

NOVEMBRE 2022

1



2

Dani té seixanta boles i les seues germanes Laia i Aitana cap. Dani decideix agafar sis boles i donar tres a cadascuna. El creu que repetint aquesta operació diverses vegades arribarà un moment en què cadascun dels tres tindrà la mateixa quantitat de boles. Té raó o cal fer algun xicotet arranjament?

No és possible fer-ho tal com diu. Si hi ha 60 boles en total, al final n'han de tenir 20 cadascun, per la qual cosa ha de repartir un total de 40 entre les seues germanes, i no ho pot fer si cada vegada agafa 6 boles, ja que 6 no és divisor de 40.

Per arreglar-ho, hi ha diverses opcions: una forma seria que en lloc de 6 cada vegada, repartira una quantitat que siga divisor de 40, com 2, 4, 8 o 10 (ha de ser parell per poder donar la meitat a cadascuna).

L'altra forma seria començar repartint-ne 6 cada vegada fins que en repartisca 36 en total, i l'últim repartiment fer-lo de 4 boles.

3

La mitjana de huit imparells consecutius és 42. Calcular la mitjana de tots els naturals que hi ha entre l'imparell més xicotet i el més gran



La mitjana continuaria sent 42, ja que el 42 seria el nombre central de la successió.

Si la mitjana dels imparells és 42, els huit nombres seran:

35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49

$$\overline{x}_8 = S_8 : 8 = (35 + 49) \frac{8}{2} : 8 = 42$$

Tots els naturals entre 35 i 49:

35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49

$$\overline{x}_{15} = S_{15} : 15 = (35 + 49) \frac{15}{2} : 15 = 42$$

4



5

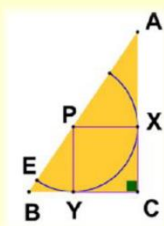
La qualificació de Laia en una determinada assignatura és la mitjana aritmètica de dotze controls que realitza al llarg del curs. Després dels primers huit controls té una nota mitjana de 4. Quina mitjana ha d'obtenir en els quatre últims controls perquè la mitjana de tots els dotze controls siga major o igual a cinc? Si en els controls nové i dècim trau un sis i un cinc, quina mitjana ha de traure en els dos últims controls per a traure una mitjana en tots els controls major o igual a cinc?

Si la mitjana dels primers vuit controls és de 4, sabem que les vuit notes sumen $S_8 = 8 \cdot 4 = 32$.

Perquè la mitjana dels dotze controls siga cinc, les dotze notes han de sumar $S_{12} = 12 \cdot 5 = 60$, de manera que li falten $60 - 32 = 28$ punts, que ha d'aconseguir com a suma dels quatre darrers controls. Aleshores la mitjana dels quatre darrers controls ha de ser $28 : 4 = 7$ punts.

Si en els controls nové i desé trau un sis i un cinc, fan un total d'11 punts, de manera que necessita $28 - 11 = 17$ punts entre els dos últims controls. La mitjana serà aleshores de $17/2 = 8,5$ punts.

7



8

Siga $\triangle ABC$ un triangle rectangle en C. Siga P un punt d'AB tal que PXYC és un quadrat de costat 8 cm. Amb centre en P es traça una circumferència de radi 8 que talla al segment PB en E. Si $BE = 2$ cm, trobeu l'àrea i el perímetre de $\triangle ABC$.

En el triangle PBY coneixem l'altura, 8 cm, i la hipotenusa, $8 + 2 = 10$ cm. Per saber quant mesura la base, fem servir el teorema de Pitàgores:

$$BY = \sqrt{BP^2 - PY^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm}$$

Com que els triangles PBY i APX són semblants i coneixem les mesures de les dues bases, podem calcular l'altura i la hipotenusa d'APX:

$$\text{altura: } \frac{AX}{PY} = \frac{PX}{BY} \rightarrow \frac{AX}{8} = \frac{8}{6} \rightarrow AX = \frac{64}{6} = \frac{32}{3} \text{ cm}$$

$$\text{hipotenusa: } \frac{AP}{PE} = \frac{PX}{BY} \rightarrow \frac{AP}{10} = \frac{8}{6} \rightarrow AP = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \text{ cm}$$

En el triangle ABC la base mesura $BY + YC = 6 + 8 = 14$ cm.

L'altura: $AX + XC = \frac{32}{3} + 8 = \frac{56}{3}$ cm.

La hipotenusa: $AP + PE + BE = \frac{40}{3} + 8 + 2 = \frac{70}{3}$ cm.

$$\text{Àrea} = \frac{14 \cdot \frac{56}{3}}{2} = \frac{392}{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetre} = 14 + \frac{56}{3} + \frac{70}{3} = 14 + \frac{126}{3} = 56 \text{ cm}.$$

9 Siga
 $R = \underbrace{8888 \dots 88}_{200} - \underbrace{4343 \dots 43}_{140}$
 És R un quadrat perfecte?



Si fem la resta, obtenim que $R = 88 \dots 84545 \dots 45$, on el 8 apareix 60 vegades i el 45 apareix 70 vegades.

És evident que R és múltiple de 3, ja que si sumem totes les seues xifres obtindrem:

$$8 \cdot 60 + 4 \cdot 70 + 5 \cdot 70 = 8 \cdot 3 \cdot 20 + 9 \cdot 70$$

Si R fora un quadrat perfecte, en ser múltiple de 3 també ho seria de 9, però això no es compleix, ja que encara que $9 \cdot 70$ sí que ho és, $8 \cdot 60$ no.

De la qual cosa es dedueix que R no pot ser un quadrat perfecte.

10



11

En una divisió entera el divisor és 49 unitats major que el residu i el quocient és 182. Si augmentem 2372 unitats el dividend i mantenim inalterat el divisor el quocient augmenta 28 unitats i el residu és el màxim permés. Trobar la primera divisió entera

Primera divisió

$$\begin{array}{r|l} D & 49+R \\ \hline & 182 \\ R/ & \end{array}$$

Segona divisió

$$\begin{array}{r|l} D+2372 & 49+R \\ \hline & 182+28 \\ 49+R-1/ & \end{array}$$

Amb la prova de la divisió obtenim:

En la primera: $D = (49+R) \cdot 182 + R$

En la segona: $D + 2372 = (49+R)(182+28) + 48 + R$

Resolent el sistema format per les dues: $R = 34$, $D = 15140$ i $49+R = 83$

D'on la primera divisió serà:

$$\begin{array}{r|l} 15140 & 83 \\ \hline & 182 \\ 34/ & \end{array}$$

12

Calculeu quants capicues de cinc o menys xifres existeixen. Si s'ordenaren de menor a major, quin capicua ocuparia la posició 195?



Capicues de:	Xifres que es trien	Menor	Major	Total	Total acumulat
Dues xifres	1	11	99	9	9
Tres xifres	2	101	999	90	99
Quatre xifres	2	1001	9999	90	189
Cinc xifres	3	10001	99999	900	

Per arribar a la posició 195, haurem de comptar tots els capicues de 2, 3 i 4 xifres (189 en total) i encara ens faltaran sis de cinc xifres.

El que busquem serà el **10501** (els primers de 5 xifres seran **10001**, **10101**, **10201**, **10301**, **10401** i **10501**).

14

Donat un natural n , es defineix $S_n(P_n)$ com la suma (producte) dels dígit de n . Trobeu els naturals n tals que:

$$P_n \cdot S_n = 3 + P_n$$



De la igualtat $P_n \cdot S_n = 3 + P_n$ podem deduir que $P_n \cdot (S_n - 1) = 3$

I, com tant P_n com S_n són nombres naturals, l'única forma que açò es complisca és que un dels factors siga un 1 i l'altre un 3.

Opció 1: $P_n = 1$, $S_n - 1 = 3$

Si $P_n = 1$, totes les xifres del nombre han de ser 1.

Si $S_n - 1 = 3$, la suma de totes les xifres ha de ser 4.

El nostre nombre estarà format per quatre uns: **1111**

Opció 2: $P_n = 3$, $S_n - 1 = 1$

Si $P_n = 3$, totes les xifres del nombre han de ser 1 excepte una que ha de ser un 3.

Si $S_n - 1 = 1$, la suma de totes les xifres ha de ser 2. Però açò és impossible, ja que sabem que en el nombre hi ha un 3 entre les xifres.

L'única solució serà el 1111.

15



16

Dani, Laia i Aitana participen en una de les activitats de les festes patronals del seu poble: la volta al voltant de Benirredrà. Una carrera camp a través de 5,3 km. Aitana ix a les 10.00 hores a una velocitat de 3 km/h. Deu minuts més tard ix Laia que corre a una velocitat de 5 km/h. Vint minuts més tard ix Dani a una velocitat de 6 km/h. Si cap d'ells es para ni altera la seua velocitat, esbrina l'ordre d'arribada dels tres germans i el temps que transcorre entre l'arribada d'ells.

Calculem el que tarda cada un d'ells.

Aitana:

$$t_A = \frac{e}{v_A} = \frac{5,3}{3} = 1,76\hat{6} h = \frac{176-17}{90} h = \frac{159}{90} h = \frac{53}{30} h = 1 h + \frac{23}{30} h = 1 h 46 min$$

Per tant Aitana arriba a les 11 h 46 min, perquè ix a les 10 h

Laia:

$$t_L = \frac{e}{v_L} = \frac{5,3}{5} = 1,06 h = 1 h + 0,06 h = 1 h + 0,06 \cdot 60' = 1 h 3'0,6' = 1 h 3 min 36 s$$

Per tant Laia arriba a les 11 h 13 min 36 s, perquè ix a les 10 h 10 min

Dani:

$$t_D = \frac{e}{v_D} = \frac{5,3}{6} = 0,88\hat{3} h = 0,88\hat{3} \cdot 60' = 53 min$$

Per tant Dani arriba a les 11 h 23 min, perquè ix a les 10 h 30 min

Amb tot açò podem concloure que l'ordre d'arribada és:

Laia en primer lloc

Dani a 9 min 24 min de Laia

Aitana a 23 min de Dani

17

Donat un natural n , es defineix S_n (P_n) com la suma (producte) dels dígits de n . Trobeu els naturals n tals que:

$$P_n \cdot S_n = 30$$



El primer que podem concloure és que n no pot tenir un 0 en les seues xifres ja que en aquest cas P_n seria 0.

Com que $P_n \cdot S_n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ podem concloure que 30 es pot expressar de 8 formes com un producte:

$S_n = 1 \quad P_n = 30 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow P_n = 1 \neq 30$	NO ÉS POSSIBLE
$S_n = 2 \quad P_n = 15 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow P_n = 2 \neq 15$ $\Rightarrow n = 11 \Rightarrow P_n = 1 \neq 15$	NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE
$S_n = 3 \quad P_n = 10 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow P_n = 3 \neq 10$ $\Rightarrow n = 111 \Rightarrow P_n = 1 \neq 10$ $\Rightarrow n = 21 \Rightarrow P_n = 2 \neq 10$ $\Rightarrow n = 12 \Rightarrow P_n = 2 \neq 10$	NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE
$S_n = 5 \quad P_n = 6 \Rightarrow n = 11111 \Rightarrow P_n = 1 \neq 6$ $\Rightarrow n = 1112$ i les permutacions $\Rightarrow P_n = 2 \neq 6$ $\Rightarrow n = 113$ i les permutacions $\Rightarrow P_n = 3 \neq 6$ $\Rightarrow n = 14$ ó $41 \Rightarrow P_n = 4 \neq 6$ $\Rightarrow n = 5 \Rightarrow P_n = 5 \neq 6$ $\Rightarrow n = 23$ ó $32 \Rightarrow P_n = 6$	NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE SÓN SOLUCIÓ
$S_n = 6 \quad P_n = 5 \Rightarrow n = 111111 \Rightarrow P_n = 1 \neq 5$ $\Rightarrow n = 11112$ i les permutacions $\Rightarrow P_n = 2 \neq 5$ $\Rightarrow n = 1113$ i les permutacions $\Rightarrow P_n = 3 \neq 5$ $\Rightarrow n = 114$ i les permutacions $\Rightarrow P_n = 4 \neq 5$ $\Rightarrow n = 15$ ó $51 \Rightarrow P_n = 5$ $\Rightarrow n = 123 \Rightarrow P_n = 6 \neq 5$ $\Rightarrow n = 42$ ó $24 \Rightarrow P_n = 8 \neq 5$ $\Rightarrow n = 6 \Rightarrow P_n = 6 \neq 5$	NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE SÓN SOLUCIÓ NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE NO ÉS POSSIBLE
$S_n = 10 \quad P_n = 3 \Rightarrow$ l'única possibilitat és $n = 11111113$ i les permutacions en què $P_n = 3$. Hi ha 8 possibles nombres canviant el 3 de posició	
$S_n = 15 \quad P_n = 2 \Rightarrow$ l'única possibilitat és un nombre de 14 xifres de la forma $n = 11111111111112$ y les permutacions en què $P_n = 2$. Hi ha 14 possibles nombres canviant el 2 de posició	
$S_n = 30 \quad P_n = 1 \Rightarrow$ l'única possibilitat és un nombre de 30 xifres i que totes siguen 1, de manera que $P_n = 1$.	

Com a conclusió, hi ha 21 nombres naturals que són solució d'aquest problema.

18



19

Considerem el natural R:

$$R = \underbrace{999 \dots 999}_{200} - \underbrace{1333 \dots 333}_x$$

Trobeu els valors de x que fan que R siga múltiple de tres

Si a un nombre de x xifres iguals a 9 li restem un nombre de x xifres iguals a 3, el resultat és un nombre de x xifres iguals a 6, de manera que la suma de les xifres del nombre R quedarà de la següent forma:

$$\begin{aligned} \Sigma &= 9 \cdot [20 - (x + 1)] + 8 + 6x = 1800 - 9x - 9 + 8 + 6x = 1800 - 3x - 1 = \\ &= 1799 - 3x = \text{múltiple de } 3 \Rightarrow \text{Perquè aquesta suma siga un múltiple de 3, } 1799 \text{ hauria de ser un múltiple de 3, però això no és cert.} \end{aligned}$$

La conclusió és que no hi ha solució per a aquest problema.

21

			37
			38
			25
33	55	12	

22

Col·loqueu en la reixeta adjunta els primers nou nombres primers sense repetir-ne cap perquè el total de cada línia (fila o columna) siga l'indicat al marge de la reixeta. És única la solució?

Els primers 9 nombres primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23.

L'únic nombre parell és el 2. Com que la suma tres nombres imparells dona un resultat imparell, el 2 ha d'estar en la casella en què coincideixen dos resultats parells. Per tant estarà en la fila 2 i la columna 3

Com que aquesta columna ha de sumar 12, busquem dos números que sumen 10 i ho escrivim com a $10 = 3 + 7$. Escrivim la columna de la següent forma, per exemple:

		7	17
		2	38
		3	25
33	55	12	

Completem l'última. Com que els nombres han de sumar 25 i ja tenim un 3, els altres dos hauran de sumar 22. Els primers que sumen 22 seran 17 i 5. Per tant la taula quedaria de la forma següent, per exemple:

		7	17
		2	38
17	5	3	25
33	55	12	

Hem de completar la segona columna, la suma de la qual serà $55 - 5 = 50$. Però no hi ha dos nombres primers en la llista que sumen 50, ja que la suma més gran és $19 + 23 = 42$.

Per tant, aquesta opció no és possible i canviem les caselles de la darrera fila. La taula quedarà:

		7	17
		2	38
5	17	3	25
33	55	12	

Obtenim ara els nombres de la segona columna. Han de sumar $55 - 17 = 38$. Però això és impossible doncs: $19 + 23 = 42$, $13 + 19 = 32$, $13 + 23 = 36$, $11 + 23 = 34$.

Per tant, concloem que la taula és incorrecta des del principi i tornem a començar. Escriurem al revés els nombres de l'última columna i completem l'última fila amb els nombres que sumen $25 - 7 = 18 = 13 + 5$, quedant la taula de la forma següent:

		3	17
		2	38
13	5	7	25
33	55	12	

Això no és possible perquè $33 - 13 = 20$ i no podem obtenir aquesta suma. Per tant, escrivim els nombres d'aquesta fila al revés, i obtenim:

		3	17
		2	38
5	13	7	25
33	55	12	

Completem la segona columna: $55 - 13 = 42 = 19 + 23$ i escrivim:

	19	3	17
	23	2	38
13	5	7	25
33	55	12	

Com $37 - 19 - 3 = 15$, no és possible aquesta posició, per la qual cosa canviem l'ordre de la segona columna i queda:

	23	3	17
	19	2	38
13	5	7	25
33	55	12	

Ja sols quedarà completar les dues últimes caselles i obtenim la taula solució:

11	23	3	17
17	19	2	38
13	5	7	25
33	55	12	

La solució és única, ja que ho hem demostrat amb la construcció de la solució.

23

Dani va nèixer quan, Rafael, el seu pare tenia 32 anys. Ara, l'edat de Dani més la del seu pare excedeix en 20 anys la de Gregori, que és 52 anys. Quina edat té ara Laia que va nèixer quan la suma d'edats de Dani, Rafael i Gregori era 79 anys?



Siga x l'edat actual de Rafael. L'edat actual de Dani serà $x - 32$.

De la frase relativa a Gregori tenim:

$$x - 32 + x = 52 + 20 \Rightarrow 2x = 104 \Rightarrow x = 52$$

Per tant, actualment Rafael té 52 anys i Dani té $52 - 32 = 20$ anys.

Si Laia té y anys, fa y anys la suma de les edats de Dani, Rafael i Gregori era 79:

$$52 - y + 20 - y + 52 - y = 79 \Rightarrow y = 15$$

Per tant Laia va nèixer fa 15 anys i eixa és l'edat actual.

24



25

Leo és aficionat al camp través amb bicicleta. Tres vegades per setmana puja des del cementeri fins a l'ermita carregant amb la bicicleta i baixa pel mateix camí, però pedalant amb la bicicleta. Si Leo puja a 12 Km/h:

- 1.- a quina velocitat ha de baixar per a tindre una velocitat mitjana en tot el trajecte de 15 km/h.
- 2.- quina velocitat mitjana en tot el trajecte és la màxima que pot aconseguir?

Siguen v_p la velocitat mitjana amb la qual puja Leo a l'ermita, t_p el temps que tarda en la pujada i E l'espai que hi ha des del cementeri fins a l'ermita. Anàlogament, siguen v_B la velocitat mitjana de baixada, t_B el tiempo que tarda en la baixada y v_M la velocitat mitjana de tot el trajecte. Aleshores:

$$v_M = \frac{2E}{t_p + t_B}; v_s = \frac{E}{t_p} \Rightarrow t_s = \frac{E}{v_p}; v_B = \frac{E}{t_B} \Rightarrow t_B = \frac{E}{v_B}$$

$$v_M = \frac{2E}{\frac{E}{v_p} + \frac{E}{v_B}} = \frac{2}{\frac{1}{v_p} + \frac{1}{v_B}}$$

$$\text{En el nostre cas: } v_M = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{v_B}}$$

Per tant:

$$15 = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{v_B}} \Rightarrow \frac{1}{v_B} = \frac{2}{15} - \frac{1}{12} = \frac{1}{20}$$

D'on $v_B = 20 \text{ km/h}$ perquè la velocitat mitjana de tot el trajecte siga 15 km/h .

Com $v_B > 0$, tenim que $\frac{1}{v_B} > 0$ i, per tant:

$$v_M = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{v_B}} < \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24$$

Aleshores la velocitat mitjana màxima que es pot aconseguir és 24 km/h.

26 Siga donat el número:

$$N = \left(\frac{66 \cdots 66}{n} \right)^2 + \left(\frac{33 \cdots 33}{n} \right)^2$$

 És N múltiple de 3? És un quadrat perfecte?



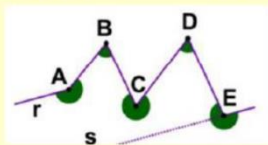
Donat que tant 66...66 com 33...33 són múltiples de 3, els quadrats també seran múltiples de tres i N serà sempre múltiple de 3, siga quin siga el valor de n.

Vegem si pot ser un quadrat perfecte:

$$\begin{aligned} 66 \dots 66^2 + 33 \dots 33^2 &= (6 \cdot 11 \dots 11)^2 + (3 \cdot 11 \dots 11)^2 = 36 \cdot 11 \dots 11^2 + 9 \cdot 11 \dots 11^2 = \\ &= (36+9) \cdot 11 \dots 11^2 = 45 \cdot 11 \dots 11^2 \end{aligned}$$

Com 45 té un únic 5 en la descomposició i 11...11² no té cap 5 en la descomposició, N no pot ser un quadrat perfecte per a cap valor de n, ja que la quantitat de cincs hauria de ser parell perquè fora un quadrat perfecte.

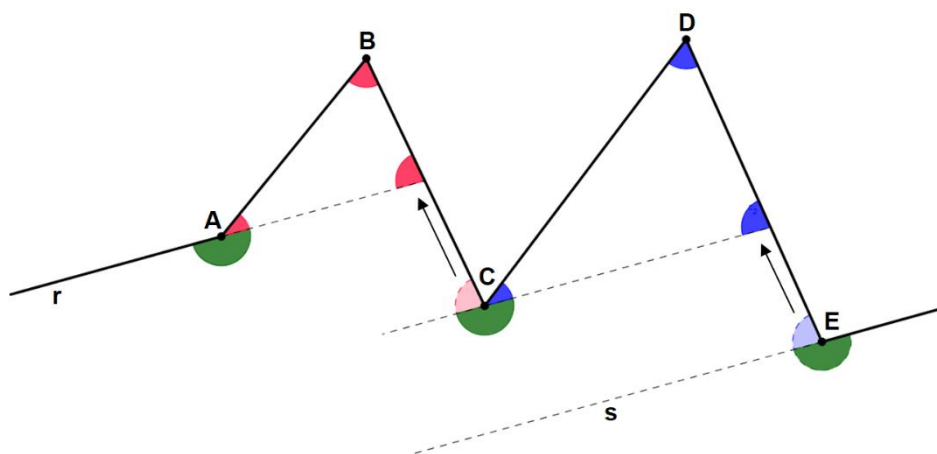
28 (dedicated to Professor Smudge)



Si $r \parallel s$, trobeu el valor de la suma dels angles en A, B, C, D i E

Descomponent i desplaçant convenientment alguns angles, observem que sumen tres angles plans i els angles interiors de dos triangles:

$$5 \cdot 180^\circ = 900^\circ \text{ sumen els cinc angles}$$



29



30

De tres dígit, no necessàriament diferents, a, b i c se sap:

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} = 633$$

on $\overline{xyz}$ representa el número amb el dígit x en les centenes, el dígit y en les desenes i el dígit z en les unitats. Trobar a, b i c

Tant en la columna de les unitats com en la de les desenes apareixen les mateixes lletres: a, b, c, c.

Com en ambdós casos la suma és 3, $a+b+2c$ no pot ser ni 13, ni 23, ni 33, sinó sols 3.

Si considerem que cap dels quatre nombres pot començar per 0, a i b han de ser diferents de 0 i, per tant, c ha de ser 0 necessàriament, per la qual cosa a i b han de sumar 3.

Les possibles solucions són:

$$a=1, b=2, c=0$$

$$a=2, b=1, c=0$$

Si s'accepta que a o b puguin ser 0, tindríem dues possibilitats més:

$a=0, b=3, c=0$

$a=3, b=0, c=0$