

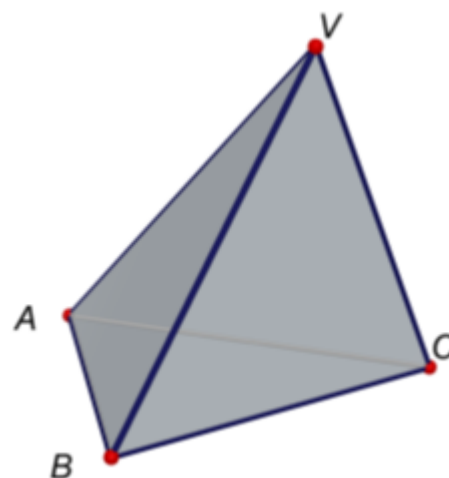
SOLUCIONS FEBRER 2022

PROBLEMES PER A UTILITZAR PROGRAMES GEOMÈTRICS. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

Febrer 1-2: La base d'un tetràedre és un triangle equilàter, i les tres cares laterals desplegades i posades en un plànel formen un trapezi de costats 10, 10, 10 i 14 unitats de longitud.

Calculeu la suma de les longituds de totes les arestes del tetràedre i també determineu la seua àrea.

KöMaL C1559.



Solució: Siga ABCV el tetràedre de base el triangle equilàter de costats 10, ja que el desenvolupament té tres costats iguals a 10.

Siga el trapezi isòsceles AA'CB format pel desenvolupament de les cares laterals.

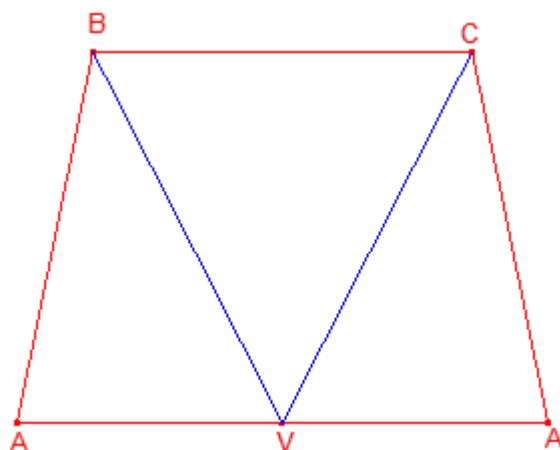
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA'} = 10$ arestes de la base del tetràedre,
 $\overline{AA'} = 14$

El vèrtex V del tetràedre és el punt mig del segment $\overline{AA'}$

$$\overline{AV} = 7$$

Siguen $\overline{BV} = \overline{CV} = a$ les altres dues arestes. Siga P la projecció de B sobre $\overline{AA'}$

$$\overline{PV} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 5.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle BPV

$$a = 11$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle APB

$$\overline{BP} = 4\sqrt{6}$$

La suma de les longituds de les arestes són:

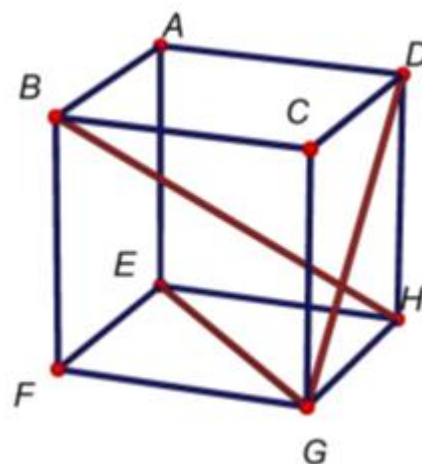
$$L_{\text{arestes}} = 3\overline{AB} + 2a + \overline{AV} = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 7 = 59 \text{ u}$$

L'àrea del tetràedre és:

$$S_{ABCV} = S_{ABC} + S_{AA'CB} = \frac{\sqrt{3}}{4} 10^2 + \frac{14 + 10}{2} \cdot 4\sqrt{6} = 25\sqrt{3} + 48\sqrt{6}$$

Febrer 3-4: Siga el cub ABCDEFGH, d'aresta 1.

- Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$.
- Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$.
- Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular al pla EDG.
- Calculeu la intersecció de $\overline{BH}$ i el pla EDG.
- Calculeu la distància de $\overline{BH}$ al pla EDG



Solució 1:

Considerem el cub amb les següents coordenades:

$E(0, 0, 0)$, $F(1, 0, 0)$, $H(0, 1, 0)$, $G(1, 1, 0)$

$A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 1)$, $D(0, 1, 1)$, $C(1, 1, 1)$.

$\overrightarrow{BH} = (-1, 1, -1)$; $\overrightarrow{EG} = (1, 1, 0)$; $\overrightarrow{GD} = (-1, 0, 1)$;

A) Vegem que els vectors $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{EG}$ són ortogonals.

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{EG} = 0.$$

Aleshores, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$.

B) Vegem que els vectors $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{GD}$ són ortogonals.

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{GD} = 0.$$

Aleshores, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$.

C) L'equació del pla que conté EDG és:

$$\Pi_{EDG} \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Simplificant:

$$\Pi_{EDG} \equiv x - y + z = 0$$

El vector característic del pla és $a = (1, -1, 1)$ és el linealment dependent del vector $\overrightarrow{BH} = (-1, 1, -1)$. Aleshores, $\overline{BH}$ és perpendicular al pla EDG.

D) L'equació de la recta que passa per B, H té equació:

$$r_{BH} \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \alpha(-1, 1, -1)$$

$$(x, y, z) = (1 - \alpha, \alpha, 1 - \alpha)$$

Substituint les coordenades d'un punt qualsevol de la recta en el pla:

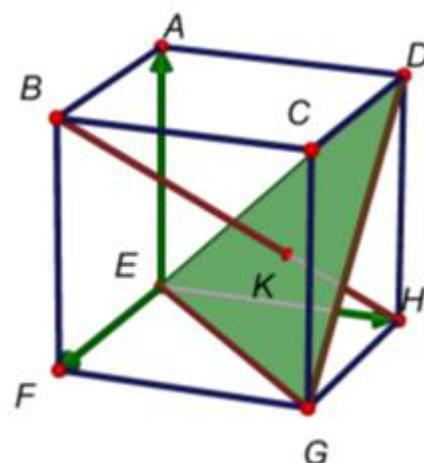
$$(1 - \alpha) - \alpha + (1 - \alpha) = 0$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

El punt intersecció de $\overline{BH}$ i el pla EDG és:

$$K\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



E) La distància de B al plànel EDG és igual a la distància de B a K.

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

O bé la distància del punt al plànel DEG:

$$d = \left| \frac{1 - 0 + 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Solució 2:

A) $\overline{BF}$ és perpendicular al plànel AGHE.

Aleshores, $\overline{BF}$ és perpendicular a $\overline{EG}$. $\overline{FH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$, diagonals del quadrat EGGH.

Aleshores, el plànel BFH és ortogonal a $\overline{EG}$. Per tant, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$.

B) $\overline{BC}$ és perpendicular al plànel CGHD. Aleshores, $\overline{BC}$ és perpendicular a $\overline{GD}$. $\overline{CH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$, diagonals del quadrat CGHD. Aleshores, el plànel BCH és perpendicular a $\overline{GD}$. Per tant, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$.

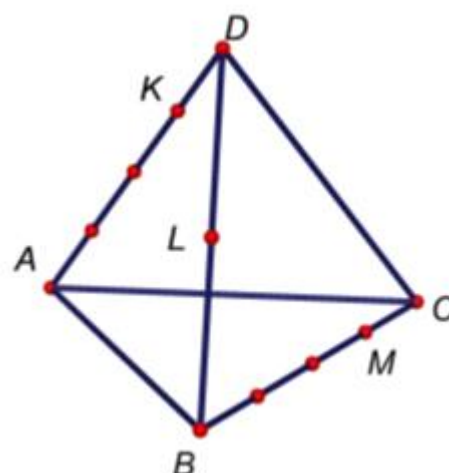
C) $\overline{BH}$ és perpendicular al plànel DEG ja que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$ i $\overline{GD}$.

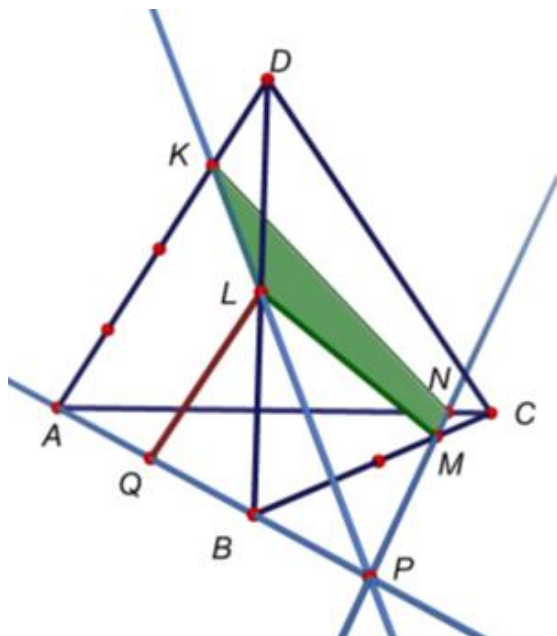
D) Notem que BDEG és un tetràedre regular ja que totes les arestes són iguals a les diagonals de les cares del cub. $\overline{BH}$ és l'altura del tetraedre i el seu peu és K el baricentre del triangle equilàter $\triangle DEG$.

E) $\overline{DK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\overline{BD} = \sqrt{2}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BDK$

$$d = \overline{BK} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Febrer 5-12: Siga el tetràedre ABCD d'aresta 1. Siga K el punt de l'aresta $\overline{AD}$, tal que $\overline{AK} = 3 \cdot \overline{DK}$. Siga L el punt mig de l'aresta $\overline{BD}$. Siga M el punt de l'aresta $\overline{BC}$ tal que $\overline{BM} = 3 \cdot \overline{CM}$. Calculeu l'àrea de la secció del tetràedre determinada pel plànel que passa pels punts K, L, M.




Solució:

$$\overline{AK} = \overline{BM} = \frac{3}{4}, \overline{DK} = \overline{CM} = \frac{1}{4}, \overline{BL} = \overline{DL} = \frac{1}{2}$$

Les rectes AB, KL s'intersecten en el punt P. La recta PM talla l'aresta $\overline{AC}$ en el punt N. La secció és el quadrilàter KLMN.

$$\overline{DK} = \frac{1}{4}, \overline{DL} = \frac{1}{2}, \angle KDL = 60^\circ$$

Per tant, $\angle DKL = 90^\circ$. Aleshores, $\overline{KL} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle LBM

$$\overline{LM}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 2 \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{2}$$

$$\overline{LM} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Els triangles $\triangle KAP$, $\triangle LQP$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \overline{BP}}{\frac{1}{2} + \overline{BP}}$$

Resolent l'equació: $\overline{BP} = \frac{1}{2}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle BPM$

$$\overline{PM}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 2 \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{2}$$

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{19}}{4}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle LBP$

$$\overline{PL}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\overline{LM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Notem que $\overline{PM}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{PL}^2$. Aleshores, $\angle MLP = 90^\circ$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MLP$

$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Siga $\angle BMP = \alpha$. Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle BMP$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{19}}{4}}{\sin 120^\circ}$$

Aleshores, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{57}}{19}$, $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{19}}{19}$. Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle MCN$

$$\frac{\overline{MN}}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{1}{4}}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{\overline{CN}}{\sin \alpha}$$

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{19}}{20}, \overline{CN} = \frac{1}{10}$$

$$\overline{AN} = \frac{9}{10}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AKN$

$$\overline{KN}^2 = \frac{81}{100} + \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{KN} = \frac{3\sqrt{31}}{20}$$

Siga $\angle KNM = \beta$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle KNM$

$$\frac{10}{16} = \frac{19}{400} + \frac{279}{400} - 2 \cdot \frac{\sqrt{19}}{20} \cdot \frac{3\sqrt{31}}{20} \cos \beta$$

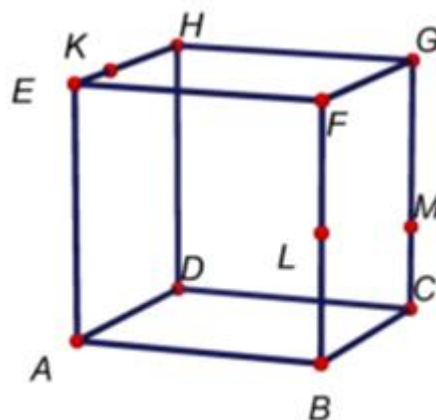
$$\cos \beta = \frac{8\sqrt{31}}{589}, \sin \beta = \frac{5\sqrt{651}}{589}$$

L'àrea del quadrilàter KLMN és:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} \overline{KL} \cdot \overline{ML} + \frac{1}{2} \overline{KN} \cdot \overline{MN} \cdot \sin \beta$$

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{31}}{20} \cdot \frac{\sqrt{19}}{20} \cdot \frac{5\sqrt{651}}{589} = \frac{\sqrt{21}}{32} + \frac{3\sqrt{399}}{3040}$$

Febrer 7-8: Siga ABCDEFGH d'aresta $\overline{AB} = 1$. Siga K de l'aresta $\overline{EH}$ tal que $\overline{HK} = 2 \cdot \overline{EK}$. Siga L el punt mig de l'aresta $\overline{BF}$. Siga M de l'aresta $\overline{CG}$ tal que $\overline{GM} = 2 \cdot \overline{CM}$. Determineu els costats de la secció del cub que determina el plànol que passa pels punts K, L, M.



Solució: Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{CG}$

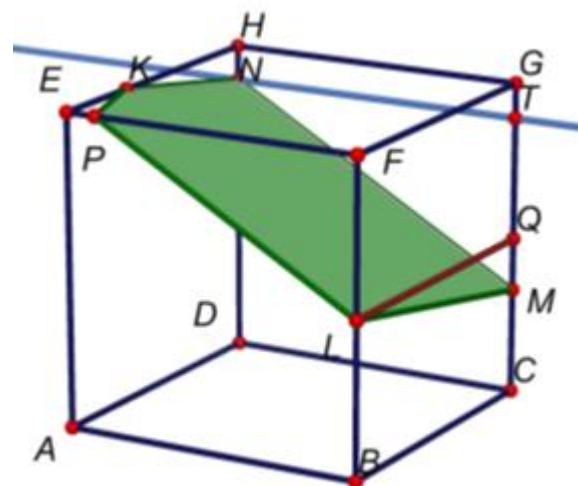
$$\overline{QM} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\overline{LM} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

Els triangles $\triangle LQM$, $\triangle KHN$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{HN}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2}{3}}, \overline{HN} = \frac{1}{9}$$

$$\overline{KN} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{9}$$



Siga T la projecció de N sobre l'aresta $\overline{CG}$

$$\overline{MT} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{106}}{9}$$

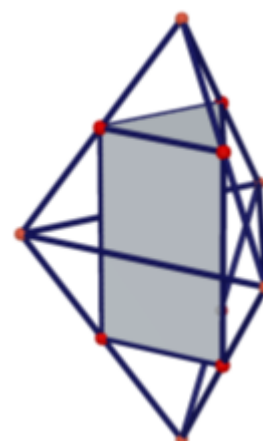
Els triangles $\triangle NTM$, $\triangle PEL$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PF}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}}, \overline{PF} = \frac{9}{10}, \overline{PE} = \frac{1}{10}$$

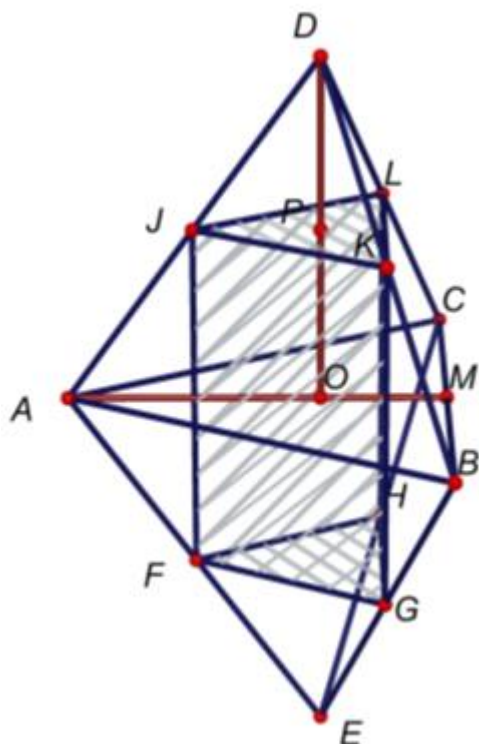
$$\overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{106}}{10}$$

$$\overline{KP} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{109}}{30}$$

Febrer 9-16: Dos tetràedres regulars estan units per una cara. Determineu la proporció dels volums del prisma de vèrtex els punts migs de les arestes dels tetràedres i la suma dels dos tetràedres



Solució: Siguen els tetràedres regulars $ABCD, ABCE$ d'aresta $\overline{AB} = a$. Siga O el centre de la base comuna $\triangle ABC$. Siga $\overline{OD} = h$. Siga el prisma regular $FGHJKL$ d'aresta de la base $\overline{JK} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$. La recta OD talla la base del prisma JKL en el punt P . Siga $\overline{OP} = x$. L'altura del prisma és $2x$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AOD$

$$a^2 = \frac{1}{3}a^2 + \overline{OD}^2$$

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\overline{OP} = x = \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_{KLM} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2$$

El volum de la suma dels dos tetràedres és:

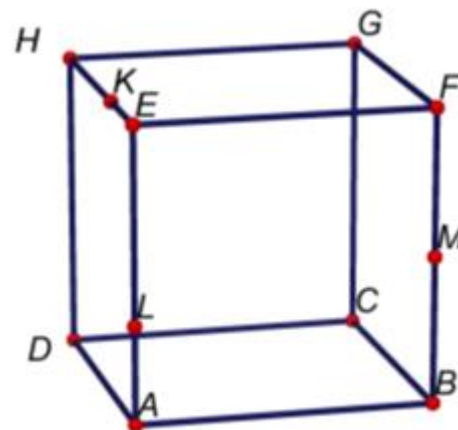
$$V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

El volum del prisma és:

$$V_{FGHJKL} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2 \cdot 2 \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{2}}{16}a^3$$

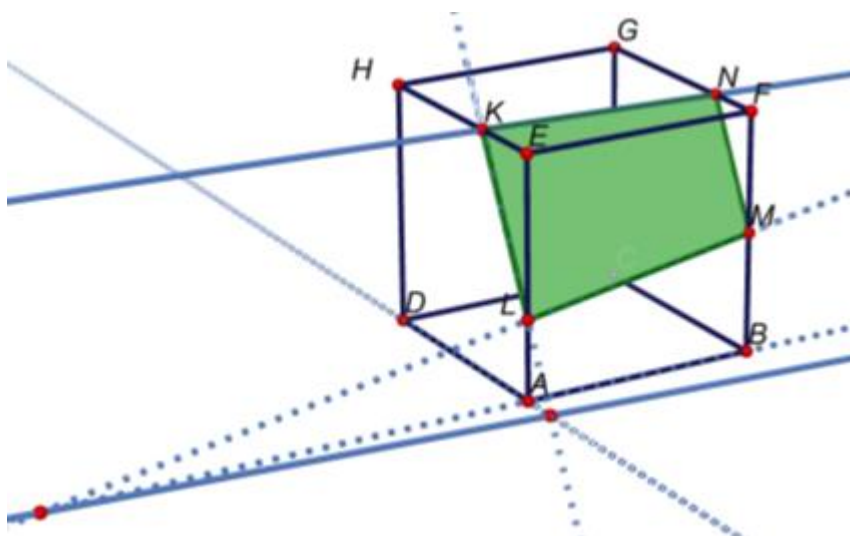
La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{FGHJKL}}{V_{ABCDE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{16}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}a^3} = \frac{3}{8}$$



Febrer 10-11: Siga ABCDEFGH d'aresta $\overline{AB} = 1$. Siga K de l'aresta $\overline{EH}$ tal que $\overline{HK} = 2 \cdot \overline{EK}$. Siga L de l'aresta $\overline{AE}$ tal que $\overline{EL} = 2 \cdot \overline{AL}$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BF}$. Determineu el perímetre i l'àrea de la secció del cub que determina el plànel que passa pels punts K, L, M.

Solució:



La secció és el trapezi KLMN on N pertany a l'aresta $\overline{FG}$.

$$\overline{EK} = \overline{AL} = \frac{1}{3}, \overline{MF} = \frac{1}{2}$$

Els triangles $\triangle L\overline{EK}$, $\triangle M\overline{FN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FN}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}, \overline{FN} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{KL} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\overline{LM} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$\overline{KN} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{145}}{12}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

El perímetre del trapezi KLMN és:

$$P_{KLMN} = \frac{7\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{37}}{6} + \frac{\sqrt{145}}{12}$$

Siga P la projecció de M sobre $\overline{KL}$. Siga Q la projecció de N sobre $\overline{KL}$. Siga $x = \overline{PQ}$, aleshores, $\overline{KQ} = \frac{\sqrt{5}}{12} - x$. Siga $h = \overline{PM}$ altura del trapezi KLMN.. Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles MPL, NQK

$$h^2 = \frac{37}{36} - x^2$$

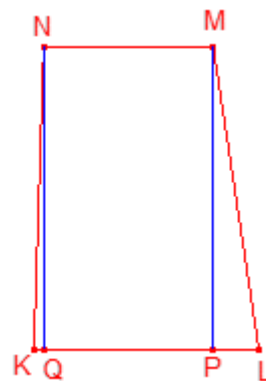
$$h^2 = \frac{145}{144} - \left(\frac{\sqrt{5}}{12} - x\right)^2$$

Resolent el sistema format per les dues equacions:

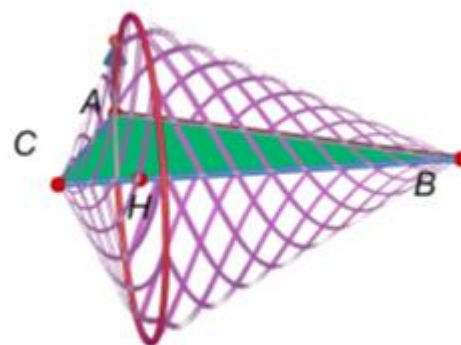
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{15} \\ h = \frac{\sqrt{905}}{30} \end{cases}$$

L'àrea del trapezi KLMN és:

$$S_{KLMN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} \frac{\sqrt{905}}{30} = \frac{7\sqrt{181}}{144}$$

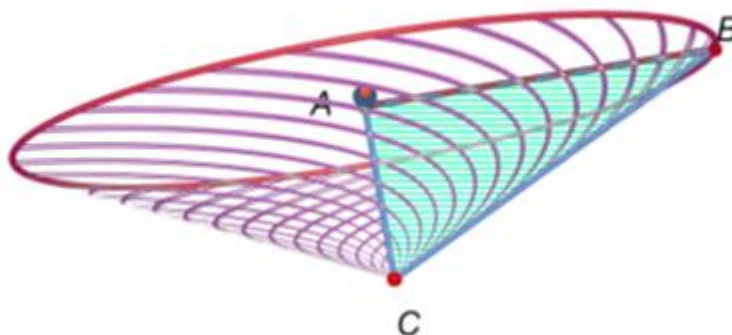


Febrer 14-15: La hipotenusa d'un triangle rectangle és 5. Determineu la mesura dels catets sabent que els volums engendrats pel triangle al girar al voltant dels catets són un el doble que l'altre. Calculeu el volum dels dos cons. Determineu el volum del doble con engendrat pel triangle al girar sobre la hipotenusa.



Solució: Siga el triangle rectangle ABC d'hipotenusa $\overline{BC} = 5$. Siga V_b el volum de con generat al girar el triangle sobre el catet $b = \overline{AC}$. El radi és $c = \overline{AB}$. El volum és:

$$V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$$



Suposem que el volum V_b és el doble que el volum V_c

$$\frac{1}{3}\pi c^2 b = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi b^2 c$$

Simplificant: $c = 2b$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$b^2 + (2b)^2 = 5^2$$

Resolent l'equació:

$$b = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{5}$$

Els volums dels cons són:

$$V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b = \frac{\pi}{3} 20\sqrt{5} = 46.83$$

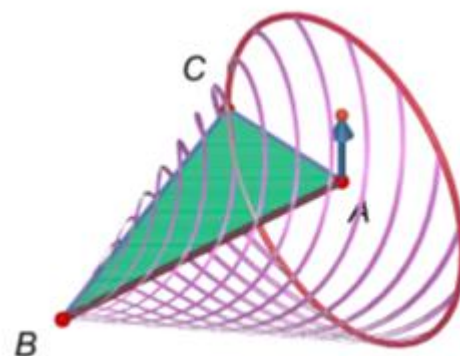
$$V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c = \frac{\pi}{3} 10\sqrt{5} = 23.42$$

El radi dels dos cons, que estan engendrats per la rotació del triangle rectangle sobre la hipotenusa, és igual a l'altura del triangle sobre la hipotenusa. Siga $h = \overline{AH}$ l'altura sobre la hipotenusa. L'àrea del triangle rectangle $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{5h}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2}$$

Resolent l'equació: $h = 2$. El volum del doble con és:

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot 5 = \frac{20\pi}{3} \approx 20.94$$

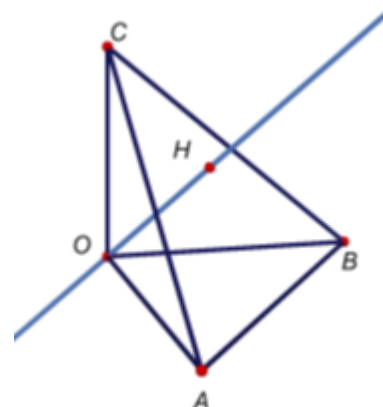


Febrer 17-24: Les arestes que ixen del vèrtex O del tetraedre OABC són perpendiculars dos a dos.

Demostreu que la projecció ortogonal H de O sobre la cara $\triangle ABC$ és l'ortocentre del triangle $\triangle ABC$.

Proveu que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Demostreu que el simètric de O respecte del baricentre del tetraedre és el centre de l'esfera circumscrita al tetraedre.



Solució: Considerem el tetraedre OABC en les següents coordenades cartesianes:

$$O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) \quad \overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c).$$

L'equació implícita del pla que conté els punts A, B, C és:

$$\Pi_{ABC} \equiv \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificant: $\Pi_{ABC} \equiv bcx + acy + abz - abc = 0$.

El vector normal és: $v = (bc, ac, ab)$.

La recta OH té equació: $r_{OH} \equiv (x, y, z) = \alpha(bc, ac, ab)$.

Resolent el sistema format per la recta i el plànel, de terminem les coordenades del punt H. Les seues coordenades són:

$$H \left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \right).$$

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} (ab^2c^2, a^2bc^2, -b^2c^3 - a^2c^3).$$

Vegem que $\overrightarrow{CH}$ és ortogonal a $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$. Calculem el seu producte escalar:

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} (ab^2c^2, a^2bc^2, -b^2c^3 - a^2c^3) \cdot (-a, b, 0) = 0.$$

Anàlogament, $\overrightarrow{AH}$ és ortogonal a $\overrightarrow{BC}$. Aleshores, H és l'ortocentre del triangle $\triangle ABC$.

Anem per la segon afirmació

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} (ab^2c^2, a^2bc^2, a^2b^2c).$$

$$\|\overrightarrow{OH}\| = \frac{1}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \|(ab^2c^2, a^2bc^2, a^2b^2c)\| = \frac{abc}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{OH}\|} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}. \quad \frac{1}{\|\overrightarrow{OH}\|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \quad \frac{1}{\|\overrightarrow{OA}\|^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{\|\overrightarrow{OB}\|^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{1}{\|\overrightarrow{OC}\|^2} = \frac{1}{c^2}.$$

$$\text{Aleshores, } \frac{1}{\overrightarrow{OH}^2} = \frac{1}{\overrightarrow{OA}^2} + \frac{1}{\overrightarrow{OB}^2} + \frac{1}{\overrightarrow{OC}^2}.$$

Anem per la tercer afirmació. El baricentre G_O de la cara $\triangle ABC$ té coordenades:

$$G_O \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3} \right).$$

El baricentre G del tetraedre pertany al segment $\overline{OG_O}$ tal que $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{OG_O}$. Siga $G(x, y, z)$.

$(x, y, z) = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3} \right)$. Les coordenades del baricentre del tetraedre són:

$$G \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4} \right).$$

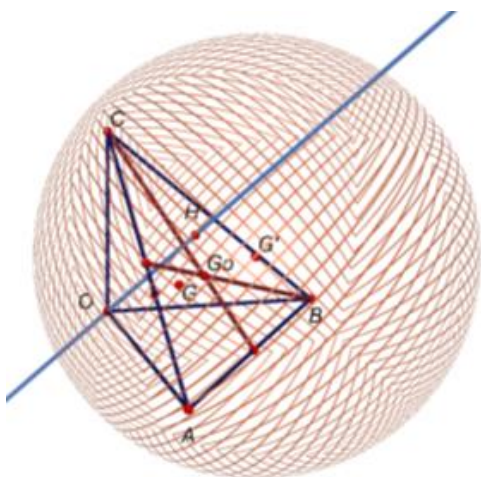
Siga $G'(x, y, z)$ el simètric de O respecte de G.

$$\overrightarrow{OG'} = 2 \cdot \overrightarrow{OG}.$$

$(x, y, z) = 2 \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4} \right)$. Les coordenades de G' són:

$$G' \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right).$$

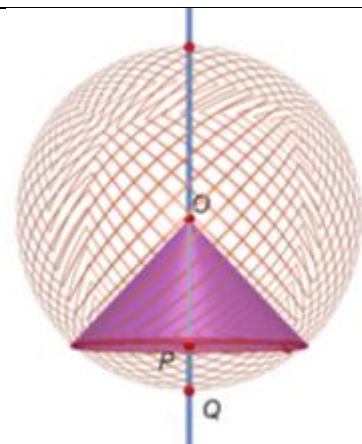
Notem que $\overline{G'O} = \overline{G'A} = \overline{G'B} = \overline{G'C} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, aleshores G' és el centre de l'esfera circumscrita al tetraedre OABC



Febrer 18-19: Una esfera de radi r té inscrit un con que té el vèrtex en el centre de l'esfera i d'angle 2α en el vèrtex.

Determineu l'àrea i el volum de la zona de l'esfera que talla el con.

Problema proposat per Joan Galiana, alumne i matemàtic



Solució: Per a l'àrea, tenim: El con talla l'esfera en dos casquets esfèrics. Considerarem el menor. (El major seria fàcil de calcular a partir la diferència entre de la superfície de l'esfera i el casquet menor). Siga l'eix de simetria del con que talla l'esfera en el punt Q i passa pel centre de la base del con P. Siga $h = \overline{PQ}$ altura del casquet. L'àrea del casquet és:

$$S_{\text{casquet}} = 2\pi r \cdot h. \quad \overline{OP} = r \cdot \cos \alpha. \quad \overline{PQ} = (1 - \cos \alpha) r.$$

L'àrea del casquet és:

$$S_{\text{casquet}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi(1 - \cos \alpha)r^2.$$

Per al volum, tenim: El con determina dos parts un casquet i el mateix con i l'altra part que és el que resta de l'anterior. El volum del casquet és:

$$V_{\text{casquet}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

$$V_{\text{casquet}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi}{3} (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) r^3.$$

El radi del con és: $s = r \cdot \sin \alpha$. L'altura del con és $t = \overline{OP} = r \cdot \cos \alpha$. El volum del con és:

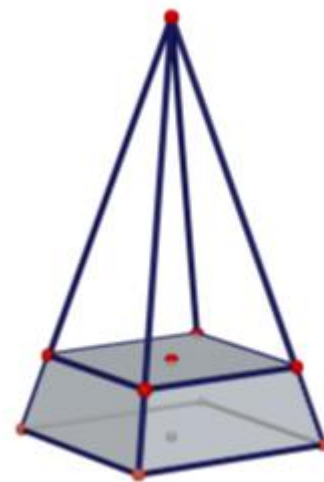
$$V_{\text{casquet}} = \frac{1}{3} \pi s^2 t = \frac{1}{3} \pi \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot r^3.$$

El volum de la part inferior és:

$$V_{\text{total}} = V_{\text{casquet}} + V_{\text{con}} = \frac{\pi}{3} \left((1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) r^3 + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \right) r^3$$

Febrer 21-28: L'altura d'una cara lateral d'una piràmide regular quadrangular és el doble que l'aresta de la base.

Quin percentatge d'aquesta alçada de la piràmide (comptant des de la base hem de tallar amb un plànol paral·lel a la base de manera que l'àrea total de la superfície lateral més el quadrat superior del tron de piràmide resultant siga igual a la meitat de la superfície lateral de la piràmide original.



Solució: Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base de la piràmide $ABCDV$. Siga $\overline{MV} = 2a$ altura d'una cara lateral. Siga el tron de piràmide $ABCDPQRS$. Siga $\overline{PQ} = b$ aresta de la cara superior del tron. Siga O el centre de la base $ABCD$. Siga K el centre de la base $PQRS$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle VMO$. L'altura de la piràmide és:

$$H = \overline{VM} = \frac{\sqrt{15}}{2}a.$$

L'àrea lateral de la piràmide és:

$$S_L = 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 2a = 4a^2$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{PQ}$. Les piràmides $ABCDV, PQRSV$ són semblants. Aleshores:

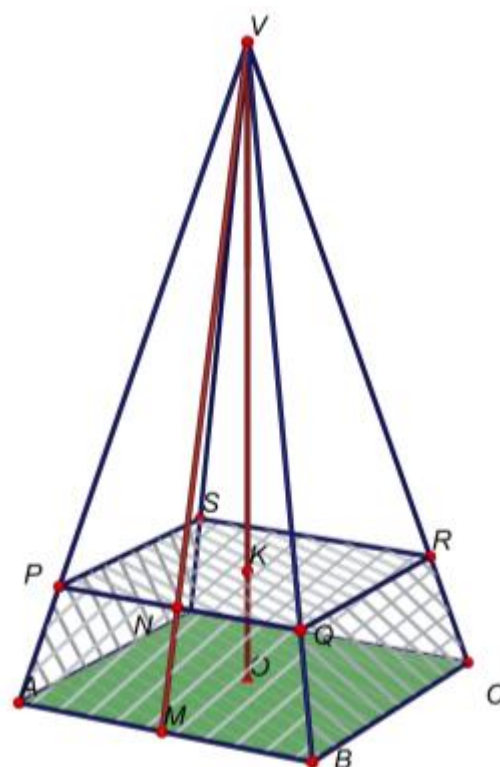
$$\overline{NV} = 2b$$

L'altura del trapezi $ABQP$ és $\overline{MN}$.

$$\overline{MN} = 2(a - b)$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABQP} = \frac{a + b}{2} \cdot 2(a - b)$$



L'àrea de la superfície lateral més el quadrat superior del tron de piràmide és: $S_2 = 4(a + b)(a - b) + b^2$
l'àrea total de la superfície lateral més el quadrat superior del tron de piràmide resultant

$$S_2 = \frac{1}{2}S_L$$

$$4(a + b)(a - b) + b^2 = 2a^2$$

Simplificant:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

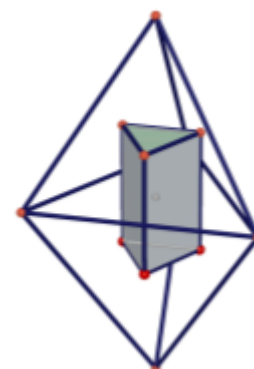
Siga $h = \overline{OK}$ altura del tron de piràmide. Les piràmides $ABCDV, PQRSV$ són semblants. Aleshores,

$$\frac{b}{a} = \frac{H-h}{H}$$

$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.1835$$

Es a dir talla la piràmide inicial a un 18.35% de la seua altura.

Febrer 22-23: Donat el doble tetràedre regular, determineu la proporció entre els volums del poliedre dual (prisma de vèrtexs els centres de les 6 cares) i del doble tetràedre regular



Solució: Siguen els tetràedres regulars $ABCD, ABCE$ d'aresta $\overline{AB} = a$. Siga O el centre de la base comuna $\triangle ABC$. Siga $\overline{OD} = h$. Siga el prisma regular $FGHJKL$ tal que els vèrtexs són els baricentres de les cares. La recta OD talla la base del prisma $\triangle JKL$ en el punt S . Siga $\overline{OS} = x$. L'altura del prisma és $2x$. El plànol que conte la base $\triangle JKL$ talla les arestes del tetràedre $ABCD$ en els punts P, Q, R . Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AOD$

$$a^2 = \frac{1}{3}a^2 + \overline{OD}^2$$

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

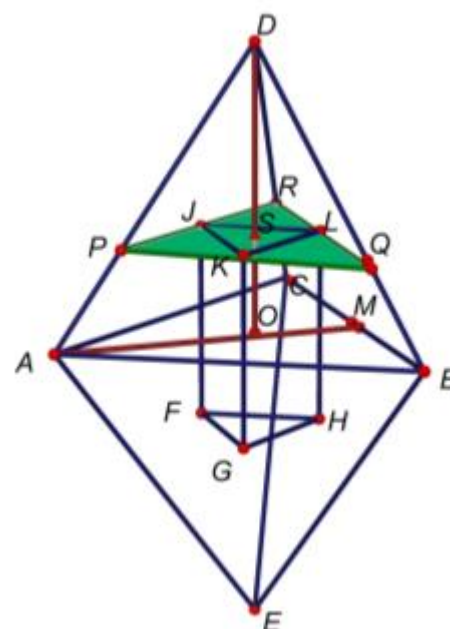
El volum de la suma dels dos tetràedres és:

$$V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

Els triangles equilàters $\triangle ABD, \triangle PQD$ són semblants i de raó 3:2. Aleshores:

$$\overline{PQ} = \frac{2}{3}a$$

$$S_{JKL} = \frac{1}{4}S_{PQR} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2$$



Els triangles rectangles $\triangle AOD$, $\triangle PSD$ són semblants i de raó 3:2. Aleshores:

$$\overline{OS} = \overline{OD} - \overline{SD} = \frac{1}{3}\overline{OD} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{9}a$$

El volum del prisma és:

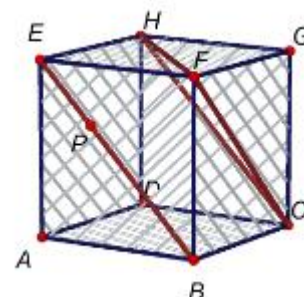
$$V_{FGHJKL} = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2 \cdot 2\frac{\sqrt{6}}{9}a = \frac{\sqrt{2}}{54}a^3$$

La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{FGHJKL}}{V_{ABCDE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{54}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}a^3} = \frac{1}{9}$$

Febrer 25-26: Siga ABCDEFGH un cub d'aresta 1. Siga P un punt del segment $\overline{BE}$ tal que $\overline{EP} : \overline{BE} = 1 : 3$.

Calculeu la distància del punt P al plànol que determinen els vèrtexs C, F, H del cub.



Solució: La distància del punt P al plànol que determina els punts C, F, H és igual al plànol que conté la recta BE i és paral·lel a l'anterior. És a dir, el plànol que conté els punts B, E, T (on T és el vèrtex d'un cub adossat a l'anterior, veure figura). Notem que la diagonal AG és perpendicular als dos plànols. Siga h l'altura del tetraedre CFHG sobre la base CFG.

El volum del tetraedre CFHG és:

$$V_{\text{Tetraedre}} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \overline{CG}^2 = \frac{1}{3} S_{CFH} \cdot h.$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 \cdot h.$$

Resolent l'equació:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

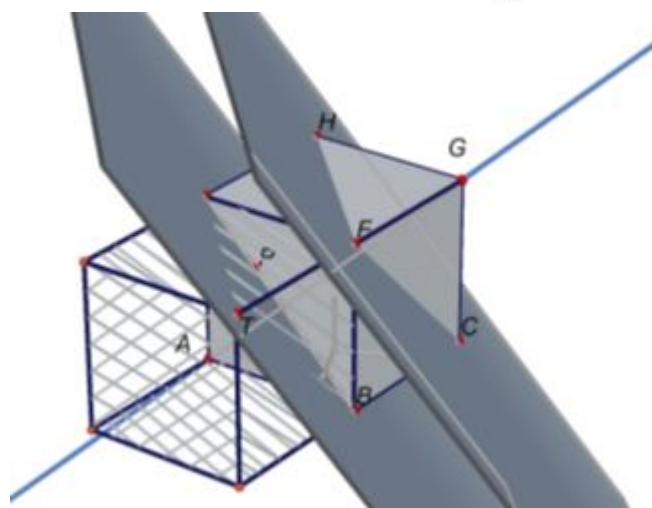
La distància entre els dos plànols és:

$$d = \overline{AG} - 2h = \sqrt{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Solució 2: Siga el cub amb les següents coordenades:

A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0). E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1), H(0,1,1).

Les coordenades de P són:



$$P\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{FH} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{FC} = (0, 1, -1).$$

L'equació general del plànot que passa pels punts C, F, h és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificant: $\Pi \equiv x + y + x - 2 = 0$.

La distància de P al plànot és:

$$d(P, \Pi) \equiv \frac{\left| \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} - 2 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$