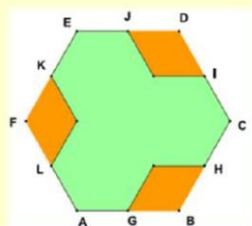


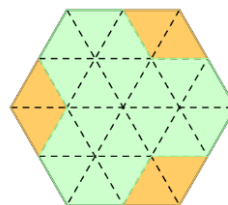
DESEMBRE 2022

1



2

Siguen G, H, I, J, K i L els punts mitjans dels costats de l'hexàgon regular ABCDEF, amb àrea 36 cm^2 . Trobeu l'àrea del dodecàgon de color verd amb costats paral·lels quatre a quatre



Si trossegem l'hexàgon com es veu a la imatge, i tenint en compte que l'hexàgon està format per 24 triangles menuts i el dodecàgon per 18, l'àrea del dodecàgon serà:

$$A = \frac{36}{24} \cdot 18 = 27 \text{ cm}^2$$

3

A quin exponent cal elevar 8 per a obtenir 16^{21} ?

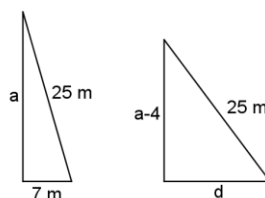


$$8^n = 16^{21} \rightarrow 2^{3n} = 2^{4 \cdot 21} = 2^{84} \rightarrow 3n = 84 \rightarrow n = 28$$

5

Una escala de 25 m de longitud està recolzada en una paret vertical, de manera que el peu de l'escala dista 7 m de la paret. Si la tornem a col·locar, estant ara el punt més alt de l'escala, 4 m més baix que abans, a quina distància estarà ara el peu de l'escala, de la paret?

6



Els dos triangles seran:

Apliquem el teorema de Pitàgores :

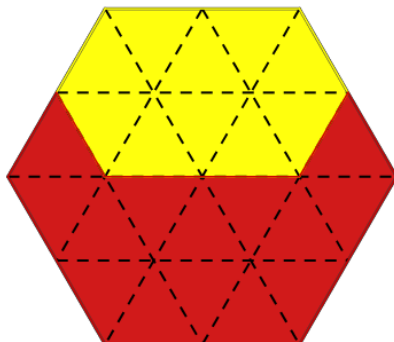
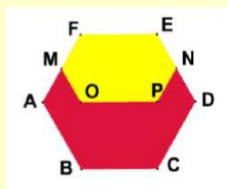
$$a = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ m} \rightarrow a - 4 = 20 \text{ m} \rightarrow d = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ m}$$

7

En la figura hi ha un hexàgon regular ABCDEF d'àrea 180 cm^2 . M i N són els punts mitjans de AF i ED, respectivament.

A més, $MO \parallel AB$; $OP \parallel BC$; $PN \parallel CD$ i $MO = MF = PN$. Trobeu l'àrea de l'octàgon ABCDNPOM

14

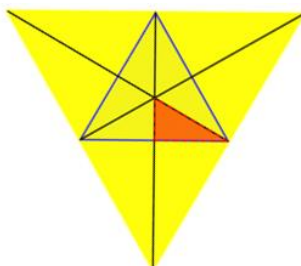
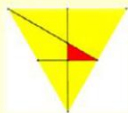


L'hexàgon gran està format per 24 triangles i el menut per 14.

L'àrea del menut serà $A = \frac{180}{24} \cdot 14 = 105 \text{ cm}^2$.

8

En el triangle equilàter de la figura, hem marcat els punts mitjans dels costats. Quina fracció del triangle ocupa el triangle roig?



Observant les línies afegides, el triangle groc es pot descompondre en 4 triangles equilàters iguals, i cadascun d'ells en 6 triangles d'igual superfície que el roig. El groc, per tant, estarà format per $6 \cdot 4 = 24$ triangles amb la mateixa superfície que el roig.

La fracció del triangle que ocupa el triangle roig és $1/24$.

9



Dani juga amb 5 cartes ABCDE a desordenar-les de la següent manera. Canvi 1: agafa la carta del centre i la posa la primera: CABDE. Canvi 2: agafa l'última carta i la posa al mig: CAEBD. El canvi 3 és igual al canvi 1. El canvi 4 és igual al canvi 2, i així successivament. En fer el canvi 2022, com han quedat ordenades les cartes?

10

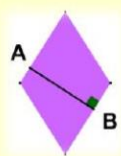
Vegem quants canvis s'han de fer per arribar a la posició inicial:

Carta que es mou	Núm. de canvi	Distribució de les cartes				
		A	B	C	D	E
central	1 ^o	C	A	B	D	E
final	2 ^o	C	A	E	B	D
central	3 ^o	E	C	A	B	D
final	4 ^o	E	C	D	A	B
central	5 ^o	D	E	C	A	B
final	6 ^o	D	E	B	C	A
central	7 ^o	B	D	E	C	A
final	8 ^o	B	D	A	E	C
central	9 ^o	A	B	D	E	C
final	10 ^o	A	B	C	D	E

De manera que cada 10 vegades que canviem la posició de les cartes tornem a començar. Si fa 2022 canvis, la distribució final coincidirà amb la del 2n canvi ($2022 = 202 \cdot 10 + 2$), i, per tant, quedaran així:

C	A	E	B	D
---	---	---	---	---

12



El perímetre i àrea del rombe és 24 cm i 24 cm². Calculeu la longitud del segment AB

Del perímetre 24 cm deduïm que cada costat fa 6 cm.

Si recolzem el rombe sobre el costat que conté el punt B, el segment AB seria l'altura i el costat del rombe la base (6 cm). L'àrea es calcula multiplicant base · altura = 24 cm².

L'altura serà de 4 cm.

13

Calculeu el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ és un quadrat perfecte.



$$2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^8(1 + 2^3) + 2^n = 2^8(1 + 2^3) + 2^{8+x} = 2^8(1 + 2^3 + 2^x) = 2^8(9 + 2^x)$$

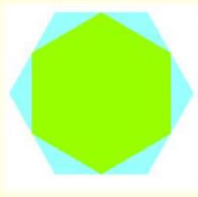
$$2^8 = (2^4)^2$$

Necessitem el valor més menut de x per al qual $9 + 2^x$ també siga un quadrat:

x	$9 + 2^x$
0	10
1	11
2	13
3	17
4	25

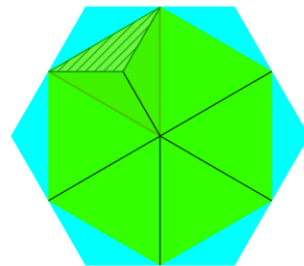
Com $n=8+x$, el valor que busquem és $n=8+4=12$

15



16

Inscrivim en un hexàgon regular un altre hexàgon regular els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats del primer. Quin és el quocient entre les àrees dels hexàgons?



L'hexàgon verd es pot descompondre en 18 triangles menuts com el ratllat. En el blau afegim sis triangles més.

$$\frac{\text{àrea del verd}}{\text{àrea del blau}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

17



24

Sobre un quadrat blanc ha caigut damunt un taronja el costat del qual mesura 2 cm menys que el blanc, tal com indica la figura. Si la superfície de la zona blanca de la figura, és de 36 cm^2 , quants cm mesura el quadrat de color taronja?

Si anomenem x a la longitud del costat del quadrat taronja, el del blanc serà $x+2$.

Es compleix: àrea quadrat blanc = àrea del quadrat taronja + superfície zona blanca

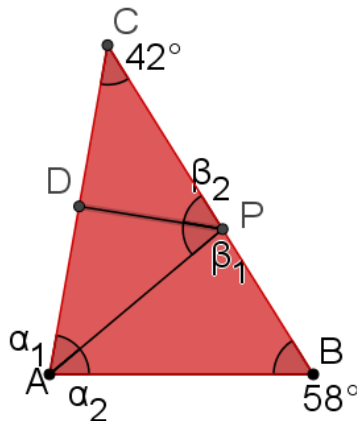
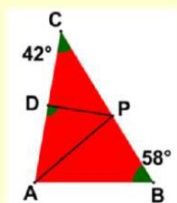
$$(x + 2)^2 = x^2 + 36 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8 \text{ cm el costat.}$$

L'àrea seria de 64 cm^2 .

19

El triangle acutangle $\triangle ABC$ té l'angle en B de 58° i en C de 42° . A més, la bisectriu en A talla al costat oposat en P. En el triangle $\triangle APC$, la bisectriu en P talla al costat oposat en D. Trobeu la mesura de l'angle $\angle PDA$

26



L'angle en A podem calcular-lo: $\hat{A} = 180^\circ - 42^\circ - 58^\circ = 80^\circ$.

Com la línia que uneix A amb P és la bisectriu, els angles α_1 i α_2 mesuren cada un 40° .

Com la línia que uneix P amb D també és una bisectriu, els angles β_1 i β_2 mesuren el mateix.

Del triangle ACP podem calcular l'angle en P: $\hat{P} = 180^\circ - 40^\circ - 42^\circ = 98^\circ$.

En el triangle PDA l'angle en A mesura 40° i l'angle en P mesura la meitat de 98° , és a dir, 49° , per ser PD la bisectriu.

L'angle demanat mesurarà $\widehat{PDA} = 180^\circ - 40^\circ - 49^\circ = 91^\circ$.

20



21

Dos corredors A i B parteixen, alhora, d'una ciutat X cap a una altra Y, que està a 30 km. El corredor A va a una velocitat de 4 km/h menys que el B. Quan B arriba a Y, dona la volta i troba a A, a 6 km de Y. Quina és la velocitat del corredor A?

Corredor B: velocitat x km/h

Corredor A: velocitat $x-4$ km/h

Sabem que en el temps que B recorre $30+6=36$ km, A recorre $30-6=24$ km.

Usant la fórmula $v=e/t$ amb les dades que tenim, i tenint en compte que els temps són iguals, obtenim:

Corredor B: $x = \frac{36}{t} \rightarrow t = \frac{36}{x}$

Corredor A: $x - 4 = \frac{24}{t} \rightarrow t = \frac{24}{x-4}$

Igualtem: $\frac{36}{x} = \frac{24}{x-4} \rightarrow 36(x-4) = 24x \rightarrow 12x - 144 = 0 \rightarrow x = 12 \text{ km/h}$ serà la velocitat del corredor B.

La del corredor A serà 4 menys: 8 km/h .

22

El pare de Dani té triple edat que Dani. Si sumem les dues xifres de l'edat del pare amb les dues xifres de l'edat de Dani obtenim l'edat de Dani. A més, la suma de les dues xifres de l'edat del pare és igual a la suma de les dues xifres de l'edat de Dani. Calculeu l'edat de tots dos.

29



Anomenarem P a l'edat del pare i H a la del fill. Com que el problema parla de les xifres dels dos nombres, els descompondrem:

$$P = 10a + b \quad y \quad H = 10c + d$$

On a, b, c i d són les xifres.

Sabem que $P = 3H$

Al sumar les xifres de l'edat del pare amb les del fill, obtenim l'edat del fill:

$$a + b + c + d = 10c + d \rightarrow a + b = 9c$$

També sabem que $a + b = c + d$

De les dues equacions últimes: $c + d = 9c \rightarrow d = 8c$

Com c i d són les xifres de l'edat de Dani, sols té sentit que Dani tinga 18 anys.

L'edat del pare serà el triple, és a dir, $3 \cdot 18 = 54$ anys.

23

Dels naturals a i b se sap que $a + b$ acaba en 1 i que $a^2 + b^2$ acaba en 3. En quina xifra acaba $a^{2022} + b^{2022}$?



Estudiant totes les possibilitats en què $a + b$ acaba en 1:

Terminacions		
a	b	$a^2 + b^2$
0	1	1
1	0	1
2	9	5
3	8	3
4	7	5
5	6	1
6	5	1
7	4	5
8	3	3
9	2	5

Observem que, perquè $a^2 + b^2$ acabe en 3, a ha d'acabar en 3 i b en 8, o al contrari.

Estudiem la xifra en què acaben les potències de 3 i de 8:

Potències de 3: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... Potències de 8: 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, ...

Com es veu, ambdues són cícliques i es repeteixen de quatre en quatre.

Com 2022 és múltiple de quatre més dos, a^{2022} acabarà en 9 i b^{2022} en 4 (o al contrari), per la qual cosa $a^{2022} + b^{2022}$ acabarà en 3.

27

Les lletres x , y i z representen dígitos diferents de zero. Trobeu el número xyz sabent que la suma està ben feta.



$$\begin{array}{r} x \ x \\ y \ y \\ + z \ z \\ \hline z \ y \ x \end{array}$$

Un nombre format per dues xifres iguals és múltiple d'11, per la qual cosa podem posar:

$$11x + 11y + 11z = 100z + 10y + x \rightarrow 10x + y = 89z$$

Com x, y, z són nombres d'una sola xifra, perquè es complisca la igualtat els valors han de ser:

$$x = 8, y = 9, z = 1$$

Comprovem: $88 + 99 + 11 = 198$

28

Tenim 8 targetes amb els números $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ i 2^7 . Laia agafa unes quantes i Aitana la resta. La suma de les de Laia supera en 31 a la suma d'Aitana. Quantes targetes va agafar Laia?



Calculem les potències:

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
1	2	4	8	16	32	64	128

La suma de totes les potències és 255. Si descomptem els 31 que té de més Laia, ens queden 224, que estaran repartits a parts iguals entre ambdues.

És a dir, Laia tindrà $31+112=143$ i Aitana 112.

Per a aconseguir 112, Aitana va sumar $16+32+64$, així que Laia va agafar les cinc targetes restants.

30

Aitana tarda 24 minuts a realitzar una determinada tasca, mentre que el seu nebot Noa, tarda 3 hores. Si treballen junts, quant temps tardaran a fer 51 vegades la tasca?

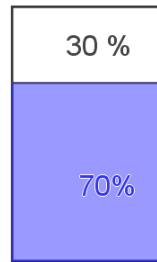


	Tarda	Fracció que fa en 1 minut
Aitana	24 minuts	$\frac{1}{24}$
Noa	3 hores=180 minuts	$\frac{1}{180}$
Junts		$\frac{1}{24} + \frac{1}{180} = \frac{17}{360}$

Junts tardaran $\frac{360}{17}$ minuts per fer la tasca una vegada.

Per fer-la 51 vegades: $51 \cdot \frac{360}{17} = 1080$ minuts = 18 hores.

31 Quan un barril està ple al 30%, té 30 litres menys que quan li falta el 30% per a estar ple. Quants litres conté el barril ple?

En el dibuix podem veure que els 30 litres coincideixen amb el 40 % de la capacitat del barril.

Per a calcular la capacitat del barril: 30/4 litres representaran el 10 %, i el total serà

$$10 \cdot \frac{30}{4} = 75 \text{ litres.}$$