

SOLUCIONS MAIG 2022

PROBLEMES PER A LA PREPARACIÓ DE LA OLIMPIADA DE 3r. I 4t. D'ESO. ORGANITZADA POR LA FESPM EN 2004. ORGANITZACIÓ: JOSÉ COLÓN LACALLE. Professor jubilat.

Maig 2-3: Les germanes Laia i Aitana escriuen les seues edats, una a continuació de l'altra, i obtenen un número de quatre dígit que és el quadrat de l'edat del seu pare. Nou anys més tard tornen a escriure les seues edats de la mateixa forma i torna a ocórrer que és el quadrat de l'edat del seu pare. Quina és l'edat de Laia, Aitana i el seu pare?

Solució: Siga AB l'edat de la primera germana i CD l'edat de la segona germana. Si P és l'edat del pare, tindrem, segons l'enunciat:

$$\overline{ABCD} = \overline{AB} \cdot 100 + \overline{CD} = P^2 \quad (1)$$

I, nou anys més tard, tindrem:

$$(\overline{AB} + 9) \cdot 100 + (\overline{CD} + 9) = (P + 9)^2$$

Desenvolupant aquesta última equació tenim:

$$\overline{AB} \cdot 100 + 900 + \overline{CD} + 9 = P^2 + 18P + 81$$

i tenint en compte l'equació (1), arribem:

$$909 = 18P + 81 \Rightarrow P = \frac{909 - 81}{18} = 46$$

És a dir, el pare té 46 anys. Finalment, com:

$$46^2 = 2116$$

l'edat de Laia és 21 anys i la d'Aitana 16 anys.

Maig 4: Disposem de dos rellotges d'arena, un de 7 minuts i un altre d'11 minuts. Quin és el mètode més ràpid per a controlar la cocció d'un guisat que ha de durar 15 minuts?

Solució: Posem a funcionar simultàniament, els dos rellotges. Quan el de 7 minuts acabe, encenem el foc. Quan acabe el rellotge d'11 minuts hauran transcorregut $(11 - 7 =)$ 4 minuts de cocció. Tornem a deixar funcionar el rellotge d'11 minuts. Quan aquest acabe, hauran transcorregut $(4 + 11 =)$ 15 minuts de cocció.

Maig 5-6: El poble de Benirredrà té un conjunt molt estrany de límits de velocitat. A un quilòmetre del centre del poble hi ha un avís que resa 120 Km/h, a $\frac{1}{2}$ quilòmetre del centre, un avís diu 60 km/h, a $\frac{1}{3}$ de km del centre hi ha un avís que anuncia 40 km/h, a $\frac{1}{4}$ de km del centre hi ha un senyal que diu 30 km/h, a $\frac{1}{5}$ del centre un avís de 24 km/h i a una distància de $\frac{1}{6}$ de km l'avís diu 20 Km/h. Si es viatja sempre al límit de velocitat quant temps es tardarà a arribar al centre del poble des del primer anunci?

Solució: Tindrem:

Primer tram:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ km} \\ v_1 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 = \frac{e_1}{v_1} = \frac{\frac{1}{2}}{120} \text{ h} = \frac{60 \cdot 60}{2 \cdot 120} \text{ sg} = 15 \text{ sg}$$

Segon tram:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ km} \\ v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array} \right\} \Rightarrow t_2 = \frac{e_2}{v_2} = \frac{\frac{1}{6}}{60} \text{ h} = \frac{60 \cdot 60}{6 \cdot 60} \text{ sg} = 10 \text{ sg}$$

Tercer tram:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ km} \\ v_3 = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array} \right\} \Rightarrow t_3 = \frac{e_3}{v_3} = \frac{\frac{1}{12}}{40} \text{ h} = \frac{60 \cdot 60}{12 \cdot 40} \text{ sg} = 7,5 \text{ sg}$$

Quart tram:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \text{ km} \\ v_4 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array} \right\} \Rightarrow t_4 = \frac{e_4}{v_4} = \frac{\frac{1}{20}}{30} \text{ h} = \frac{60 \cdot 60}{20 \cdot 30} \text{ sg} = 6 \text{ sg}$$

Quint tram:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \text{ km} \\ v_5 = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array} \right\} \Rightarrow t_5 = \frac{e_5}{v_5} = \frac{\frac{1}{30}}{24} \text{ h} = \frac{60 \cdot 60}{30 \cdot 24} \text{ sg} = 5 \text{ sg}$$

Sext tram:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_6 = \frac{1}{6} \text{ km} \\ v_6 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array} \right\} \Rightarrow t_6 = \frac{e_6}{v_6} = \frac{\frac{1}{6}}{20} \text{ h} = \frac{60 \cdot 60}{6 \cdot 20} \text{ sg} = 30 \text{ sg}$$

En total:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 15 + 10 + 7,5 + 6 + 5 + 30 = 73,5 \text{ sg} = 1 \text{ m } 13,5 \text{ sg}$$

Maig 7: Trobeu cinc enters consecutius tals que la suma de quadrats dels tres primers siga igual a la suma de quadrats dels dos últims.

Solució: Siguen:

$$x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2$$

els enters consecutius. De l'enunciat tenim que deu de complir-se que:

$$(x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2$$

que porta a:

$$0 = 12x - x^2 = (12 - x) \cdot x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases}$$

Els enters de l'enunciat són: -2 , -1 , 0 , 1 y 2 , o 10 , 11 , 12 , 13 y 14

Maig 9: Fa un mes un 10% d'una població tenia una malaltia i un 90% no la tenia. Passat el mes, un 10% de les persones malaltes es curen i un 10% de les persones que no la tenien van passar a estar malaltes. Què % de la població no té la malaltia?

Solució: Suposem que el total de la població és de t persones. Podem generar la següent taula de contingència:

		En l'actualitat		
		E	$\bar{E}$	
fa 1 mes	E		$0,01 \cdot t$	$0,1 \cdot t$
	$\bar{E}$	$0,09 \cdot t$		$0,9 \cdot t$

Tenim de l'enunciat:

Total primera fila: Fa un mes un 10% d'una població tenia una malaltia:

$$10\% \text{ de } t = 0,1 \cdot t$$

Total segona fila: Fa un mes un 90% d'una població no tenia la malaltia:

$$90\% \text{ de } t = 0,9 \cdot t$$

Cel·la primera fila, segona columna: Passat el mes (en l'actualitat), un 10% de les persones malaltes es curen:

$$10\% \text{ de } 0,1 \cdot t = 0,01 \cdot t$$

Cel·la segona fila, primera columna: Passat el mes (en l'actualitat), un 10% de les persones que no la tenien van passar a estar malaltes:

$$10\% \text{ de } 0,9 \cdot t = 0,09 \cdot t$$

		En l'actualitat		
		E	$\bar{E}$	
fa 1 mes	E	$0,09 \cdot t$	$0,01 \cdot t$	$0,1 \cdot t$
	$\bar{E}$	$0,09 \cdot t$	$0,81 \cdot t$	$0,9 \cdot t$
		$0,18 \cdot t$	$0,82 \cdot t$	t

I finalment, completem la taula de contingència:

Per tant, en l'actualitat, hi ha un 18% de malalts i un 82% de la població no té la malaltia

Maig 10-11: Un cavall i un mul caminaven junts, portant sobre els seus lloms, pesats sacs. *Lamentàbase el rossí de la seua enutjosa càrrega, al que el mul li va dir: De què et queixes? Si jo et prenguera un sac, la meua càrrega seria el doble que la teua. En canvi, si et done un sac, la teua càrrega s'igualaria a la meua. Quants sacs porta cadascun?

Solució: Un típic problema d'enunciat: es descriu una situació i es pregunta alguna cosa sobre ella: Siga x el nombre de sacs que transporta el cavall i y el nombre de sacs que transporta el mul. Tenim:

"Si jo et prenguera un sac, la meua càrrega seria el doble que la teua."

$$y + 1 = 2(x - 1)$$

"Si et done un sac, la teua càrrega s'igualaria a la meua"

$$y - 1 = x + 1$$

Queda generat el sistema:

$$\begin{cases} y + 1 = 2(x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{cases}$$

Aïllant y en la segona equació i substituint en la primera arribem a: $x = 5$ i en substituir en la segona arribem a $y = 7$.

El mul porta 7 sacs i el cavall transporta 5 sacs.

Maig 12: Una ONG ven 140 bitllets per a recaptar fons. Alguns bitllets es van vendre al preu original (un enter), però els altres es van vendre a la meitat del preu inicial. Es van recaptar 2001 €. Quin és el preu inicial dels bitllets?

Solució: De l'enunciat tenim:

$$140 \text{ billets} \quad \begin{cases} x (\leq 140) \text{ al preu } p \in \mathbb{N} \\ 140 - x \text{ al preu } \frac{p}{2} \end{cases}$$

Com els guanys són de 2001 €, tindrem:

$$xp + (140 - x)\frac{p}{2} = 2001 \Rightarrow xp + 140p = 4002 \Rightarrow p = \frac{4002}{x + 140}$$

I com $p \in \mathbb{N}$, $x + 140$ és un divisor positiu de 4002. Com $0 \leq x \leq 140 \Rightarrow 140 \leq x + 140 \leq 2 \cdot 140 = 280$. Com $4002 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$ ls divisors de 4002 són: 1, 2, 3, 6, 23, 29, 46, 58, 69, 87, 138, 174, 1334, L'únic divisor entre 140 i 280 és 174. D'on $x = 174 - 140 = 34$ i

$$p = \frac{4002}{174} = 23$$

És a dir, es van vendre 34 bitllets a 23 euros i la resta ($140 - 34 =$) 106 bitllets a la meitat de preu ($23/2 =$) 11,5 €.

Maig 13-14: En cada estació d'una xarxa ferroviària es venen tants bitllets diferents com estacions a les quals es pot anar o des de les quals es pot vindre (els bitllets d'anada i de tornada són diferents). S'inaugura una nova línia amb diverses estacions i això obliga a imprimir 34 nous bitllets. Quantes estacions hi havia i quantes s'han inaugurat?

Solució: Suposem que abans de la inauguració de la nova línia hi havia n estacions en actiu. El nombre de bitllets que havien d'imprimir-se era $n \cdot (n - 1)$ (perquè els bitllets d'anada i volta són diferents). Si amb la incorporació de la nova línia s'agreguen x estacions, el nombre de bitllets diferents passa a ser $(n + x) \cdot (n + x - 1)$. Restant, tindrem:

$$(n + x) \cdot (n + x - 1) - n \cdot (n - 1) = 34$$

que, desenvolupant, es transforma en:

$$(2n + x - 1) \cdot x = 1 \cdot 2 \cdot 17 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2n + x - 1 = 34 \Rightarrow 2n = 34 \Rightarrow n = 17 \\ x = 2 \Rightarrow 2n + x - 1 = 17 \Rightarrow 2n = 16 \Rightarrow n = 8 \\ x = 17 \Rightarrow 2n + x - 1 = 2 \Rightarrow 2n = -14 \Rightarrow \text{NO} \\ x = 34 \Rightarrow 2n + x - 1 = 1 \Rightarrow 2n = -34 \Rightarrow \text{NO} \end{cases}$$

Com en l'enunciat es parla de diverses estacions noves, ha de ser $x = 2$ i $n = 8$. És a dir, hi havia 8 estacions i s'han agregat dues noves estacions.

Maig 16-17: Dos jugadors A i B, juguen per torns al següent joc: Es té un muntó de 2021 pedres. En el seu primer torn A tria un divisor de 2021 i retira aquest nombre de pedres del muntó. A continuació, B tria un

divisor del nombre de pedres que queden i retira aquest nombre de pedres del muntó i així, successivament. Perd el jugador que retira l'última pedra. Demostreu que un dels jugadors té una estratègia guanyadora i descriu aquesta estratègia.

Solució: B guanya si A li entrega un nombre parell de pedres i B resta el producte de (tots o alguns) dels imparells de la descomposició factorial en cosins del número que li dona A i dona a A un nombre imparell (Si en el número que rep B no hi ha factors imparells, B resta 1, és a dir tria el divisor 1).

Efectivament, A sempre dona un nombre parell a B i A rep sempre un nombre imparell, doncs:

1.-

$$43 \cdot 47 = 2021 \quad \begin{cases} \xrightarrow{A(-1)} 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 & (\text{parell}) \\ \xrightarrow{A(-2021)} 0 & (\text{B guanya}) \\ \xrightarrow{A(-43)} 1978 = 2 \cdot 23 \cdot 43 & (\text{parell}) \\ \xrightarrow{A(-47)} 1974 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 47 & (\text{parell}) \end{cases}$$

2.- Si B rep $2^\alpha \cdot l$ i resta l' (sent l i l' producte de imparells) dona a A el número:

$$2^\alpha l' l'' - l' = (2^\alpha l'' - 1) \cdot l' \quad ((\text{parell} - 1) \cdot \text{imparell} = \text{imparell})$$

3.- Si B rep 2^δ , B resta 1 i dona a A un imparell ($2^\delta - 1 = \text{parell} - \text{imparell} = \text{imparell}$)

4.- Com que al número donat per l'un o l'altre jugador se li resta un altre número el procés és descendent.

5.- Arribarà un moment en què B transmet a A un imparell amb només dos divisors: l'1 i el 3

$$\begin{cases} \xrightarrow{A(-1)} 2 \xrightarrow{B(-1)} 1 \xrightarrow{A(-1)} 0 & \text{guanya B} \\ \xrightarrow{A(-3)} 0 & \text{guanya B} \end{cases}$$

Maig 18: En cubolandia, els planetes són cubs. Aitana té un d'aresta 1 km. Si la seua atmosfera té 500 m d'altura en tots els seus punts, quin és el volum de l'atmosfera?

Solució: L'atmosfera del planeta està composta per:

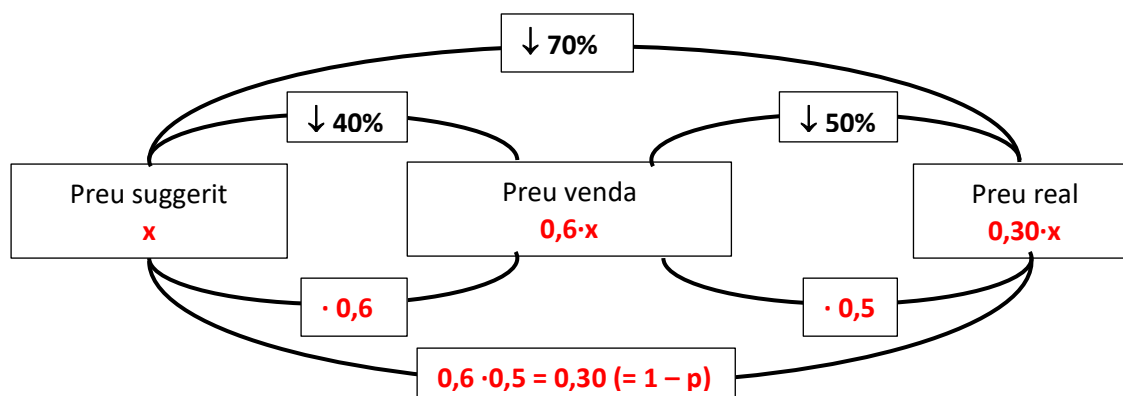
- 6 paral·lelepípedes (un per a cadascuna de les cares del cub que forma el planeta) de dimensions 1 km x 1km x 0,5 km. El volum total d'aquests paral·lelepípedes és ($6 \cdot 0,5 \text{ km}^3 =$) 3 km^3 .
- 12 quarts de cilindres (un quart per cadascuna de les arestes del cub), és a dir tres cilindres de dimensions 1 km d'altura i 0,5 km de ràdio. El volum total d'aquests cilindres és ($3 \cdot \pi \cdot 0,5^2 \cdot 1 =$) $0,75 \cdot \pi \text{ km}^3$.
- Huit huitens d'esfera (un huité per cada vèrtex del cub), és a dir una esfera amb volum total:

$$\left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,5^3\right) \frac{\pi}{6} \text{ km}^3$$

El volum total de l'atmosfera és:

$$3 + 0,75\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{18 + 5,5\pi}{6} \approx 5,8797 \dots \text{ km}^3$$

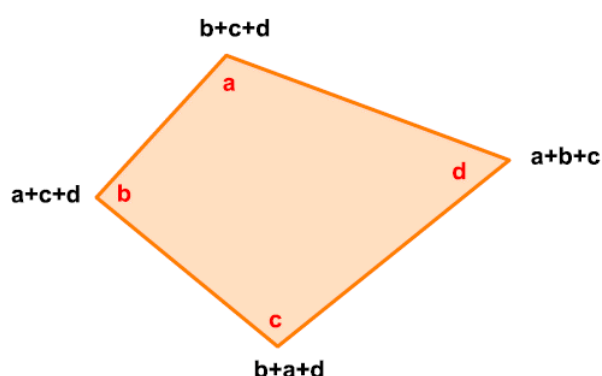
Maig 19-20: El preu de venda d'un abric era menor en un 40% al preu suggerit pel fabricant. Laia va comprar l'abric per la meitat del preu de venda. En quin percentatge és menor el valor que va pagar Laia per l'abric respecte al preu suggerit pel fabricant?

Solució:

$$0,30 = 1 - p \Rightarrow p = 0,7 = 70\%$$

Maig 21-28: En els vèrtexs d'un quadrilàter està escrit amb tinta invisible un número secret i amb tinta visible la suma dels números invisibles dels altres tres vèrtexs. Pots donar una regla per a calcular els números invisibles a partir dels números visibles?

Solució: Imaginem la figura adjunta on, en cada vèrtex està, en negre, la suma dels tres números invisibles que hi ha en els altres tres vèrtexs i en roig estan els quatre números invisibles. Vegem com localitzar el valor del número invisible:



1.- Sumem els números visibles dels altres vèrtexs, obtenint:

$$3a + 2(b + c + d)$$

2.- Restem el doble del número visible del vèrtex que ens ocupa i obtenim:

$$3a + 2(b + c + d) - 2(b + c + d) = 3a$$

3.- Finalment, dividim per 3 i obtenim:

$$\frac{3a}{3} = a$$

És a dir, per a trobar el número invisible d'un vèrtex:

Hem de sumar els números visibles dels altres vèrtexs. Al número obtingut restar-li el doble del número visible del vèrtex. I finalment dividir per 3.

Nota: El procediment descrit ací pot generalitzar-se a polígon de qualsevol nombre de vèrtexs.

Maig 23: Trobeu, si és possible, el major i menor natural la suma de xifres del qual és 2022.

Solució: Busquem, en primer lloc, el menor natural amb suma de xifres 2022. Com:

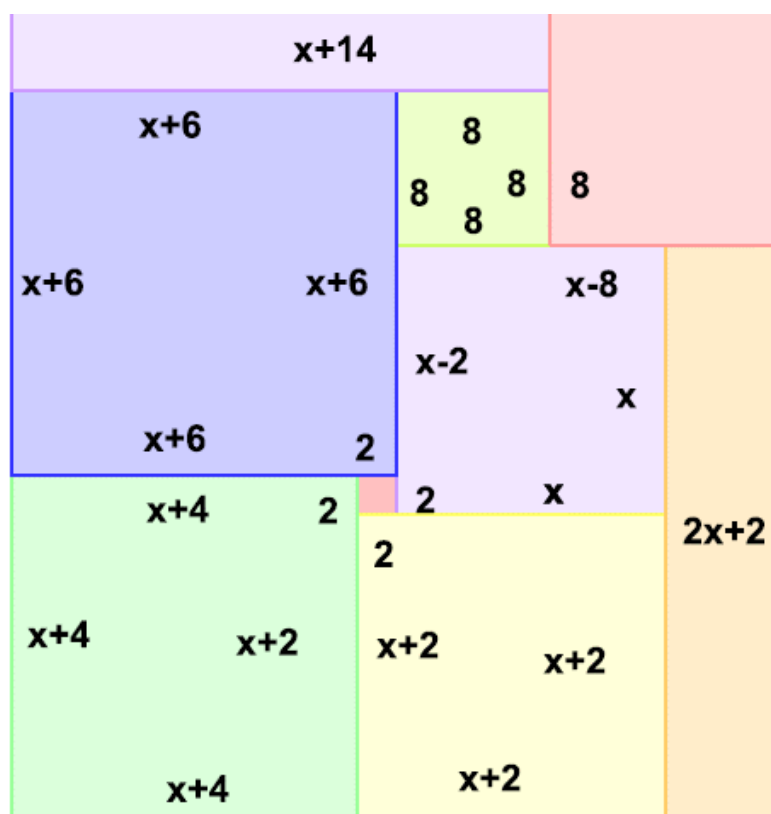
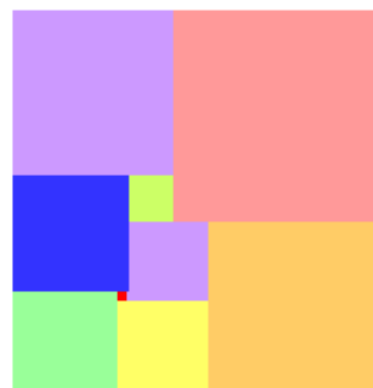
$$\begin{array}{r|l} 2022 & 9 \\ \hline 6 & 224 \end{array}$$

El número format per 224 nous antecedit per un sis complex que la suma de les seues xifres és 2022 i òbviament és el més xicotet que compleix aquesta condició:

$$\underbrace{6\ 99\ \dots\ 99}_{224}$$

No existeix un natural més gran amb suma de xifres 2022, ja que en suposar que existeix, és suficient multiplicar-lo per 10 (o per 100 o per 1000,) per a obtindre un número més gran amb la mateixa suma de xifres.

Maig 24-25: El rectangle de la figura està dividit en nou quadrats. Calcula la seua altura i la seua longitud sabent que el quadrat més xicotet és de costat 2 cm.



Solució: Es van ha obtindre els costats dels diversos quadrats partint del costat de l'únic quadrat conegut, el de color roig, el costat del qual mesura 2.

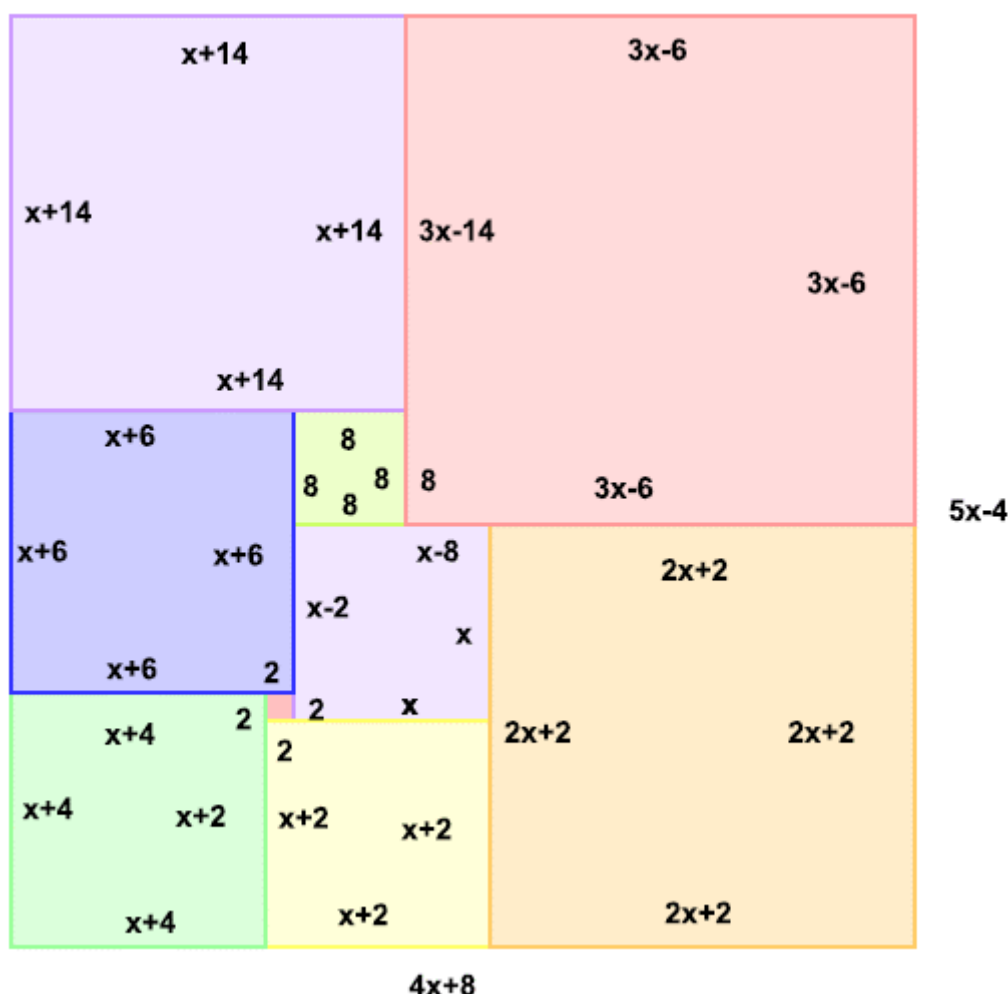
Siga x el costat del quadrat que hi ha a la dreta del de costat 2. Llavors el costat del quadrat que hi ha davall serà $x + 2$. El costat del quadrat que hi ha a la seua esquerra serà $x + 4$. El costat del quadrat que hi ha damunt serà $x + 6$. Amb el que el quadrat color verd que hi ha a la seua dreta serà:

$$x + 6 - (x - 2) = 8$$

Llavors el costat del quadrat color violeta que hi ha damunt dels dos últims serà:

$$x + 6 + 8 = x + 14$$

Baixem. El costat del quadrat que hi ha a la dreta dels quadrats de costats x i $x + 2$ serà: $2x + 2$



El costat del quadrat que hi ha per damunt d'aquest serà:

$$2x + 2 + x - 8 = 3x - 6$$

Aquest quadrat comparteix amb el quadrat a la seua esquerra un costat de:

$$3x - 6 - 8 = 3x - 14$$

Per tant:

$$x + 14 = 3x - 14 \Rightarrow x = 14$$

Les dimensions del rectangle gran són:

$$\begin{cases} 2x + 2 + 3x - 6 = 5x - 4 = 5 \cdot 14 - 4 = 66 \\ x + 4 + x + 2 + 2x + 2 = 4x + 8 = 4 \cdot 14 + 8 = 64 \end{cases}$$

Maig 26-27: Una persona té 500 € en un compte corrent d'un banc. Pot fer dos moviments indefinidament, mentre tinga diners en el compte: traure 300 € o depositar 198 €. Quina és la màxima quantitat de diners que pot traure del seu compte?

Solució: Aparentment sembla que la major quantitat de diners que podem traure és 300 €, però si després de l'extracció ingresem 198 € (hi hauria en el banc $(200 + 198 =) 398$ €) podríem fer una extracció de 300 € i així tindríem $(300 - 198 + 300 =) 402$ € en efectiu, que sembla ser el màxim. Continuant amb aquest procés generem la següent taula:

	En efectiu	En banc	Acció
a_0	0	500	Extraure 300 €
a_1	300	200	Ingressar 198 €
a_2	102	398	Extraure 300 €
$a_3 = b_1$	402	98	Ingressar 198 €
a_4	204	296	Ingressar 198 €
a_5	6	494	Extraure 300 €
a_6	306	194	Ingressar 198 €
a_7	108	392	Extraure 300 €
$a_8 = b_2$	408	92	Ingressar 198 €
a_9	210	290	Ingressar 198 €
a_{10}	12	488	Extraure 300 €
a_{11}	312	188	Ingressar 198 €
a_{12}	114	386	Extraure 300 €
$a_{13} = b_3$	414	86	Ingressar 198 €
a_{14}	216	284	Ingressar 198 €
a_{15}	18	482	Extraure 300 €
a_{16}	318	182	Ingressar 198 €
a_{17}	120	380	Extraure 300 €
$a_{18} = b_4$	420	80	
.....			

Veiem que es presenta una “recurrència”: cada cinc moviments bancaris hi ha un pic d'efectiu:

$$b_1 = a_3 = 402; b_2 = a_8 = 408; b_3 = a_{13} = 414; b_4 = a_{18} = 420; \dots; b_n = a_{5(n-1)+3} = 402 + 6(n-1) = 6n + 396$$

Es tracta d'una PA de primer terme 402 i de diferència $d = 6$. A més, necessàriament, $b_n \leq 500$

$$6n + 396 \leq 500 \Rightarrow n \leq 17, \hat{3} \Rightarrow n = 17 \Rightarrow b_{17} = a_{83} = 6 \cdot 17 + 396 = 498 \text{ €}$$

quedant en el banc 2 € (= 500 – 498). I llavors es repeteix tot el procés:

	En efectiu	En banc	Acció
$a_{83} = b_{17}$	498	2	Ingressar 198 €
$a_{84} = a_1$	300	200	Ingressar 198 €
....			

En definitiva: La major quantitat de diners que es pot obtindre en efectiu és de 498 €.

Maig 30-31: Un club de bàsquet té una secció masculina i una secció femenina. La mitjana aritmètica del pes dels xics de la secció masculina és de 90 quilos, la mitjana aritmètica del pes de les xiques de la secció femenina és de 65 quilos. La mitjana aritmètica del pes de tots els components del club és de 75 quilos. Hi ha més xiques que xics? Quina proporció de xiques hi ha entre tots els jugadors del club?

Solució: Siga:

$$\begin{array}{l} \sum_{H.} \text{ el pes dels homes} \\ \sum_{D.} \text{ el pes de les dones} \\ n_H \text{ el número de jugadors} \\ n_D \text{ el número de jugadores} \end{array}$$

aleshores:

$$\begin{aligned} 90 &= \frac{\sum_{H.}}{n_H}; \quad 65 = \frac{\sum_{D.}}{n_D}; \quad 75 = \frac{\sum_{H.} + \sum_{D.}}{n_H + n_D} = \frac{90n_H + 65n_D}{n_H + n_D} \Rightarrow 75n_H + 75n_D = 90n_H + 65n_D \\ &\Rightarrow 10n_D = 15n_H \Rightarrow n_D = 1,5n_H \end{aligned}$$

És a dir, hi ha 3 dones per cada dos homes, és a dir 3 dones per cada 5 jugadors, és a dir, 60 dones per cada 100 jugadors. Per tant, la proporció de dones és del 60% i la proporció d'homes del 40%.

De manera alternativa, de la igualtat $n_D = 1,5n_H$, tenim:

$$p_D = 1,5p_H$$

I com $p_D + p_H = 1$, tenim:

$$2,5p_H = 1 \Rightarrow p_H = \frac{1}{2,5} = 0,4 = 40\% \Rightarrow p_D = 1 - p_H = 1 - 0,4 = 0,6 = 60\%$$