	12	8
11	9	10
12	6	12
13	3	14
14	0	16

Novembre 13: Una persona té una cadira de muntar valorada en 50 € i dos cavalls. Si col·loca la cadira en el primer el seu valor és el doble del segon. Si col·loca la cadira en el segon el seu valor és el triple del primer. Quin és el valor de cada cavall?

Solució: Siga x (y) el valor del primer (segon) cavall. Tindrem, segons l'enunciat:

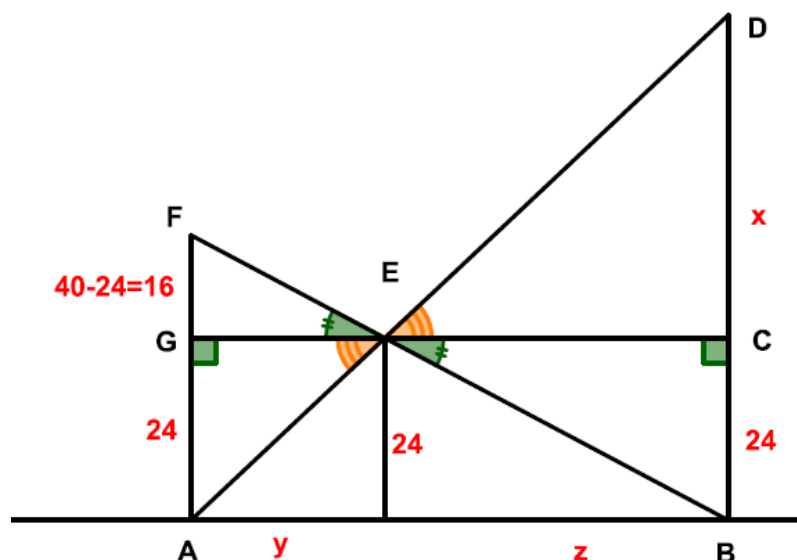
$$\left. \begin{array}{l} x + 50 = 2y \\ 3x = y + 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2y - 50 \\ 3x = y + 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x = 6y - 150 \\ 3x = y + 50 \end{array} \right\} \Rightarrow 6y - 150 = y + 50 \Rightarrow y = 40$$

$$x = 2 \cdot 40 - 50 = 30$$

És a dir, el primer cavall té un valor de 30 € i el segon cavall un valor de 40 €.

Novembre 15-22: Cadascun de dos pals verticals de diferents altures situats en un terreny pla, té un aparell, en la seua part superior, que dirigeix un raig làser a la base de l'altre pal. Si els raigs es creuen a una altura de 24 m del sòl i si el menys alt dels pals té una altura de 40 m, quina és l'altura del pal més alt?

Solució: Dibuixem la situació descrita:



Com els angles acolorits en E són oposats pel vèrtex seran iguals. Per tant:

$$\triangle GAE \approx \triangle EDC \Rightarrow \frac{24}{x} = \frac{y}{z}$$

$$\triangle FGE \approx \triangle ECB \Rightarrow \frac{24}{16} = \frac{z}{y}$$

Per tant:

$$\frac{24}{x} = \frac{16}{24} \Rightarrow x = \frac{24^2}{16} = 36$$

És a dir, el pal més alt mesura $(36 + 24 =)$ 60 metres

Novembre 16-17: Tinc dues monedes. Una té un 7 en una cara i l'altra té un 10. Si llancem les dues monedes a l'aire i sumem els resultats que apareixen en les seues cares superiors, obtenim: 11, 12, 16 i 17. Quins números poden ser els números de les dues monedes?

Solució: Suposarem que la primera moneda és $(7|x)$ i la segona moneda és $(10|y)$. Dels resultats possibles en llançar les dues monedes tindrem que els conjunts $\{7 + y, x + 10, x + y\}$ i $\{11, 12, 16\}$ han de ser iguals. És a dir: $7 + y$ pot ser qualsevol dels resultats: 11, 12 o 16; $x + 10$ serà qualsevol dels dos que queden i finalment $x + y$ serà l'últim resultat que queda. Hi ha en total $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 sistemes possibles. Analitzem cadascuna d'aquestes possibilitats:

$$\left. \begin{array}{l} 7 + y = 11 \\ x + 10 = 12 \\ x + y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 11 - 7 = 4 \\ x = 12 - 10 = 2 \\ x + y = 4 + 2 = 6 \neq 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No és possible}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 + y = 11 \\ x + 10 = 16 \\ x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 11 - 7 = 4 \\ x = 16 - 10 = 6 \\ x + y = 4 + 6 = 10 \neq 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No és possible}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 + y = 12 \\ x + 10 = 11 \\ x + y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 12 - 7 = 5 \\ x = 11 - 10 = 1 \\ x + y = 5 + 1 = 6 \neq 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No és possible}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 + y = 12 \\ x + 10 = 16 \\ x + y = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 12 - 7 = 5 \\ x = 16 - 10 = 6 \\ x + y = 5 + 6 = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Solució: } (7|6) \text{ i } (10|5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 + y = 16 \\ x + 10 = 11 \\ x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 16 - 7 = 9 \\ x = 11 - 10 = 1 \\ x + y = 1 + 9 = 10 \neq 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No és possible}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 + y = 16 \\ x + 10 = 12 \\ x + y = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 16 - 7 = 9 \\ x = 12 - 10 = 2 \\ x + y = 2 + 9 = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Solució: } (7|2) \text{ i } (10|9)$$

Novembre 19-20: Dos ascensors sense ocupants parteixen, del sisé pis d'un edifici a les dues de la vesprada i tots dos van baixant. El més ràpid tarda un minut d'anar d'un pis a un altre, mentre que el més lent tarda dos minuts. El primer ascensor que arriba a un pis haurà de parar tres minuts per a obrir portes, pujar i baixar passatgers i tancar portes. Quin ascensor arriba abans al primer pis? A quina hora arribarà cada ascensor a la planta baixa?

Solució: Farem un recorregut minuciós del descens dels dos ascensors:

0m	Ràpid	Lent
1m	Plega a P5. Para	
2m		
3m		
4m	Portes tancades en P5. Baixa	Plega a P4. Para
5m		
6m	Plega a P3. Para	
7m		Portes tancades en P4. Baixa
8m		
9m	Portes tancades en P3. Baixa	Plega a P3. No para
10m	Plega a P2. Para	
11m		Plega a P2. No para
12m		
13m	Portes tancades en P2. Baixa	Plega a P1. Para
14m	Plega a P1. No para	
15m	Plega a P0. Para	
16m		Portes tancades en P1. Baixa
17m		
18m		Plega a P0. Para

Arriba primer al primer pis l'ascensor lent a les 14 h 13m. A la planta baixa arriba el ràpid a les 14h 15 m i el lent a les 14 h 18 m.

Novembre 23: Trobeu els naturals tals que la meitat dels seus divisors siguin nombres parells i l'altra meitat nombres imparells.

Solució: Sigui N un de tals números. Llavors, en la descomposició factorial de N com a producte de nombres primers, ha d'aparèixer el factor 2 elevat a 1. Per a aquests números ($N = 2 \cdot m$) tindrem que es componen d'un número m que no conté al factor 2. Cada divisor de m : q genera dos divisors de N , el propi divisor de m : q i el divisor de N : $2 \cdot q$. Com en m no està el factor 2, tots els seus divisors són imparells. Per tant, els divisors de N seran la meitat nombres imparells i l'altra meitat nombres parells.

Novembre 24: Trobeu les parelles de capicues de quatre xifres la suma de les quals siga un capicua de cinc xifres.

Solució: Tindrem:

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & b & a \\ + & c & d & d & c \\ \hline x & y & z & y & x \end{array}$$

1.- Fixem-nos en la xifra x de les centenes de miler de la suma: Com aquesta és suma d'altres dos dígit, tenim que:

$$a \leq 9, c \leq 9 \Rightarrow c + a \leq 18 + 1 = 19 \Rightarrow x = 1$$

(perquè possiblement podrem “portar” 1 de la suma anterior).

2.- Tindrem:

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & b & a \\ + & c & d & d & c \\ \hline 1 & y & z & y & 1 \end{array}$$

Fixem-nos ara en què la suma d'unitats de miler (dels capicues de quatre xifres) més les que possiblement “portem” (1) dona $10 + y$. És a dir:

$$a + c + (1) = 10 + y \Rightarrow a + c = 10 + y - (1)$$

(on (1) indica que “possiblement portem” 1). És a dir, $a + c$ acaba en $y - (1)$. I ara, en la suma d'unitats dels dos capicues de quatre xifres: $a + c$ acaba en 1. Per tant:

$$y - (1) = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

Es a dir: $a + c = 11$ i a més, $y = 1$ o $y = 2$

3.- Suposem $y = 1$

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & & \\ & a & b & b & a \\ + & c & d & d & c \\ \hline 1 & 1 & z & 1 & 1 \end{array}$$

Llavors en sumar les desenes dels capicues de quatre xifres:

$$1 + b + d = 1 (*) \Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow b = d = 0 \Rightarrow z = 0$$

i un possible resultat és:

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & & \\ & a & 0 & 0 & a \\ + & c & 0 & 0 & c \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

i como $a + c = 11$:

a	9	8	7	6	5	4	3	2
c	2	3	4	5	6	7	8	9

Ens ixen huit casos

(*) El cas $1 + b + d = 10 + 1$, és a dir $b + d = 10$, porta a un número de cinc xifres que no és capicua:

$$\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & a & b & b & a \\
 + & c & d & d & c \\
 \hline
 1 & 2 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

4.- Suposem $y = 2$

$$\begin{array}{rcccc}
 & 1 & & & \\
 & a & b & b & a \\
 + & c & d & d & c \\
 \hline
 1 & 2 & z & 2 & 1
 \end{array}$$

Lavors en sumar les desenes i les centenes dels capicues de quatre xifres:

$$\left. \begin{array}{l} b + d + 1 = 12 \text{ (**)} \\ b + d + 1 = 10 + z \end{array} \right\} \Rightarrow b + d = 11 \text{ y } z = 2$$

Per tant, altres resultats són:

on $a + c = 11$:

$$\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & a & b & b & a \\
 + & c & d & d & c \\
 \hline
 1 & 2 & 2 & 2 & 1
 \end{array}$$

i $b + d = 11$

a	9	8	7	6	5	4	3	2
c	2	3	4	5	6	7	8	9

b	9	8	7	6	5	4	3	2
d	2	3	4	5	6	7	8	9

(**) El cas $1 + b + d = 2$, és a dir $b + d = 1$, porta a un número de cinc xifres que no és capicua:

$$\begin{array}{rcccc}
 & 1 & & & \\
 & a & b & b & a \\
 + & c & d & d & c \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 2 & 1
 \end{array}$$

En total cada parell de xifres (a, c), amb $a + c = 11$ origina $(8 + 1 =) 9$ casos per a la parella (b, d):

b	0	9	8	7	6	5	4	3	2
d	0	2	3	4	5	6	7	8	9

Hi ha en total $(8 \cdot 9 =) 72$ possibles casos.

Novembre 25-26: A casa tinc un rellotge despertador que endarrereix dos minuts cada hora, mentre que el meu rellotge de monyica avança un minut cada hora. Un cert dia pose en hora els dos rellotges i isc de casa.

En tornar el rellotge de la meua monyica marca les 12 de la nit i en canvi, en el despertador eren les 11 de la nit. Quant temps vaig estar fora de casa? Quina era l'hora exacta quan entre a casa?

Solució: Cada hora que passa hi ha una discrepància de tres minuts entre els dos rellotges. Com en tornar a casa, la discrepància entre ells és de 60 minuts, han passat:

$$\left(\frac{60}{3} =\right) \text{ 20 hores}$$

En entrar a casa el meu rellotge (que avança un minut per hora) marca les 24.00 hores. Com porta un avançament de 20 minuts són, exactament, les **23.40**

Novembre 27: El producte d'un número de dues xifres per les seues pròpies xifres dona 1950. Trobeu aquest número.

Solució: Si $10 \cdot a + b$ és el nombre buscat, tindrem:

$$1950 = \begin{cases} = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \\ = (10a + b) \cdot a \cdot b \end{cases}$$

Acabarem el problema escrivint els factors primers de 1950 com un producte de tres factors, dos d'ells d'una xifra i un altre de dues xifres que siguen els factors unitaris.

Per simple manipulació dels factors primers:

$$1950 = \begin{cases} = 6 \cdot 5 \cdot (5 \cdot 13) = 6 \cdot 5 \cdot 65 \\ = (10a + b) \cdot a \cdot b \end{cases}$$

Per tant, hi ha un únic número que compleix l'enunciat: el 65.

Novembre 29-30: Col·loca 1 o -1 , en cada casella d'una quadrícula 4×4 perquè el producte de tots els números d'una fila o una columna siga sempre -1 . Quina és la mínima i màxima quantitat de -1 que hem de posar? Quines serien aquestes quantitats en una quadrícula $n \times n$?

Solució: Si el producte dels números de cada fila o columna ha de donar -1 , almenys ha d'haver-hi un -1 en cada fila i columna. I això és possible posant un -1 en cada casella de la diagonal principal o secundària. També és possible de moltes altres formes

1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1
-1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1	

1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
-1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1	

1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1	

-1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1	

El número màxim de -1 s'obté posant en cada fila o columna un total de tres -1 i un 1 .I això s'aconsegueix canviant en cadascuna de les solucions de l'apartat anterior, cada 1 per -1 i cada -1 per 1 . Per exemple, per a la primera solució de l'apartat anterior tindrem la figura adjunta.

Es poden col·locar un màxim de $(4 \cdot 4 - 4 =) 12$ números -1

-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	

Si la quadrícula és de dimensió $n \times n$ el número mínim de -1 que podem col·locar és n (per exemple, col·locar un -1 en cada casella de la diagonal principal o de la diagonal secundària.

El nombre màxim de cel·les amb -1 , és

:

$$\begin{aligned}
 n \text{ imparell} &\Rightarrow n^2 \text{ (totes las caselles poden tenir } -1) \\
 n \text{ parell} &\Rightarrow \begin{cases} \text{en totes las caselles excepte una en cada} \\ \text{fila o en cada columna, es a dir, excepte} \\ \text{en } n \text{ caselles} \Rightarrow n^2 - n = n \cdot (n - 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$