

SOLUCIONS JUNE 2022

PROBLEMES PER A UTILITZAR PROGRAMES GEOMÈTRICS. AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

June 1: Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant

Solució: Siga el quadrant $\widehat{AB}$ de centre O i radi $\overline{OA} = R$. Siga la semicircumferència de centre L i diàmetre $\overline{KJ} = 2r$. Siga la circumferència inscrita en el quadrat $KLMN$ de centre P . Siga $\overline{KN} = 2s$, s el radi de la circumferència. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OKJ$

$$5r^2 = R^2, \quad \overline{ON} = r + 2s, \overline{MN} = 2s, \overline{OM} = R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ONM$

$$R^2 = 4r^2 + (r + 2s)^2; \quad 10s^2 + \sqrt{5}Rs - R^2 = 0; \quad s = \frac{\sqrt{5}}{10}R$$

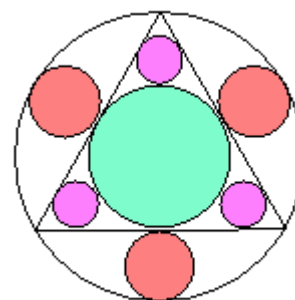
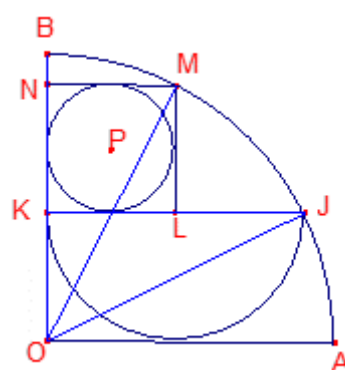
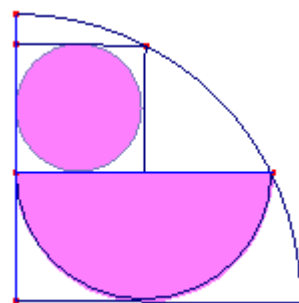
Notem que $r = 2s$. La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{\text{ombrejada}}}{S_{\text{quadrant}}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi s^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

June 2-3: En una circumferència de radi R s'ha inscrit un triangle equilàter.

S'han dibuixat 7 circumferències. Calculeu el radi de les circumferències.

Sangaku. Prefectura de Chiba



Solució: Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$. Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$. Siga la circumferència inscrita al triangle equilàter de radi $\overline{OT} = \overline{OK} = r$

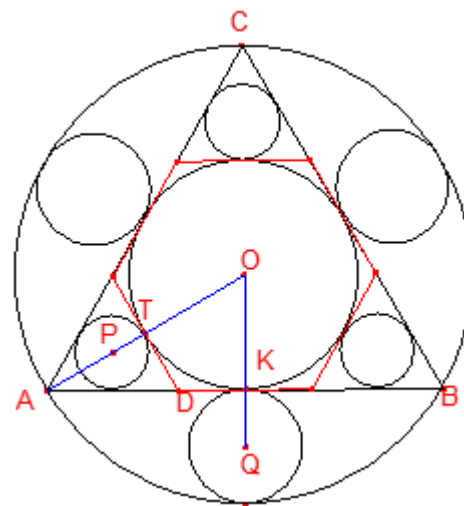
$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

Siga T el punt de tangència. Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = s$. Pel punt T tracem una paral·lela al costat $\overline{BC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt D .

$$\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}; \quad s = \frac{1}{3}r = \frac{1}{6}R$$

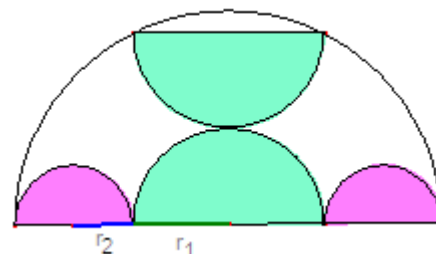
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QK} = t$

$$2R - 2t = \overline{CK} = 3r; \quad 2t = 2R - 3r = 2R - \frac{3}{2}R = \frac{1}{2}R; \quad t = \frac{1}{4}R$$



Juny 4: En la següent figura, calculeu:

$$\frac{r_1}{r_2}$$



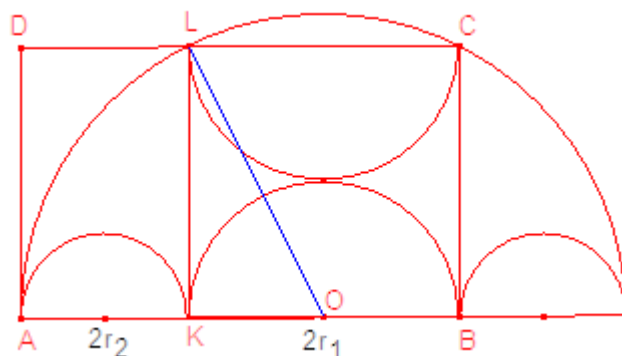
Solució 1: Siga la semicircumferència de centre O .

Els diàmetres $\overline{BK}$, $\overline{CL}$ formen un quadrat.

$$\overline{OL} = \frac{\sqrt{5}}{2}r_1$$

El rectangle $ABCD$ és auri.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{KB}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



Solució 2: Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OL} = r_1 + 2 \cdot r_2$

$$\overline{OK} = r_1, \overline{KL} = 2 \cdot r_1$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OKL$:

$$(r_1 + 2 \cdot r_2)^2 = r_1^2 + (2 \cdot r_1)^2$$

Simplificant:

$$r_1^2 - r_2 \cdot r_1 - 1 = 0$$

Resolent l'equació

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Juny 6-7: En la següent figura, determineu la proporció entre els radis dos tipus de circumferències.

Sangaku. Prefectura Tochigi

El

Solució: Siga el triangle $\triangle ABC$ i O el centre de l'arc superior. Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$ centre de la circumferència gran. Siga $\overline{OM} = R$ radi de la circumferència gran. Siga P el centre de la circumferència menuda de l'esquerra, de radi $s = \overline{PQ}$

$$\overline{OQ} = \overline{OA} = 2 \cdot \overline{MO} = 2R$$

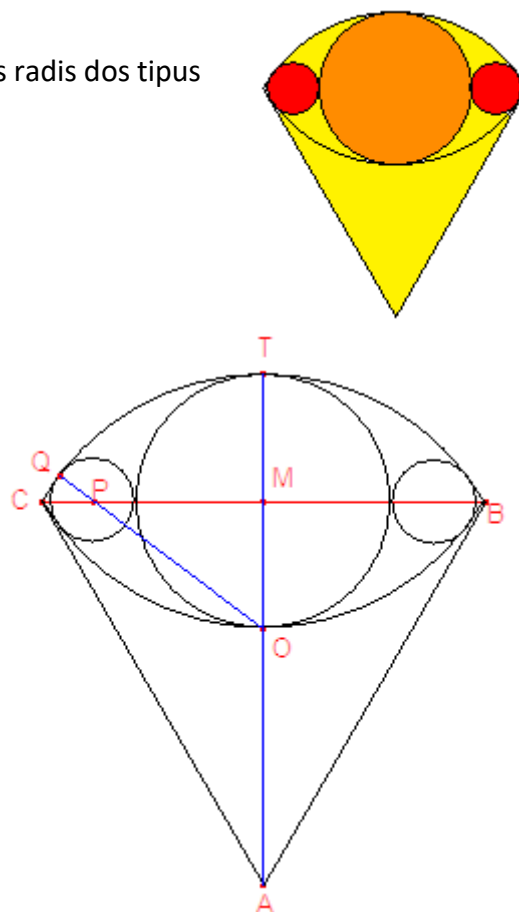
$$\overline{PM} = R + s, \overline{OM} = R, \overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{QP} = \overline{OT} - S = 2R - s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OMP$:

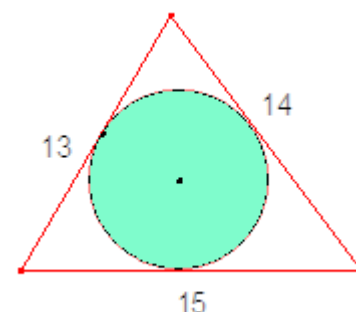
$$(2R - s)^2 = R^2 + (R + s)^2$$

Simplificant:

$$s = \frac{1}{3}R$$



Juny 8: Els costats d'un triangle mesuren 13, 14, 15. Calculeu el radi de la circumferència inscrita



Solució: Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle. L'àrea del triangle és:

$$S = \frac{\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}}{4} = \frac{13 + 14 + 15}{2} r; \quad 84 = 21r$$

Resolent l'equació: $r = 4$. Notem que el triangle és heronià.

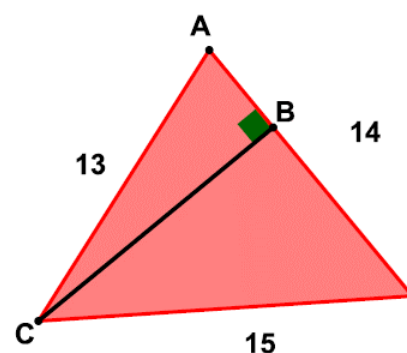
Solució 2: (Miguel Herrainz @M1GU3L_HH). Tindrem

$$A = \frac{14 \cdot \overline{BC}}{2}$$

Recordant la terna pitagòrica 5-12-13, tindrem:

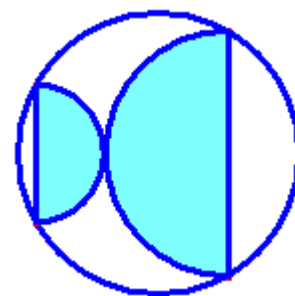
$$\overline{CB} = 12; \quad \overline{AB} = 5$$

Per tant:



$$A = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 = \frac{R(13 + 14 + 15)}{2} \Rightarrow R = 4$$

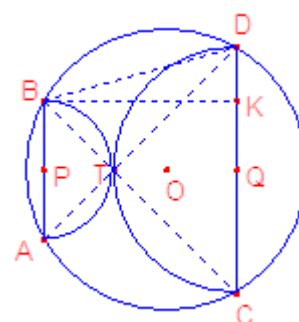
Juny 9: Els diàmetres dels semicercles són paral·lels. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle.



Solució: Siga la circumferència de centre O i radi R. Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2r$ i centre P. Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{CD} = 2s$ i centre Q. Siga T el punt de tangència de les dues circumferències: Les rectes PT i AB són perpendiculars. Les rectes PT, AC són perpendiculars.

$$\angle ATB = \angle CTB = 90^\circ; \angle BAT = \angle CDT = 45^\circ$$

Aleshores, els punts A, T, D estan alineats.



Siga K la projecció de B sobre la recta CD.

$$\overline{BK} = \overline{PQ} = r + s, \overline{DK} = |r - s|$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BDK$:

$$\overline{BD}^2 = (r + s)^2 + (r - s)^2 = 2r^2 + 2s^2; \overline{BD} = \sqrt{2(r^2 + s^2)}; \overline{AT} = r\sqrt{2}, \overline{DT} = s\sqrt{2}, \overline{AD} = (r + s)\sqrt{2}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{\sqrt{2(r^2 + s^2)}}{\sin 45^\circ} = 2R, \quad \frac{\sqrt{2(r^2 + s^2)}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

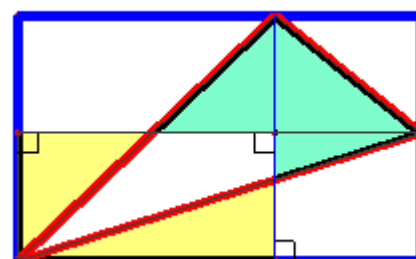
Simplificant:

$$R^2 = r^2 + s^2$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{\text{ombrejada}}}{S_{\text{Total}}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi s^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

Juny 10-11: L'àrea del triangle roig és la tercera part del rectangle exterior verd. Calculeu la proporció entre l'àrea pintada de verd i la pintada de groc.

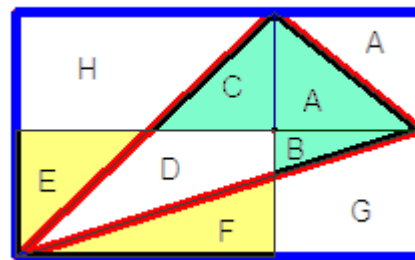


Solució: El triangle roig i el rectangle blau i els dos segments perpendiculars divideixen el rectangle exterior en 9 parts d'àrees:

$$A, A, B, C, D, E, F, G, H$$

La diagonal d'un rectangle divideix el rectangle en dues parts iguals.

$$H + E = C + D + F; \quad B + D + E = F + G$$



L'àrea del triangle roig és la tercera part de rectangle blau, aleshores:

$$A + H + E + F + G = 2(A + B + C + D)$$

$$E + F + H + G = A + 2B + 2C + 2D$$

$$E + F + (C + D + F - E) + G = A + 2B + 2C + 2D$$

$$E + F + F - E + G = A + B + C + B + D$$

$$E + F + F - E + G = A + B + C + F + G - E$$

Aleshores:

$$E + F = A + B + C$$

Juny 13: Les dues circumferències tenen radi 4. Calculeu el radi de la semicircumferència.

Solució: Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$. Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$. Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = 4$. T és el punt mig del costat $\overline{AC}$, $\angle ATO = 90^\circ$

$$\overline{OT} = R - 8$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AOT$:

$$\overline{AT} = \sqrt{R^2 - (R - 8)^2} = \sqrt{16R - 64}$$

Els triangles rectangles $\triangle AOT$, $\triangle ABC$ i de raó 1:2

$$\overline{BC} = 2R - 16, \quad \overline{AC} = 2\sqrt{16R - 64}$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\triangle ABC$ és:

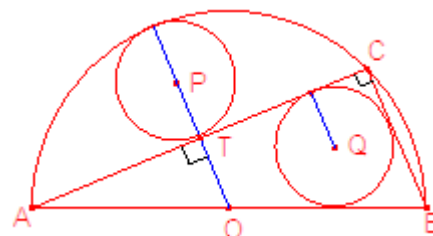
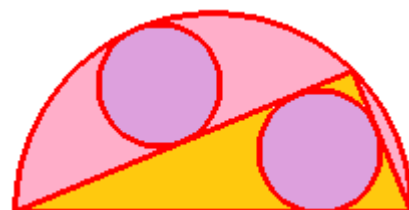
$$4 = r = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2}; \quad 4 = \frac{2\sqrt{16R - 64} + 2R - 16 - 2R}{2}$$

Simplificant:

$$12 = \sqrt{16R - 64}$$

Resolent l'equació:

$$R = 13$$



Juny 14-15: En la figura, el radi de la semicircumferència és $R = 1$. Calculeu el radi dels quatre tipus de circumferència.

Prefectura de Fukushima.

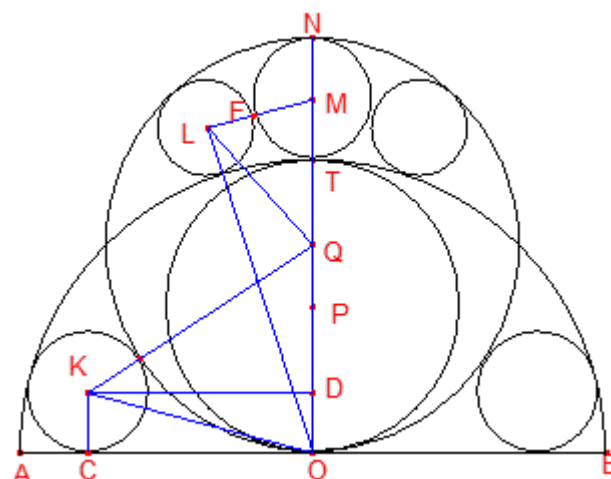


Solució: Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2$ i centre O . Siga la circumferència de centre P i diàmetre $\overline{OT} = 1$. El seu radi és $\overline{PO} = \frac{1}{2}$. Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KC} = r$. Siga la circumferència de centre Q de diàmetre $\overline{ON} = 1 + 2r$. Siga D la projecció de K sobre $\overline{ON}$. Siga $\overline{KD} = a$.

$$\overline{OK} = 1 - r, \overline{QK} = \frac{1}{2} + 2r, \overline{QD} = \frac{1}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\triangle OCK$, $\triangle KDQ$:

$$a^2 = (1 - r)^2 - r^2; \quad a^2 = \left(\frac{1}{2} + 2r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



Igualant les expressions:

$$(1 - r)^2 - r^2 = \left(\frac{1}{2} + 2r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Simplificant i resolent l'equació:

$$4r^2 + 4r - 1 = 0, \quad r = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$

El radi de la circumferència de diàmetre $\overline{ON}$ és: $\overline{QO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Siga la circumferència de centre L i radi $\overline{LF} = s$. Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MF} = \overline{MT} = r$.

$$\overline{OL} = 1 + s, \overline{LM} = r + s, \overline{QL} = \frac{\sqrt{2}}{2} - s, \overline{OM} = 1 + r, \overline{QM} = \frac{1}{2}$$

Siga $\angle LON = \alpha$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle LON$:

$$(r + s)^2 = (1 + s)^2 + (1 + r)^2 - 2(1 + s)(1 + r) \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{1 + r + s - rs}{(1 + s)(1 + r)}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle LOQ$:

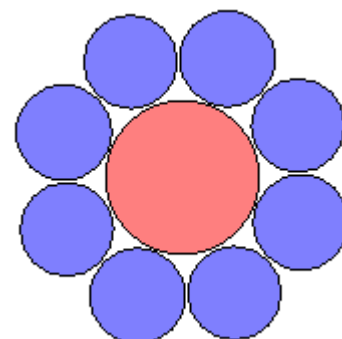
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - s\right)^2 = (1 + s)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(1 + s) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - s\right)^2 = (1 + s)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(1 + s) \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + r + s - rs}{(1 + s)(1 + r)}$$

$$\sqrt{2}s = 1 + 2s - \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2} + s - \frac{-1+\sqrt{2}}{2}s}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2}$$

Resolent l'equació: $s = \frac{1}{6}$

Juny 16-17: Vuit circumferències són tangents exteriors dos a dos i totes són tangents exteriors a una altra. Calculeu la proporció entre els dos tipus de circumferències. Calculeu la proporció entre les àrees de la suma de les vuit blaves i la roja.

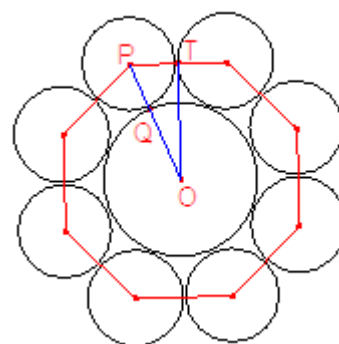


Solució: Siga O el centre de la circumferència roja de radi $\overline{OQ} = r$. Siga P el centre d'una circumferència blava de radi $\overline{PQ} = s$. Siga T el punt de tangència dues circumferències blaves. Les vuit circumferències blaves són vèrtex d'un octògon regular.

$$\angle POT = \frac{1}{2}45^\circ$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OTP$

$$\frac{s}{r+s} = \sin \frac{45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$$



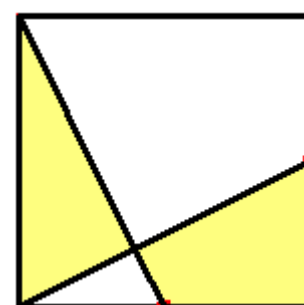
Resolent l'equació, la proporció entre els radis:

$$\frac{s}{r} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}} \approx 0.6199$$

La proporció entre les àrees de la suma de les vuit blaves i la roja és:

$$\frac{S_{\text{blava}}}{S_{\text{roja}}} = 8 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^2 = 8 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2} = 3.0744$$

Juny 18: Els punts assenyalats són punts migs dels costats del quadrat. Calculeu la proporció de les àrees de la regió ombrejada i el quadrat.



Solució: Siga el quadrat ABCD. Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament. Siga F la intersecció de $\overline{DM}$, $\overline{AN}$. Siga S l'àrea del quadrat ABCD. Siga P l'àrea del triangle rectangle $\triangle AFD$. Siga Q l'àrea del triangle rectangle $\triangle AFM$.

$$P + Q = \frac{1}{4}S$$

Els triangles rectangles $\triangle AFD$, $\triangle MFA$ són semblants i de raó 2:1.

Les seues àrees són proporcionals al quadrat de la proporció dels costats:

$$P = 4 \cdot Q$$

Aleshores:

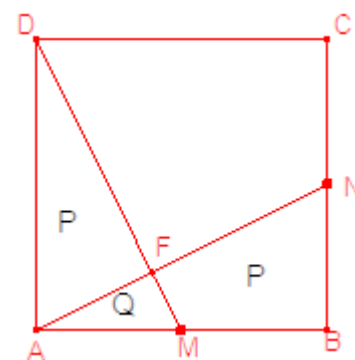
$$Q = \frac{1}{20}S, P = \frac{1}{5}S$$

La regió ombrejada és:

$$S_{\text{ombrejada}} = 2P = 2 \cdot \frac{1}{5}S = \frac{2}{5}S$$

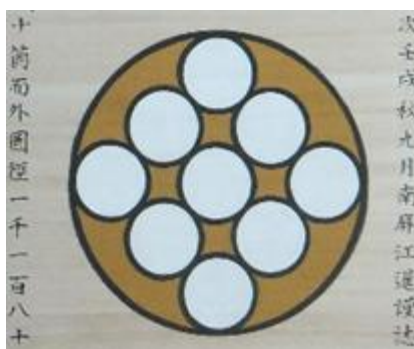
La proporció entre les àrees de la zona ombrejada i el quadrat és:

$$\frac{S_{\text{ombrejada}}}{S} = \frac{2}{5}$$



Juny 20-21: Nou circumferències tangents dos a dos estan a l'interior d'una altra circumferència. Calculeu la proporció entre les àrees de la suma de les nou circumferències i la circumferència exterior.

Prefectura Shisouka



Solució: Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OT} = R$. Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = r$. Siga P el centre de la circumferència i radi r.

$$\overline{PQ} = 4r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle POQ$:

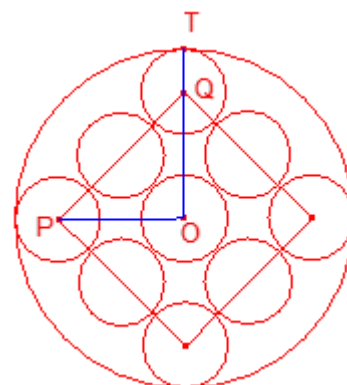
$$\overline{OQ} = 2r\sqrt{2}$$

Aleshores:

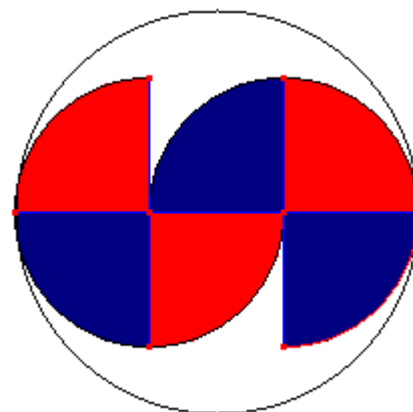
$$R = (1 + 2\sqrt{2})r$$

La proporció de les àrees de les nou circumferències i la circumferència exterior és.

$$\frac{9 \cdot S_Q}{S_O} = 9 \left(\frac{r}{R} \right)^2 = 9 \frac{1}{(1 + 2\sqrt{2})^2} = \frac{9(9 - 4\sqrt{2})}{49} \approx 0.6140$$



Juny 22: Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior.

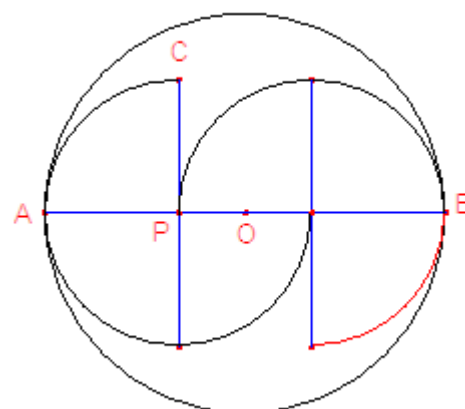


Solució: Siga P el centre del quadrat de circumferència. Siga $\overline{PA} = r$ radi del quadrat de circumferència. Siga $\overline{AB} = 3r$ diàmetre de la circumferència exterior de centre O . El radi de la circumferència exterior és:

$$\overline{OA} = \frac{3}{2}r$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{\text{ombrejada}}}{S_{\text{total}}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot r^2}{R^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot r^2}{\left(\frac{3}{2}r\right)^2} = \frac{2}{3}$$



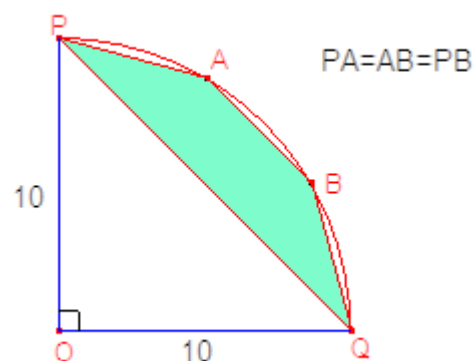
Juny 23: Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{OQ} = 10$. Siguen A, B el punt de l'arc tal que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{PB}$. Calculeu l'àrea del quadrilàter $PABQ$.

Solució:

$$\angle POA = \angle AOB = \angle BOQ = 30^\circ$$

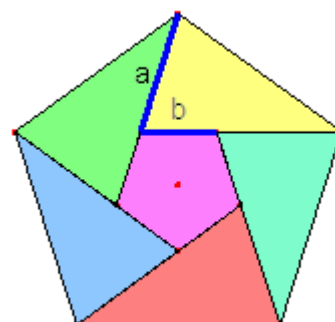
L'àrea del quadrilàter $PABQ$ és:

$$\begin{aligned} S_{PABQ} &= 3 \cdot S_{POA} - S_{OPQ} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 75 - 50 = 25 \end{aligned}$$

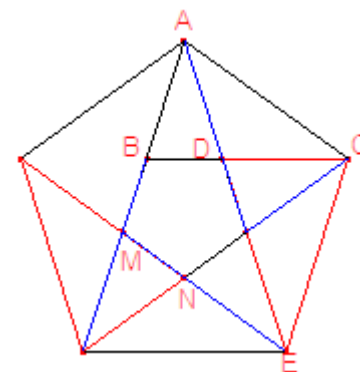


Juny 24-25: El pentàgon regular de la figura s'ha dividit en cinc triangles i un pentàgon regular. ~~Les sis regions tenen la mateixa àrea.~~ Calculeu

$$\frac{a}{b}$$



Nota 1: La frase en color roig i taxada deu ser eliminada de l'enunciat, per ser falsa i no aplicar-se en la demostració del problema. Vegeu notes posteriors.



Solució: Siga el triangle $\triangle ABC$, $\overline{AB} = a$. Siga D el costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} = b$, $\overline{BC} = a + b$. A, B, M estan alineats. Aleshores, M, N, E estan alineats, $\overline{EM} = \overline{BC} = a + b$, $\angle BMN = 108^\circ$, $\angle ABC = 72^\circ$, $\angle MAE = 36^\circ$

Aleshores el triangle $\triangle ABC$ és isòsceles i auri

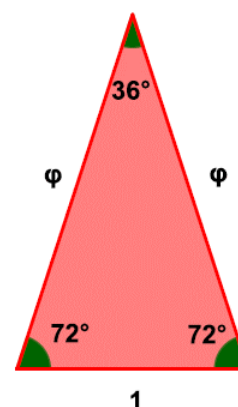
Aleshores:

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Notem que les àrees dels dos pentàgons regulars estan en proporció 1:5

Nota 2: Un triangle 72° - 36° - 72° es denomina un triangle auri. Si en ell, el costat desigual mesura 1 tenim que els costats iguals mesuren:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$



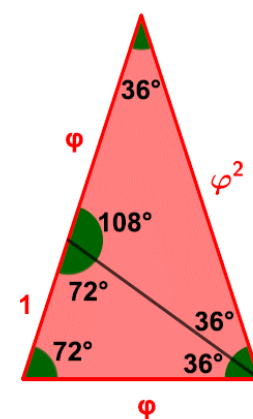
Tot triangle auri es descompon en un triangle auri i un gnòmon auri (triangle 36° - 108° - 36°). En la figura adjunta està dibuixada la descomposició del triangle auri de costats $\varphi^2 - \varphi - \varphi^2$ perquè en ell queda demostrada una igualtat molt important, a saber:

$$1 + \varphi = \varphi^2$$

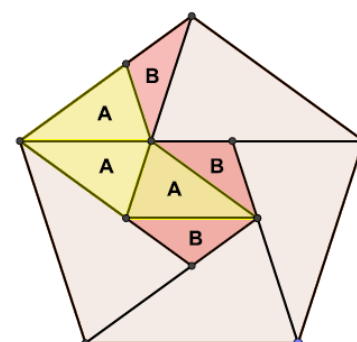
En el triangle auri φ - 1 - φ , es compleix que:

$$\text{Àrea} = \frac{(1 + \varphi)\sqrt{3 - \varphi}}{4}; \text{Perímetre} = 1 + 2\varphi = \varphi(1 + \varphi)$$

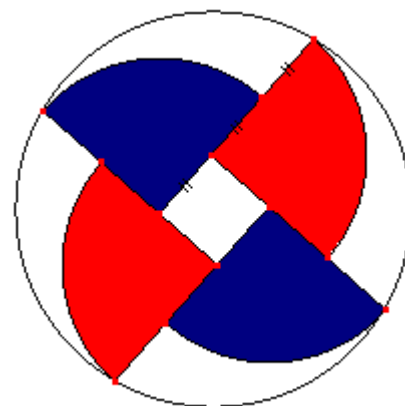
$$\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$$



Nota 3: La frase eliminada del enunciat mai es compleix, ja que el àrea del pentàgon interior mai es igual al àrea de qualsevol dels cinc triangles associats al costat del pentàgon inicial: Cadascun d'aquests triangles es descompon en dos triangles auris d'àrea A i un gnòmon auri, d'àrea B, mentre que el pentàgon interior es descompon en un triangle auri i dos gnòmons auris. Si els dos polígons tingueren igual àrea deuria complir-se que $2A + B = A + 2B$, que portaria a que $A = B$ que, òbviament, no es certa



Juny 27: Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució: Siga el quadrat de centre K i radi $\overline{KB} = 2a$. Siguen A, C centres de dos quadrants. Siga $\overline{AK} = a$. El centre O de la circumferència exterior és el punt mig del segment $\overline{AC}$. Siga $\overline{OB} = R$ radi de la circumferència exterior. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AKC$

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BKC$

$$\overline{BC} = a\sqrt{5}$$

$\overline{OB}$ és mitjana del triangle $\triangle ABC$, aleshores:

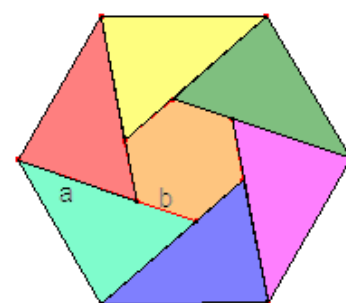
$$R^2 = \frac{2 \cdot (a\sqrt{5})^2 - 2 \cdot (3a)^2 - (a\sqrt{5})^2}{4}, \quad R^2 = \frac{13}{2}a^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{\text{ombrejada}}}{S_{\text{total}}} = \frac{(2a)^2}{R^2} = \frac{8}{13}$$

Juny 28-29: Les set regions de la figura tenen la mateixa àrea. Calculeu

$$\frac{a}{b}$$

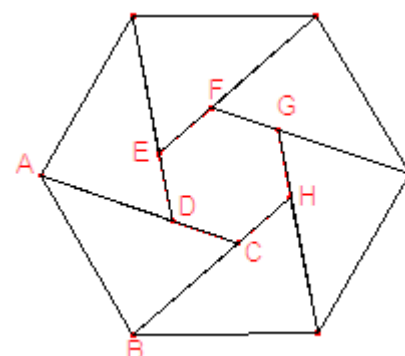


Solució: Siga $\overline{AD} = \overline{BC} = a$, $\overline{CD} = b$; $\angle BCA = 60^\circ$. L'àrea del triangle $\triangle ABC$ i l'àrea de l'hexàgon regular $CDEFGH$ són iguals.

$$\frac{1}{2}(a+b)a\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

Simplificant:

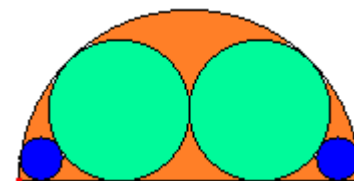
$$a^2 + ab - 6b^2 = 0$$



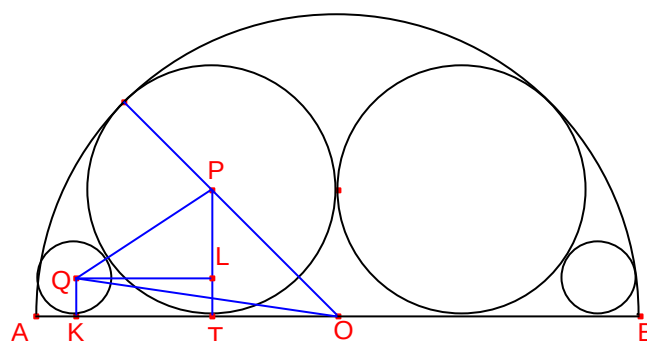
Resolent l'equació:

$$\frac{a}{b} = 2$$

Juny 30: Donat el semicercle de radi R calculeu les radis les altres circumferències.



Solució:



Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$. Siga la circumferència gran de centre P i radi $\overline{OT} = \overline{OT} = r$.

$$\overline{OP} = R - r = r\sqrt{2}$$

Aleshores:

$$r = (\sqrt{2} - 1)R$$

Siga la circumferència menuda de centre Q i radi $\overline{QK} = s$. Siga L la projecció de Q sobre $\overline{PT}$

$$\overline{PQ} = r + s, \overline{PL} = r - s$$

Siga $\overline{QL} = a$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle QLP$

$$a^2 = 4rs$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle QKO$

$$(R - s)^2 = (a + r)^2 + s^2$$

Simplificant:

$$(2\sqrt{2} - 1)s + (1 - \sqrt{2})R + 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{(\sqrt{2} - 1)Rs}$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{5\sqrt{2} - 1}{49}R$$