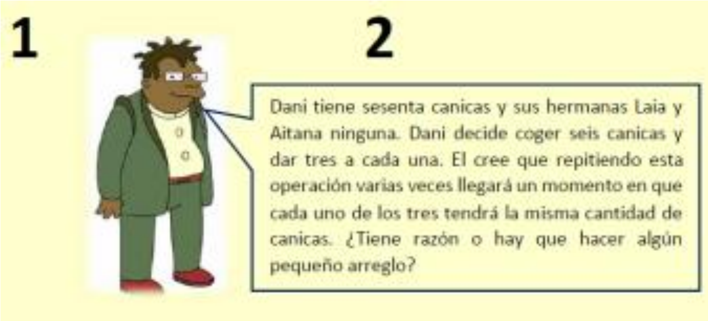
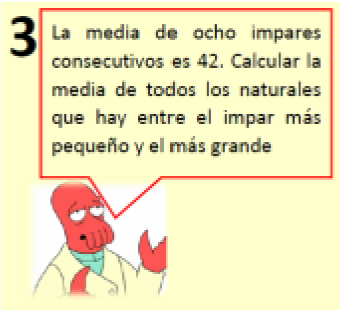
NOVIEMBRE 2022



No es posible hacerlo tal y como dice. Si hay 60 canicas en total, al final deben tener 20 cada uno, para lo que tiene que repartir un total de 40 entre sus hermanas, y no puede hacerlo si cada vez coge 6 canicas, ya que 6 no es divisor de 40.

Para arreglarlo, hay varias opciones, una forma sería que en lugar de 6 cada vez, repartiera una cantidad que sea divisor de 40, como 2, 4, 8 o 10. (Debe ser par para poder dar la mitad a cada una).

La otra forma sería empezar repartiendo 6 cada vez hasta que reparta 36 en total, y el último reparto hacerlo de 4 canicas.



La media seguiría siendo 42, ya que el 42 sería el número central de la sucesión.

Si la media de los impares es 42, los ocho números serán:

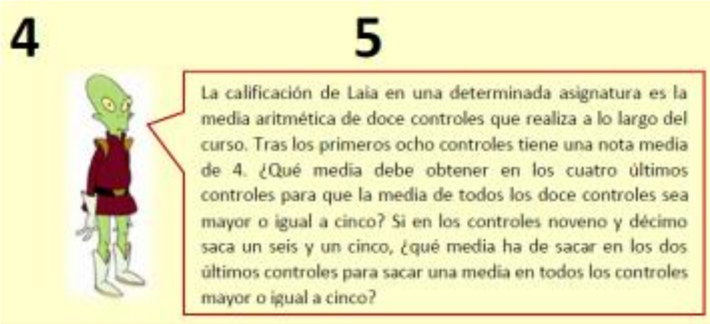
35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49

$$\overline{x_8} = S_8 : 8 = (35 + 49)\frac{8}{2} : 8 = 42$$

Todos los naturales entre 35 y 49:

35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47,48, 49

$$\overline{x_{15}} = S_{15} : 15 = (35 + 49)\frac{15}{2} : 15 = 42$$

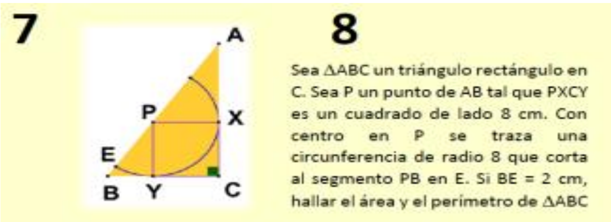

4 5

La calificación de Laia en una determinada asignatura es la media aritmética de doce controles que realiza a lo largo del curso. Tras los primeros ocho controles tiene una nota media de 4. ¿Qué media debe obtener en los cuatro últimos controles para que la media de todos los doce controles sea mayor o igual a cinco? Si en los controles noveno y décimo saca un seis y un cinco, ¿qué media ha de sacar en los dos últimos controles para sacar una media en todos los controles mayor o igual a cinco?

Si la media de los primeros ocho controles es de 4, sabemos que las ocho notas suman $S_8 = 8 \cdot 4 = 32$

Para que la media de los doce controles sea de un cinco, las doce notas deben sumar S_{12} =12·5=60, con lo que le faltan $60 - 32 = 28$ puntos que debe conseguir como suma de los cuatro últimos controles, la media debe ser entonces de 28:4=7.

Si en los controles noveno y décimo saca un seis y un cinco, hacen un total de 11 puntos, con lo que necesita $28 - 11 = 17$ puntos entre los dos últimos controles. La media será entonces de 17/2=8,5 puntos.



7 8

Sea ΔABC un triángulo rectángulo en C. Sea P un punto de AB tal que PXCY es un cuadrado de lado 8 cm. Con centro en P se traza una circunferencia de radio 8 que corta al segmento PB en E. Si BE = 2 cm, hallar el área y el perímetro de ΔABC

En el triángulo PBY conocemos la altura, 8 cm y la hipotenusa 8+2=10 cm. Para saber cuánto mide la base, usamos el teorema de Pitágoras:

$$BY = \sqrt{BP^2 - PY^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\ cm$$

Como los triángulos PBY y APX son semejantes y conocemos las medidas de las dos bases, podemos calcular la altura y la hipotenusa de APX:

$$altura\colon\ \frac{AX}{PY} = \frac{PX}{BY} \ \rightarrow\ \frac{AX}{8} = \frac{8}{6} \ \rightarrow\ AX = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}\ cm$$

$$hipotenusa\colon\ \frac{AP}{PE} = \frac{PX}{BY} \ \rightarrow\ \frac{AP}{10} = \frac{8}{6} \ \rightarrow\ AP = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}\ cm$$

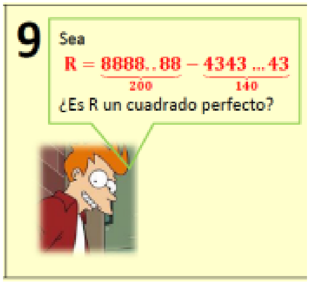
En el triángulo ABC la base mide $BY + YC = 6 + 8 = 14\ cm.$

La altura $AX + XC = \frac{32}{3} + 8 = \frac{56}{3}\ cm.$

La hipotenusa $AP + PE + BE = \frac{40}{3} + 8 + 2 = \frac{70}{3}\ cm.$

$$Área = \frac{14 \cdot \frac{56}{3}}{2} = \frac{392}{3}\ cm^2$$

$$Perímetro = 14 + \frac{56}{3} + \frac{70}{3} = 14 + \frac{126}{3} = 56\ cm.$$



Si hacemos la resta, obtenemos que R=88···84545···45 donde el 8 aparece 60 veces y el 45, 70 veces.

Es evidente que R es múltiplo de 3, ya que si sumamos todas sus cifras obtendremos:

$8 \cdot 60+4 \cdot 70+5 \cdot 70=8 \cdot 3 \cdot 20+9 \cdot 70$

Si R fuera un cuadrado perfecto, al ser múltiplo de 3, también lo sería de 9, pero esto no se cumple, ya que aunque 9·70 si lo es, 8·60 no.

De lo que se deduce que R no puede ser un cuadrado perfecto.

Primera división		Segunda división	
D	49+R	D+2372	49+R
	182		182+28
R/		49+R-1/	

Con la prueba de la división obtenemos:

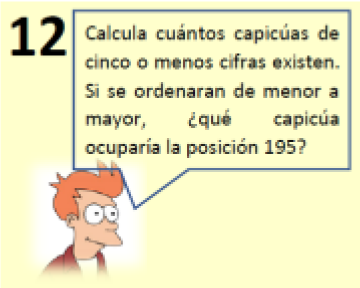
En la primera: $D=(49+R) \cdot 182+R$

En la segunda: $D+2372=(49+R)(182+28)+48+R$

Resolviendo el sistema formado por las dos, R=34, D=15140 y 49+R=83

De donde la primera división será:

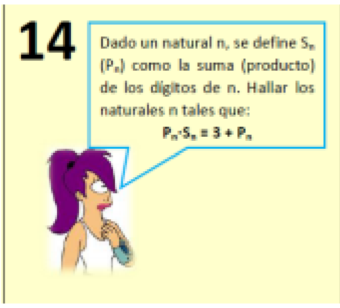
15140	83
	182
34/	



Capicúas de:	Cifras que se eligen	Menor	Mayor	Total	Total acumulado
Dos cifras	1	11	99	9	9
Tres cifras	2	101	999	90	99
Cuatro cifras	2	1001	9999	90	189
Cinco cifras	3	10001	99999	900	

Para llegar a la posición 195, tendremos que contar todos los capicúas de 2, 3 y 4 cifras (189 en total) y aún nos faltarán seis de cinco cifras.

El que buscamos será el 10501. (Los primeros de 5 cifras serán 10001, 10101, 10201, 10301, 10401 y 10501)



De la igualdad $P_n \cdot S_n = 3 + P_n$ podemos deducir que $P_n \cdot (S_n - 1) = 3$

Y como tanto P_n como S_n son números naturales, la única forma de que esto se cumpla es que uno de los factores sea un 1 y el otro un 3.

Opción 1: $P_n = 1$, $S_n - 1 = 3$

Si $P_n = 1$, todas las cifras del número deben ser 1.

Si $S_n - 1 = 3$, la suma de todas las cifras debe ser 4.

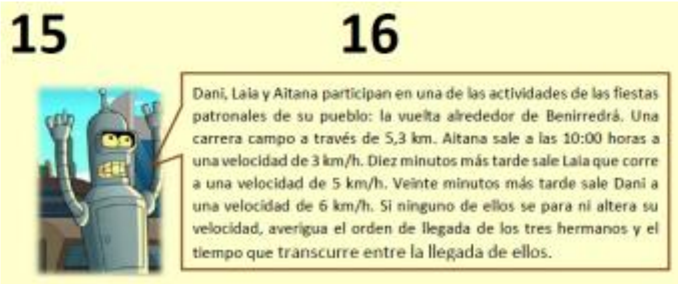
Nuestro número estará formado por cuatro unos: 1111

Opción 2: $P_n = 3$, $S_n - 1 = 1$

Si $P_n = 3$, todas las cifras del número deben ser 1 menos una que debe ser un 3.

Si $S_n - 1 = 1$, la suma de todas las cifras debe ser 2. Pero esto es imposible, ya que en el número sabemos que hay un 3 entre sus cifras.

La única solución será el 1111.



Calculamos que tarda cada uno de ellos.

Aitana:

$$t_A = \frac{e}{v_A} = \frac{5'3}{3} = 1'7\hat{6}\,h = \frac{176-17}{90}\,h = \frac{159}{90}\,h = \frac{53}{30}\,h = 1\,h + \frac{23}{30}\,h = 1\,h\,46'$$

Por tanto Aitana llega a las 11h 46´ya que sale a las 10h

Laia:

$$t_L = \frac{e}{v_L} = \frac{5'3}{5} = 1'06\,h = 1\,h + 0'06h = 1\text{h} + 0'06 \cdot 60\,' = 1h\,3'0.6' = 1h\,3'36''$$

Por tanto Laia llega a las 11h 13´ 36´´ ya que sale a las 10h 10´

Dani:

$$t_D = \frac{e}{v_D} = \frac{5'3}{6} = 0h + 0'88\hat{3}\,h = 0'88\hat{3} \cdot 60' = 53'$$

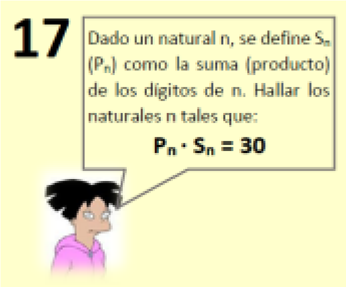
Por tanto Dani llega a las 11h 23´ya que sale a las 10h 30´

Con todo esto podemos concluir que el orden de llegada es:

Laia en primer lugar

Dani a 9´24” de Laia

Aitana a 23´de Dani

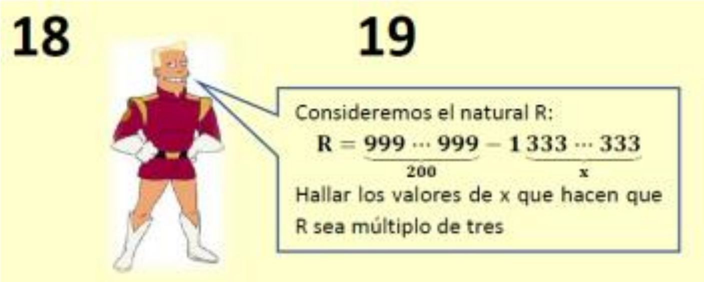


Lo primero que podemos concluir es que n no puede tener un 0 en sus cifras ya que en ese caso P_n sería 0

Como $P_n \cdot S_n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ podemos concluir que 30 se puede expresar de 8 formas como un producto:

$S_n = 1$ $P_n = 30$ $\Rightarrow$ $n = 1$ $\Rightarrow$ P_n=1≠ 30 NO ES POSIBLE
$S_n = 2$ $P_n = 15$ $\Rightarrow$ $n = 2$ $\Rightarrow$ P_n=2≠ 15 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ n=11 $\Rightarrow$ P_n=1≠ 15 NO ES POSIBLE
$S_n = 3$ $P_n = 10$ $\Rightarrow$ $n = 3$ $\Rightarrow$ P_n=3≠ 10 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ n=111 $\Rightarrow$ P_n=1≠ 10 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ $n = 21$ $\Rightarrow$ P_n=2≠10 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ n=12 $\Rightarrow$ P_n=2≠ 10 NO ES POSIBLE
$S_n = 5$ $P_n = 6$ $\Rightarrow$ $n = 11111$ $\Rightarrow$ P_n=1≠ 6 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ n=1112 y sus permutaciones $\Rightarrow$ P_n=2≠ 6 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ $n = 113$ *y sus permutaciones* $\Rightarrow$ P_n=3≠6 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ n=14 ó 41 $\Rightarrow$ P_n=4≠ 6 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ $n = 5$ $\Rightarrow$ P_n=5≠6 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ **n=23 ó 32** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_n}$**=6** **SON SOLUCIÓN**
$S_n = 6$ $P_n = 5$ $\Rightarrow$ $n = 111111$ $\Rightarrow$ P_n=1≠ 5 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ n=11112 y sus permutaciones $\Rightarrow$ P_n=2≠ 5 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ $n = 1113$ *y sus permutaciones* $\Rightarrow$ P_n=3≠5 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ n=114 y sus permutaciones $\Rightarrow$ P_n=4≠ 5 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ **n=15 ó 51** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_n}$**=5** **SON SOLUCIÓN** $\Rightarrow$ $n = 123$ $\Rightarrow$ P_n=6≠5 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ $n = 42$ ó 24 $\Rightarrow$ P_n=8≠5 NO ES POSIBLE $\Rightarrow$ $n = 6$ $\Rightarrow$ P_n=6≠5 NO ES POSIBLE
$S_n = 10$ $P_n = 3$ $\Rightarrow$ **la única posibilidad es n=11111113 y sus permutaciones cuyo** $\boldsymbol{P_n}$**=3 . Hay 8 posibles números cambiando el 3 de posición**
$S_n = 15$ $P_n = 2$ $\Rightarrow$ **la única posibilidad es un número de 14 cifras de la forma n=11111111111112 y sus permutaciones cuyo** $\boldsymbol{P_n}$**=2 . Hay 14 posibles números cambiando el 2 de posición**
$S_n = 30$ $P_n = 1$ $\Rightarrow$ **la única posibilidad es un número de 30 cifras de la forma todas ellas sean 1 cuyo** $\boldsymbol{P_n}$**=1 .**

Como conclusión, hay 21 números naturales que son solución de este problema

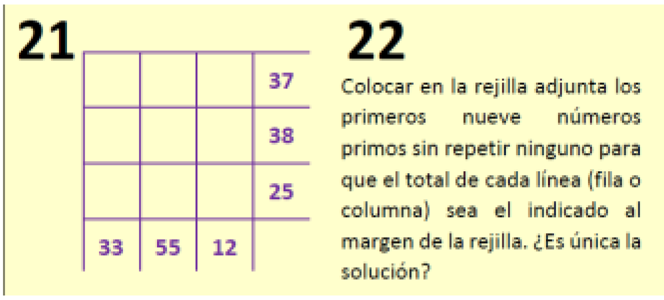


Si a un número de x cifras iguales a 9 restamos un número de x cifras iguales a 3, el resultado es un número de x cifras iguales a 6 con lo que la suma de las cifras del número R quedará de la siguiente forma:

$$\Sigma \;=\; 9 \cdot [20-(x+1)] + 8 + 6x = 1800 - 9x - \;9\; + 8 + 6x = 1800 - 3x - 1 =$$

$= 1799 - 3x =$ múltiplo de 3 $\Rightarrow$ Para que esta suma sea un múltiplo de 3, 1799 debería ser un múltiplo de 3 pero esto no es cierto.

La conclusión es que no existe solución para este problema.



Los 9 números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23

El único número par es el 2. Como la suma de impares da un resultado impar, el 2 ha de estar en la casilla en que coinciden dos resultados pares por tanto estará en la fila 2 y columna 3

Como esa columna debe sumar 12, buscamos dos números que sumen 10 y lo escribimos como 10=3+7. Escribimos la columna de la siguiente forma por ejemplo:

		7	17
		2	38
		3	25
33	55	12	

Completamos la última fila. Puesto que los números deben sumar 25 y ya tenemos un 3, los otros dos deberán sumar 22. Los primos que suman 22 será 17 y 5, por tanto quedaría la tabla de la siguiente forma por ejemplo:

		7	17
		2	38
17	5	3	25
33	55	12	

Debemos completar la segunda columna cuya suma será 55 – 5 =50 pero no hay dos números primos en esa lista que sumen 50 ya que la mayor suma es 19 + 23 = 42. Por tanto, esta opción no es posible y cambiamos las casillas de la última fila. La tabla quedará:

		7	17
		2	38
5	17	3	25
33	55	12	

Obtenemos ahora los números de la segunda columna. Deben sumar 55 – 17 = 38. Pero esto es imposible pues: 19 + 23 = 42   13 + 19 = 32   13 +23 = 36   11 + 23 = 34

Por tanto concluimos que la tabla es incorrecta desde el principio y volvemos a comenzar. Escribiremos al revés los números de la última columna y completamos la última fila con los números que suman 25 – 7 = 18 = 13 + 5, quedando la tabla de la siguiente forma:

		3	17
		2	38
13	5	7	25
33	55	12	

Esto no es posible porque 33 – 13 = 20 y no podemos obtener esta suma. Por tanto, escribimos los números de esa fila al revés, quedando:

		3	17
		2	38
5	13	7	25
33	55	12	

Completamos la segunda columna: 55 – 13 = 42 = 19 + 23 y escribimos:

	19	3	17
	23	2	38
13	5	7	25
33	55	12	

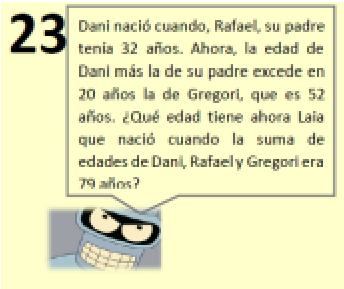
Como 37 – 19 – 3 = 15, no es posible esta posición con lo que cambiamos el orden de la segunda columna y será:

	23	3	17
	19	2	38
13	5	7	25
33	55	12	

Ya sólo quedará completar las dos últimas casillas y obtenemos la tabla solución:

11	23	3	17
17	19	2	38
13	5	7	25
33	55	12	

La solución es única ya que lo hemos demostrado con la construcción de la solución.



Sea x la edad actual de Rafael. La edad actual de Dani será $x - 32$.

De la frase relativa a Gregori tenemos:

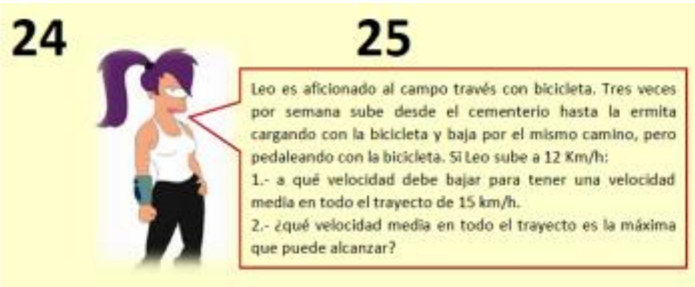
$$x - 32 + x = 52 + 20 \Rightarrow 2x = 104 \Rightarrow x = 52$$

Por lo tanto, en la actualidad Rafael tiene 52 años y Dani tiene $52 - 32 = 20$ años.

Si Laia tiene y años, hace y años la suma de las edades de Dani, Rafael y Gregori era 79:

$$52 - y + 20 - y + 52 - y = 79 \Rightarrow y = 15$$

Por lo tanto Laia nació hace 15 años y esa es su edad actual.



Sean v_S la velocidad media a la que sube Leo a la ermita, t_S el tiempo que tarda en la subida y E el espacio que hay desde el cementerio hasta la ermita. Análogamente, sean v_B la velocidad media de bajada, t_B el tiempo que tarda en la bajada y v_M la velocidad media de todo el trayecto. Entonces:

$v_M = \frac{2E}{t_S + t_B}$; $v_S = \frac{E}{t_S} \Rightarrow t_S = \frac{E}{v_S}$; $v_B = \frac{E}{t_B} \Rightarrow t_B = \frac{E}{v_B}$

$$v_M = \frac{2E}{\dfrac{E}{v_S} + \dfrac{E}{v_B}} = \frac{2}{\dfrac{1}{v_S} + \dfrac{1}{v_B}}$$

En nuestro caso: $v_M = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{v_B}}$

Por tanto:

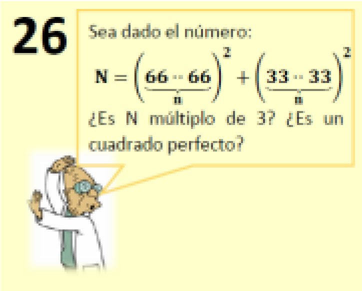
$$15 = \frac{2}{\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{v_B}} \Rightarrow \frac{1}{v_B} = \frac{2}{15} - \frac{1}{12} = \frac{1}{20}$$

De donde $v_B = 20\ km/h$ para que la velocidad media de todo el trayecto sea 15 km/h .

Como $v_B > 0$, se tiene que $\frac{1}{v_B} > 0$ y, por tanto:

$$v_M = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{v_B}} < \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24$$

Por tanto, la velocidad media máxima que se puede conseguir es 24 km/h.

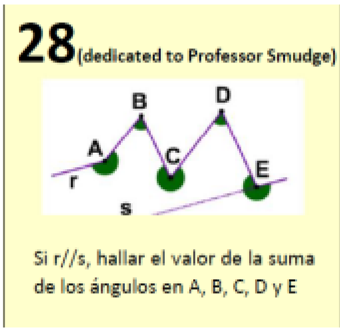


Dado que tanto 66⋯66 como 33⋯33 son múltiplos de 3, sus cuadrados también serán múltiplos de tres y N será siempre múltiplo de 3, sea cual sea el valor de n.

Veamos si puede ser un cuadrado perfecto:

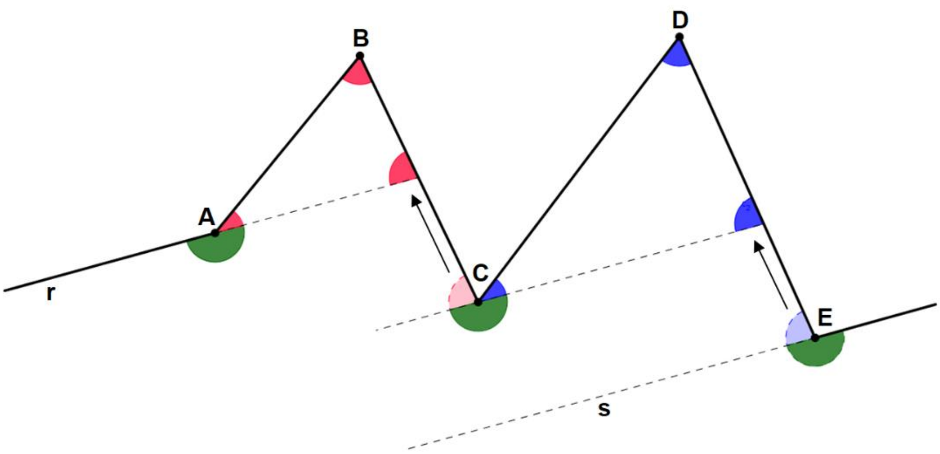
$66...66^2 + 33...33^2 = (6 \cdot 11...11)^2 + (3 \cdot 11...11)^2 = 36 \cdot 11...11^2 + 9 \cdot 11...11^2 =$
$= (36+9) \cdot 11...11^2 = 45 \cdot 11...11^2$

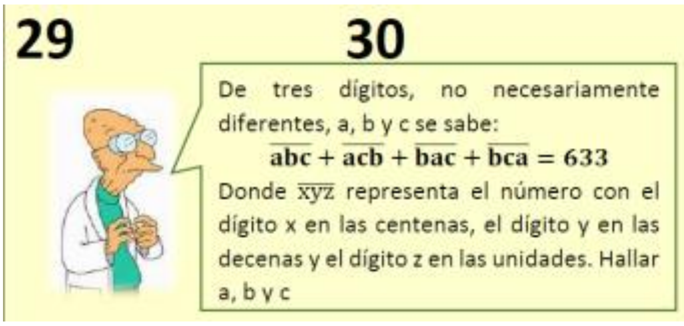
Como 45 tiene un único 5 en su descomposición y $11...11^2$ no tiene ningún 5 en su descomposición, N no puede ser un cuadrado perfecto para ningún valor de n, ya que la cantidad de cincos debería ser par para que fuera un cuadrado perfecto.



Descomponiendo y desplazando convenientemente algunos ángulos, observamos que suman tres ángulos llanos y los ángulos interiores de dos triángulos:

$5 \cdot 180^o = 900^o$ suman los cinco ángulos





Tanto en la columna de las unidades como en la de las decenas aparecen las mismas letras: a, b, c, c.

Como en ambos casos la suma es 3, a+b+2c no puede ser ni 13, ni 23, ni 33, sino solo 3.

Si consideramos que ninguno de los cuatro números puede empezar por 0, a y b han de ser diferentes de 0 y, por tanto, c ha de ser 0 necesariamente, por lo que a y b han de sumar 3.

Las posibles soluciones son:

a=1, b=2, c=0

a=2, b=1, c=0

Si se acepta que a o b puedan ser 0, tendríamos otras dos posibilidades:

a=0, b=3, c=0

a=3, b=0, c=0