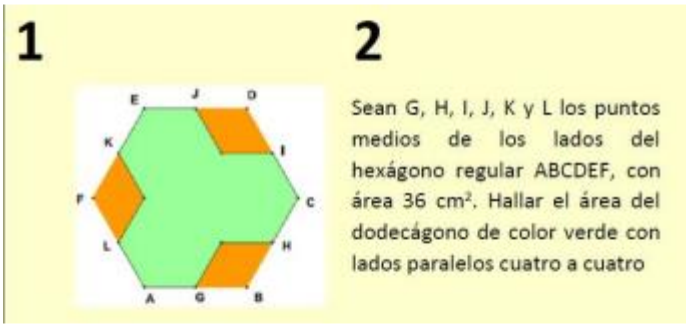
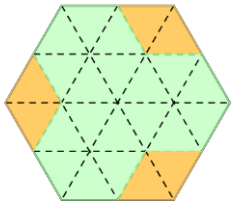
DICIEMBRE 2022

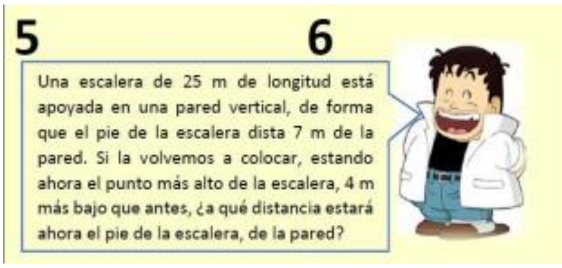


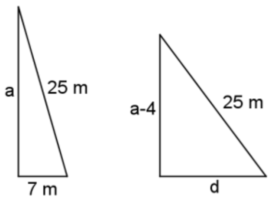


Si troceamos el hexágono como se ve en la imagen, teniendo en cuenta que el hexágono está formado por 24 triangulitos y el dodecágono por 18, el área del dodecágono será:

$$A = \frac{36}{24} \cdot 18 = 27\ cm^2$$

$$8^n = 16^{21} \ \rightarrow\ 2^{3n} = 2^{4\cdot 21} = 2^{84} \ \rightarrow\ 3n = 84 \ \rightarrow\ n = 28$$





Los dos triángulos serán:

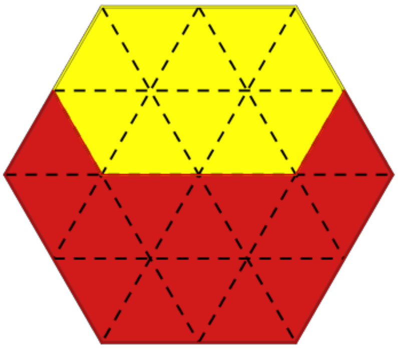
Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$$a = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\ m \ \rightarrow\ a - 4 = 20\ m \ \rightarrow\ d = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15\ m$$


7

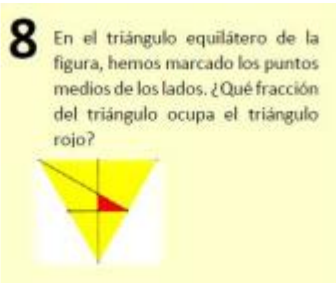
En la figura hay un hexágono regular ABCDEF de área 180 cm^2. M y N son los puntos medios de AF y ED, respectivamente. Además, MO||AB; OP||BC; PN||CD y MO = MF = PN. Hallar el área del octógono ABCDNPOM

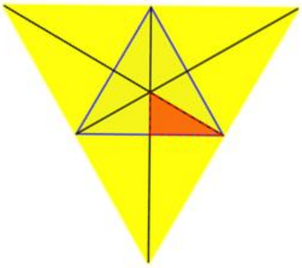
14



El hexágono grande está formado por 24 triángulos y el pequeño por 14.

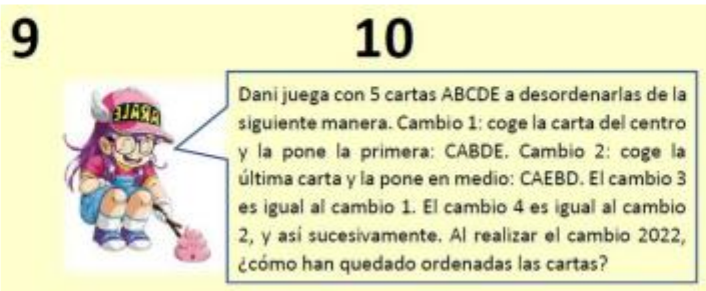
El área del pequeño será $A = \frac{180}{24} \cdot 14 = 105\ cm^2$.


8 En el triángulo equilátero de la figura, hemos marcado los puntos medios de los lados. ¿Qué fracción del triángulo ocupa el triángulo rojo?



Observando las líneas añadidas, el triángulo amarillo se puede descomponer en 4 triángulos equiláteros iguales, y cada uno de ellos en 6 triángulos de igual superficie que el rojo. El amarillo estará formado por 6·4=24 triángulos con la misma superficie que el rojo.

La fracción del triángulo equilátero ocupada por el triángulo rojo será 1/24.


9 **10**

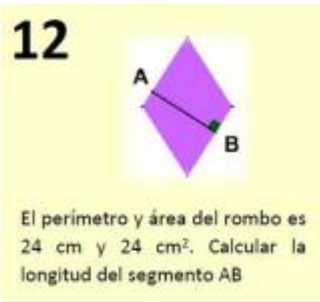
Dani juega con 5 cartas ABCDE a desordenarlas de la siguiente manera. Cambio 1: coge la carta del centro y la pone la primera: CABDE. Cambio 2: coge la última carta y la pone en medio: CAEBD. El cambio 3 es igual al cambio 1. El cambio 4 es igual al cambio 2, y así sucesivamente. Al realizar el cambio 2022, ¿cómo han quedado ordenadas las cartas?

Veamos cuantos cambios hay que hacer para llegar a la posición inicial:

Carta que se mueve	Nº de cambio	Distribución de las cartas				
		A	B	C	D	E
central	1º	C	A	B	D	E
final	2º	C	A	E	B	D
central	3º	E	C	A	B	D
final	4º	E	C	D	A	B
central	5º	D	E	C	A	B
final	6º	D	E	B	C	A
central	7º	B	D	E	C	A
final	8º	B	D	A	E	C
central	9º	A	B	D	E	C
final	10º	A	B	C	D	E

Con lo que cada 10 veces que cambiemos la posición de las cartas volvemos a empezar. Si hace 2022 cambios, la distribución final coincidirá con la del 2º cambio (2022=202·10+2) de donde quedarán:

C	A	E	B	D



Del perímetro 24 cm deducimos que cada lado mide 6 cm.

Si apoyamos el rombo sobre el lado que contiene el punto B, el segmento AB sería la altura y el lado la base (6 cm). El área se calcula multiplicando base · altura= 24 cm².

La altura será de 4 cm.

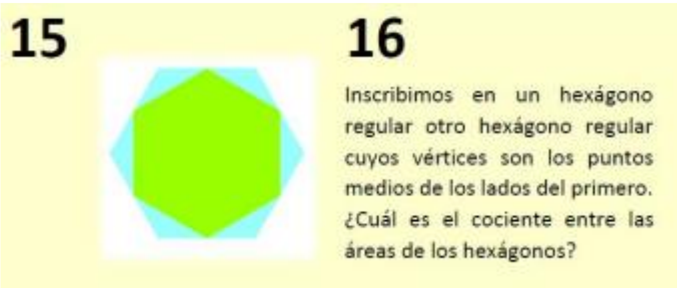
$$2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^8(1 + 2^3) + 2^n = 2^8(1 + 2^3) + 2^{8+x} = 2^8(1 + 2^3 + 2^x) = 2^8(9 + 2^x)$$

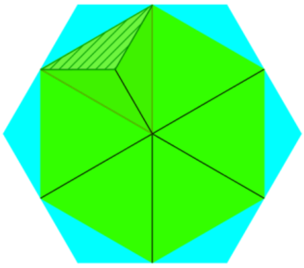
$$2^8 = (2^4)^2$$

Necesitamos el valor más pequeño de x para el que $9 + 2^x$ también sea un cuadrado:

x	$9 + 2^x$
0	10
1	11
2	13
3	17
4	25

Como n=8+x, el valor que buscamos es n=8+4=12





El hexágono verde puede descomponerse en 18 triangulitos como el rallado. En el azul añadimos seis triangulitos más.

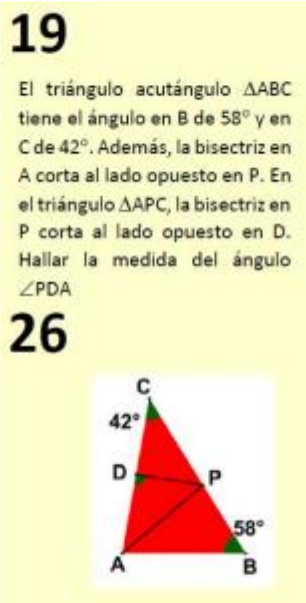
$$\frac{\text{área del verde}}{\text{área del azul}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado naranja, el del blanco será x+2.

Se cumple: área cuadrado blanco=área del cuadrado naranja+ superficie zona blanca

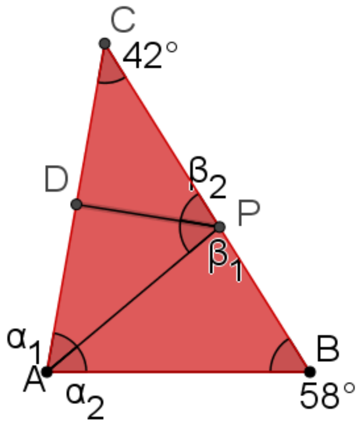
$(x + 2)^2 = x^2 + 36 \;\rightarrow\; x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36 \;\rightarrow\; 4x = 32 \;\rightarrow\; x = 8\,cm$ el lado.

El área sería de $64\ cm^2$.


19

El triángulo acutángulo ΔABC tiene el ángulo en B de 58° y en C de 42°. Además, la bisectriz en A corta al lado opuesto en P. En el triángulo ΔAPC, la bisectriz en P corta al lado opuesto en D. Hallar la medida del ángulo $\angle PDA$

26



El ángulo en A podemos calcularlo: $\hat{A} = 180° - 42° - 58° = 80°$.

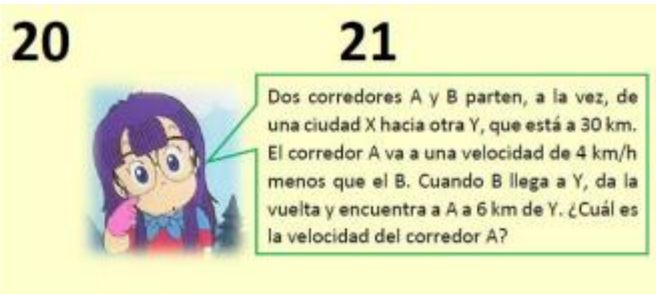
Al ser la línea que una A con P la bisectriz, los dos ángulos α_1 y α_2 miden cada uno 40°.

Como la línea que une P con D también es una bisectriz, los dos ángulos β_1 y β_2 miden lo mismo.

Del triángulo ACP podemos calcular el ángulo en P: $\hat{P} = 180° - 40° - 42° = 98°$.

En el triángulo PDA el ángulo en A mide 40° y el ángulo en P mide la mitad de 98°, es decir, 49°, por ser PD la bisectriz.

El ángulo pedido medirá $\widehat{PDA} = 180° - 40° - 49° = 91°$.


20 21

Dos corredores A y B parten, a la vez, de una ciudad X hacia otra Y, que está a 30 km. El corredor A va a una velocidad de 4 km/h menos que el B. Cuando B llega a Y, da la vuelta y encuentra a A a 6 km de Y. ¿Cuál es la velocidad del corredor A?

Corredor B: velocidad x km/h

Corredor A: velocidad x−4 km/h

Sabemos que en el tiempo que B recorre 30+6=36 km, A recorre 30−6=24 km.

Usando la fórmula v=e/t con los datos que tenemos (teniendo en cuenta que los tiempos son iguales), obtenemos:

Corredor B: $x = \frac{36}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{36}{x}$

Corredor A: $x + 4 = \frac{24}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{24}{x-4}$

Igualamos: $\frac{36}{x} = \frac{24}{x-4}$ $\rightarrow$ $36(x-4) = 24x$ $\rightarrow$ $12x - 144 = 0$ $\rightarrow$ $x = 12\ km/h$ será la velocidad del corredor B.

La del corredor A será 4 menos: 8 km/h.

Llamaremos P a la edad del padre y H a la del hijo. Como el problema habla de las cifras de ambos números, los descompondremos:

$$P = 10a + b \quad y \quad H = 10c + d$$

Donde a, b, c y d son las cifras.

Sabemos que $P = 3H$

Al sumar las cifras de la edad del padre con las del hijo, obtenemos la edad del hijo:

$a + b + c + d = 10c + d \ \rightarrow \ a + b = 9c$

También sabemos que $a + b = c + d$

De las dos ecuaciones últimas: $c + d = 9c \ \rightarrow \ d = 8c$

Como c y d son las cifras de la edad de Dani, solo tiene sentido que Dani tenga 18 años.

La edad del padre será el triple, es decir, 3·18=54 años.

Estudiando todas las posibilidades en las que $a+b$ termina en 1:

Terminaciones		
a	*b*	a^2+b^2
0	1	1
1	0	1
2	9	5
3	8	3
4	7	5
5	6	1
6	5	1
7	4	5
8	3	3
9	2	5

Observamos que, para que a^2+b^2 termine en 3, a ha de terminar en 3 y b en 8, o al contrario.

Estudiemos la cifra en que terminan las potencias de 3 y de 8:

Potencias de 3: **3**, **9**, **7**, **1**, **3**, **9**, **7**, **1**, … Potencias de 8: **8**, **4**, **2**, **6**, **8**, **4**, **2**, **6**, …

Como se ve, ambas son cíclicas y se repiten de cuatro en cuatro.

Como 2022 es múltiplo de cuatro más dos, a^{2022} terminará en 9 y b^{2022} en 4 (o al contrario), por lo que $a^{2022}+b^{2022}$ terminará en 3.

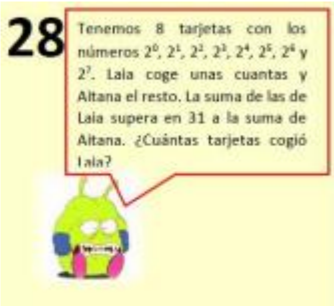
Un número formado por dos cifras iguales es múltiplo de 11, por lo que podemos poner:

$$11x + 11y + 11z = 100z + 10y + x \quad \rightarrow \quad 10x + y = 89z$$

Como x, y, z son números de una sola cifra, para que se cumpla la igualdad los valores deben ser:

$$x = 8, y = 9\ , z = 1$$

Comprobamos: $88 + 99 + 11 = 198$



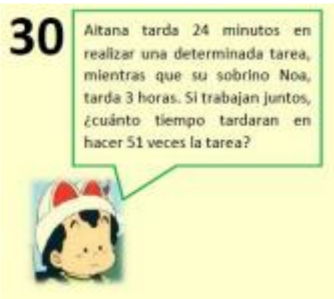
Calculamos las potencias:

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
1	2	4	8	16	32	64	128

La suma de todas las potencias es 255. Si descontamos los 31 que tiene de más Laia, nos quedan 224 que estarán repartidas a partes iguales entre ambas.

Es decir, Laia tendrá 31+112=143 y Aitana 112.

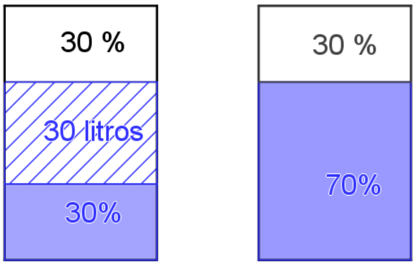
Para conseguir 112, Aitana sumó 16+32+64, así que Laia cogió las cinco tarjetas restantes.



	Tarda	Fracción que hace en 1 minuto
Aitana	24 minutos	$^{1}/_{24}$
Noa	3horas=180 minutos	$^{1}/_{180}$
Juntos		$^{1}/_{24} + {}^{1}/_{180} = {}^{17}/_{360}$

Juntos tardarán $^{360}/_{17}$ minutos para hacer la tarea una vez.

Para hacerla 51 veces: $51 \cdot {}^{360}/_{17} = 1080$ minutos= 18 horas.



En el dibujo podemos ver que los 30 litros coinciden con el 40 % de la capacidad del barril.

Para calcular la capacidad del barril: 30/4 litros representarán el 10 % de la misma, y el total será

$10 \cdot \frac{30}{4} = 75$ litros.