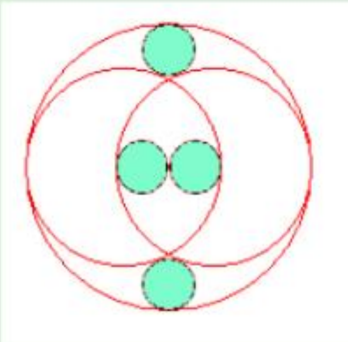
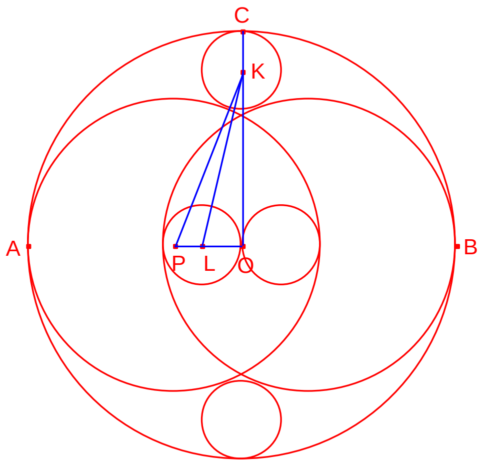
ENERO 2023
Sangakus

2 **3**



En una circunferencia exterior de radio R se han dibujado dos circunferencias medianas iguales y cuatro circunferencias pequeñas. Calculad el radio de las circunferencias.

Jefatura de Ishikawa



Solución:

Sea la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB} = 2R$
Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PA} = r$
Sean las circunferencias de centros L, K y radios $\overline{LO} = \overline{KC} = t$

$\overline{AB} = 4 \cdot \overline{PA} - 4 \cdot \overline{LO}$
$4r - 4t = 2R$
Entonces:
$$r = \frac{R + 2t}{2}$$
$$\overline{OK} = R - t, \overline{OP} = R - r = \frac{R - 2t}{2}, \overline{PK} = r + t = \frac{R + 4t}{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{POK}$:
$$\left(\frac{R + 4t}{2}\right)^2 = \left(\frac{R - 2t}{2}\right)^2 + (R - t)^2$$
Simplificando:
$$2t^2 + 5Rt - R^2 = 0$$
Resolviendo la ecuación:
$$t = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}R$$
$$r = \frac{R + 2t}{2} = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}R$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio R. Vamos a elegir R=10.

Los pasos a seguir serían:

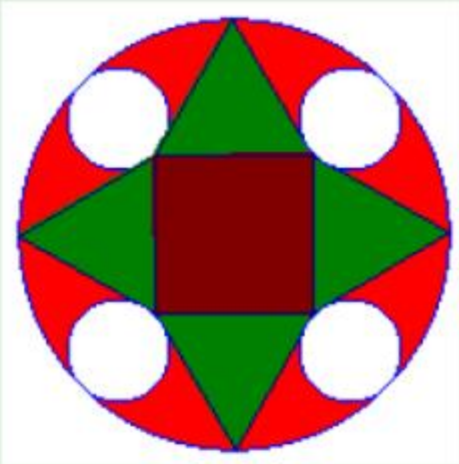
1. Dibujamos la circunferencia centrada en el origen $A(0,0)$ de radio 10.
2. Introducimos un deslizador para el radio de las circunferencias pequeñas. Sería de número, valor mínimo 1 y máximo 5 e incremento de 0,001. Lo llamamos r.
3. Los centros de dos de las circunferencias pequeñas estarán en los puntos $B(r, 0)$ y $C(0,10 - r)$. Dibujamos las circunferencias con centro en el punto correspondiente y radio r.
4. Las dos que faltan las dibujamos con simetría respecto a los ejes o con giro entorno al origen de coordenadas de 180°.
5. Para las circunferencias medianas necesitamos los centros y un punto. Todos están sobre el eje de abscisas, por lo que empezamos por calcular las intersecciones de las circunferencias (la grande y las dos pequeñas del centro) con el eje de abscisas. El centro de la circunferencia mediana es el punto medio entre el corte con el eje de la grande y el punto más lejano a él de los de las pequeñas.
6. Las circunferencias medianas serán tangentes a las dos pequeñas del centro, pero es posible que no lo sean a las otras dos. Para que sean tangentes a las cuatro pequeñas, vamos a mover el deslizador hasta conseguirlo. Hay que tener en cuenta que para que dos circunferencias sean tangentes, la intersección entre ambas será un único punto. Si no hay punto de intersección o hay dos debemos mover el deslizador hasta conseguirlo.
7. El radio de la mayor es 10, el de las pequeñas es r y el de las medianas es $r + 5$, siendo r el valor que marque el deslizador cuando consigamos la tangencia.

   La solución general, con radio R para la circunferencia mayor (y no el caso particular con R=10 dibujado) sería:

   Circunferencias pequeñas: $\frac{R}{10} \cdot r$

   Circunferencias medianas: $\frac{R}{10} \cdot (r + 5)$

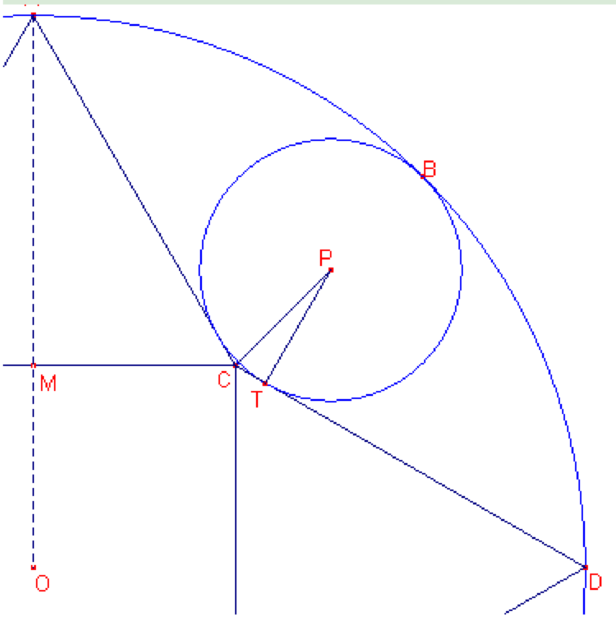
4



11

Dentro de una circunferencia de radio R se ha dibujado un cuadrado, 4 triángulos equiláteros sobre los lados del cuadrado y 4 circunferencias tangente a la circunferencia exterior y tangente a los lados del triángulo. Calculad el radio de estas 4 circunferencias.

Jefatura Okayama.



Solución:

Sea O el centro de la circunferencia exterior de radio R.
Sea P el centro de la circunferencia pequeña (superior derecha).
Sea B el punto de tangencia de las dos circunferencias.
Sea C el vértice (superior derecha) del cuadrado.
Sea A el vértice, exterior al cuadrado, del triángulo equilátero.
$R = \overline{OA}$
Sea $r = \overline{PB} = \overline{PC}$ su radio.
Sea T el punto de la circunferencia de radio r y el lado del triángulo $\overline{CD}$.
Sea c el lado del cuadrado.
Sea M el punto medio del lado superior del cuadrado.

$$\overline{OM} = \frac{c}{2}, \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{AM} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$R = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

Resolviendo la ecuación en la incógnita c:

$$c = \left(\sqrt{3}-1\right)R$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OMC}$:

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$$

Notemos que $\angle ACD = 150°, \angle CAD = 15°$.
Entonces, $\angle CPT = 15°$.

$$\overline{PC} = \overline{CB} - \overline{OC} - \overline{PB}$$

$$\overline{PC} = R - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R - r$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CPT}$.

$$\frac{r}{R - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R - r} = \cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Resolviendo la ecuación en la incógnita r:

$$r = \frac{-2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}R$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio R. Vamos a elegir R=10.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia centrada en el origen $A(0,0)$ de radio 10.
2. Introducimos un deslizador para el lado del cuadrado. Sería de número, valor mínimo 4 y máximo 9 e incremento de 0,001. Lo llamamos l.
3. Los dos vértices de la base del cuadrado estarían en los puntos $B(-l/2,-l/2)$ y $C(l/2,-l/2)$.
4. Dibujamos el cuadrado. Sobre cada uno de los cuatro lados, el triángulo equilátero correspondiente.
5. Movemos el deslizador hasta que la figura que acabamos de construir sea tangente a la circunferencia.
6. Trazamos una semirrecta desde el centro de la circunferencia que pase por uno de los vértices del cuadrado.
7. Hallamos el punto de intersección de esta semirrecta y la circunferencia. Será un punto de una de las circunferencias pequeñas.
8. El centro de la circunferencia debe estar sobre la semirrecta, así que con punto en objeto, marcamos un punto en el lugar aproximado en que debe ir el centro.
9. Movemos el punto hasta que la circunferencia sea tangente tanto a la circunferencia grande como a los dos triángulos.
10. El radio de las circunferencias pequeñas lo calculamos con la distancia entre el centro y el punto en que es tangente a la circunferencia grande.

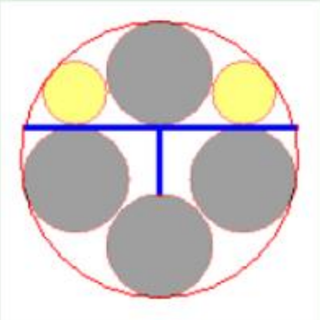
El valor r obtenido para las circunferencias pequeñas, sería para la circunferencia exterior con radio 10. Si generalizamos a un radio cualquiera R en la grande, el radio de las pequeñas sería $\frac{R}{10} \cdot r$.

5

Una circunferencia de radio R contiene cuatro circunferencias iguales y otras dos iguales. Calculad el radio de todas las circunferencias.

Jefatura de Fukushima

12



Solución:

Sea M el punto medio del segmento $\overline{KL}$
Sea la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA} = R$
Sean las circunferencias de centro P, Q y radio $\overline{PT} = r$
Sea N la proyección de P sobre el segmento $\overline{OQ}$
$\overline{OP} = R - r, \overline{PQ} = 2r, \overline{OQ} = R - r$
$\overline{OM} = R - 2r$
$\overline{ON} = 3r - R, \overline{QN} = 2R - 4r$
Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ONP}, \overset{\Delta}{QNP}$:

$$\overline{PN}^2 = (R-r)^2 - (3r-R)^2 = (2r)^2 - (2R-4r)^2$$

Simplificando:

$$r^2 - 3Rr + R^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}R$$

Sea la circunferencia de centro C y radio $\overline{CM} = R$
Sea la circunferencia de centro d y radio $\overline{DF} = s$
$\overline{OC} = R - r, \overline{CD} = r + s, \overline{OD} = R - s$
Sea E la proyección de D sobre el segmento $\overline{OC}$
$\overline{CE} = r - s, \overline{OE} = R - 2r + s$

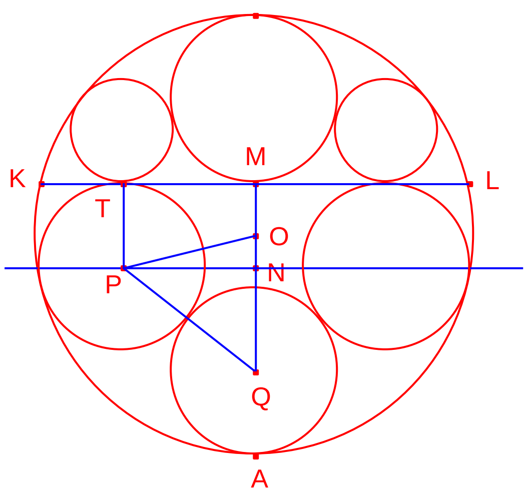
Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{CED}, \overset{\Delta}{OED}$:

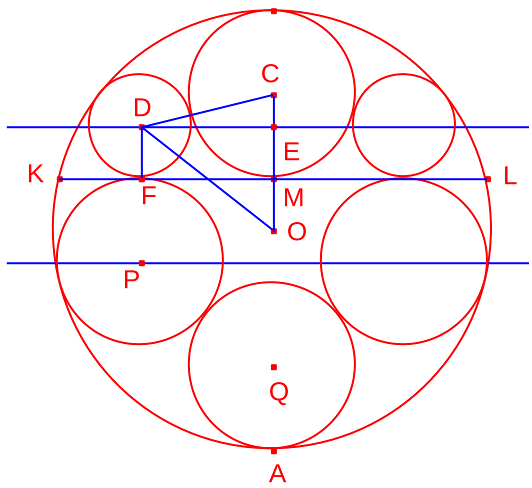
$$\overline{DE}^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2 = (R-s)^2 - (R-2r+s)^2$$

Simplificando:

$$-Rs - r^2 + Rr = 0$$

$$s = \frac{(R-r)r}{R} = \left(-2+\sqrt{5}\right)R$$





Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio R. Vamos a elegir R=10.

Los pasos a seguir serían:

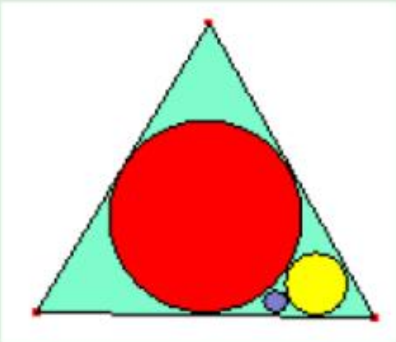
1. Dibujamos la circunferencia centrada en el origen $A(0,0)$ de radio 10.
2. Introducimos un deslizador para el radio de las circunferencias medianas (las grises). Sería de número, valor mínimo 1 y máximo 5 e incremento de 0,001. Lo llamamos rm.
3. El centro de la circunferencia superior está en el punto $B(0,10-rm)$. Lo introducimos y dibujamos la circunferencia con centro en B y radio rm.
4. Por simetría de ésta respecto al eje de abscisas dibujamos la circunferencia inferior.
5. Hallamos el punto de intersección de la circunferencia con centro en B con el eje de ordenadas, y después la recta tangente a la circunferencia por ese punto.
6. El centro de las dos circunferencias grises que faltan está a la misma distancia de $A(0,0)$ que los centros de las que ya tenemos. Dibujamos una circunferencia con centro en A y radio $10-rm$, que contendrá el centro de todas las circunferencias del tamaño de las grises que sean tangentes interiores a la circunferencia grande.
7. Con punto en objeto marcamos un punto sobre la circunferencia de los centros en el lugar aproximado donde creemos que estará el centro de una de las dos circunferencias que nos faltan. Después, con centro ese punto y radio rm la circunferencia correspondiente.
8. Ahora, moviendo ese punto y el deslizador del radio, ajustamos el dibujo hasta que veamos las tangencias que queremos.
9. Por simetría dibujamos la gris que falta.
10. El centro de las circunferencias pequeñas está sobre la recta vertical que pasa por el centro de la mediana que tiene debajo. Dibujamos esa recta. Hallamos el punto de intersección de esta recta y la horizontal. Será un punto de la circunferencia que buscamos.
11. Marcamos un punto sobre la recta vertical, y después con centro en ese mismo punto y otro punto en la intersección que acabamos de hallar, una circunferencia. Tendremos que mover el centro hasta que la circunferencia obtenida sea tangente tanto a la circunferencia centrada en B como a la horizontal.
12. Por simetría respecto al eje de abscisas, dibujaríamos la que falta.
13. Para rp, el radio de la pequeña, calculamos la distancia entre el centro de la misma y el punto que tenemos.
14. El radio de las medianas será el valor rm que hemos obtenido con el deslizador.

Para el caso general, con radio R para la grande en lugar del 10 que hemos asignado al dibujo, tendríamos:

Radio de la pequeña: $\frac{rp}{10}\cdot R$

Radio de la mediana: $\frac{rm}{10}\cdot R$

6 **Φ, φ DAY** **7**



Dado un triángulo equilátero se ha inscrito una circunferencia de radio r.

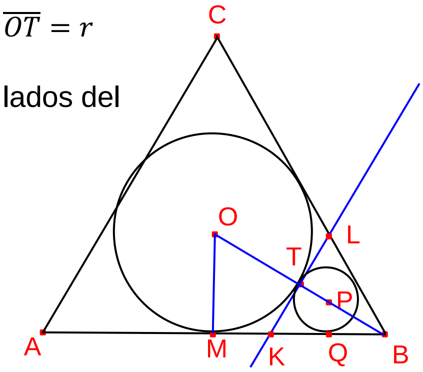
Otra circunferencia es tangente exterior a la inscrita y a dos lados del triángulo.

Una tercera circunferencia es tangente a un lado y tangente exterior a las dos circunferencias anteriores.

Calculad el radio de las circunferencias.

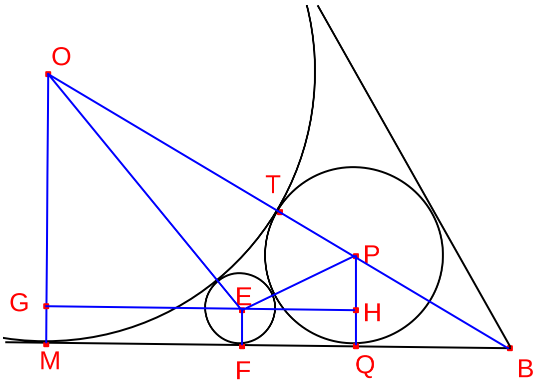
Jefatura de Saitama

Solución:



Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$ de centro O.
Sea la circunferencia inscrita al triángulo de centro O y radio $\overline{OM} = \overline{OT} = r$
$\overline{OC} = \overline{OB} = 2r$
La recta perpendicular al segmento $\overline{OB}$ que pasa por T, corta a los lados del triángulo en los puntos K, L.
Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PT} = \overline{PQ} = s$
Los triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBL}$ son semejantes y de razón
$\overline{CM}: \overline{TB} = 3: 1$
Aplicando el teorema de Tales:
$$s = \frac{1}{3}r$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OMB}$:
$\overline{MB} = r\sqrt{3}$
Sea la circunferencia de centro E y radio $\overline{EF} = t$
Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{OMB}, \overset{\Delta}{PQB}$ son semejantes y de razón $\overline{OM}: \overline{PQ} = 3: 1$
Aplicando el teorema de Tales:
$$\overline{MQ} = \frac{2}{3}\overline{MB} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$



Sea G la proyección de E sobre $\overline{OM}$
Sea H la proyección de E sobre $\overline{PQ}$
$\overline{OE} = r + t, \overline{OG} = r - t, \overline{PE} = s + t, \overline{PH} = s - t,$
$$\overline{GH} = \overline{MQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos $\overset{\Delta}{OGE}, \overset{\Delta}{PHE}$
$\overline{GE} = 2\sqrt{rt}, \overline{HE} = 2\sqrt{st}$
$$2\sqrt{rt} + 2\sqrt{st} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
$$\sqrt{rt} + \sqrt{\frac{1}{3}rt} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$
Resolviendo la ecuación:
$$t = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}r$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al lado del triángulo.
Vamos a elegir $l = 1$
Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos un triángulo equilátero de lado 1.
2. Para inscribir la mayor de las circunferencias hallamos el centro de un lado y del triángulo. Serán un punto de la circunferencia y el centro.
3. El centro de la segunda circunferencia estará sobre la recta que une el centro de la circunferencia mayor y el vértice del triángulo (bisectriz del ángulo del vértice).
4. La intersección de esta recta y la primera circunferencia será un punto de la circunferencia que buscamos.
5. Sólo nos falta hallar su centro. Para eso trazamos la recta paralela a la base del triángulo por el punto que ya tenemos de la circunferencia. Hallamos el punto en que esta recta corta al lado inclinado del triángulo. También pertenecerá a la recta. La mediatriz del segmento que une los dos puntos que tenemos pasa por el centro de la circunferencia y corta a la base en un punto que también pertenece a la circunferencia. Con estos tres puntos dibujamos la segunda circunferencia.

   Para trazar la más pequeña de las circunferencias, vamos a usar una propiedad de las circunferencias que se encuentran en una posición similar a la que buscamos:

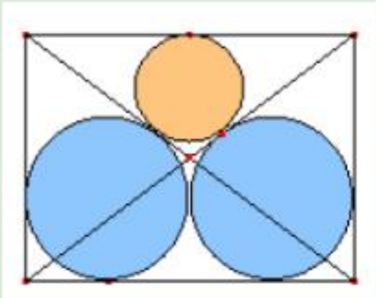
   Si trazamos la parábola con foco en el centro de la circunferencia y vértice en el punto de intersección de la circunferencia con la recta de la base del triángulo para las dos circunferencias que ya tenemos, estas dos parábolas se cortarán en el centro de la tercera.

6. Para dibujar con geogebra las parábolas necesitamos los focos y las directrices, pero lo que tenemos son los vértices en lugar de las directrices. Usamos que los vértices están a la misma distancia del foco que de la directriz.
7. Hallamos los puntos simétricos de los focos respecto a la base del triángulo. Serán puntos de las directrices. Para tenerlas, trazamos las rectas paralelas a la base del triángulo por estos dos puntos que hemos obtenido por simetría.
8. Dibujamos las dos parábolas y hallamos el punto donde se cortan. Ya tenemos el centro de la circunferencia pequeña.
9. Para obtener un punto, basta trazar la perpendicular a la base del triángulo por el centro que acabamos de obtener. La intersección de ambas rectas será el punto que buscamos. Con centro y punto, podemos trazar la circunferencia que nos faltaba.
10. Para saber cuanto miden los radios de las tres circunferencias, basta trazar segmentos desde el centro de cada circunferencia hasta un punto cualquiera de la misma.

9 10

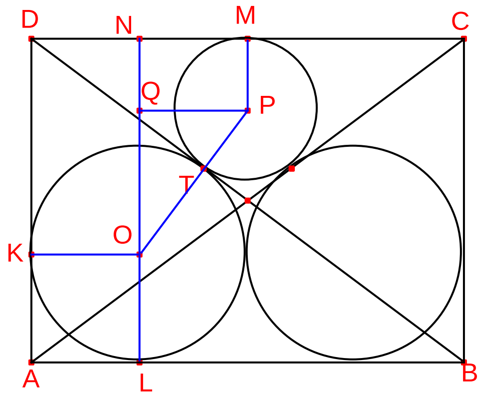
Dos circunferencias de igual radio r son tangentes y cada una de ellas es tangente a dos lados de un rectángulo y a una diagonal. Calculad la medida de los lados del rectángulo y el radio de la circunferencia tangente exterior a las anteriores y tangente al rectángulo.

Jefatura Fukushima



Solución:

Sea la circunferencia de centro O y radio $\overline{OK} = \overline{OL} = r$
Sea el rectángulo $ABCD$.
$\overline{AB} = 4r$
Sea $\overline{AD} = a$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \sqrt{16r^2 + a^2}$
La circunferencia de centro O está inscrita al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}$.
El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo es:



$$r = \frac{\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{BD}}{2} = \frac{4r + a - \sqrt{16r^2 + a^2}}{2}$$
$2r + a = \sqrt{16r^2 + a^2}$
Resolviendo la ecuación:
$a = 3r$

Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PM} = \overline{PT} = s$
La recta OL corta al lado $\overline{CD}$ en el punto N.
Sea Q la proyección de P sobre el segmento $\overline{ON}$
$\overline{ON} = a - r = 2r$
$\overline{OQ} = 2r - s, \overline{PQ} = \overline{MN} = r, \overline{OP} = r + s$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OQP}$:
$(r + s)^2 = r^2 + (2r - s)^2$.
Simplificando:
$4r^2 = 6rs$
$$s = \frac{2}{3}r$$

Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio r. Vamos a elegir $r = 10$.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia centrada en el punto $A(10,0)$. Sería la de la derecha. La de la izquierda podemos dibujarla por simetría respecto al eje de ordenadas.
2. Hallamos los puntos de intersección de las dos circunferencias con el eje de abscisas. Por esos puntos, trazamos las rectas tangentes a las dos circunferencias, con lo que tendríamos los dos lados verticales del rectángulo.
3. Hallamos la intersección de la circunferencia de la derecha con la recta y=10 que pasa por su centro. Con la recta tangente a la circunferencia por ese punto, tendríamos la base del rectángulo.
4. Con intersección hallamos las coordenadas de los dos vértices de la base del rectángulo.
5. Trazamos ahora las dos diagonales trazando las rectas tangentes a cada una de las dos circunferencias pasando cada una por el vértice del rectángulo que está al otro lado (la circunferencia de la derecha con el vértice de la izquierda y la circunferencia de la izquierda con el vértice de la derecha).
6. Hallamos la intersección de cada una de las diagonales con las verticales del rectángulo. Con esto, ya tenemos los cuatro vértices del rectángulo y podemos dibujarlo.
7. Para dibujar la circunferencia que falta, usaremos que la recta tangente a las dos circunferencias es perpendicular a la recta que une los dos centros.
8. Hallamos los puntos de intersección de cada circunferencia con la diagonal correspondiente. Dibujamos la recta que une este punto con el centro de la circunferencia. Las dos rectas se cortan en el centro de la circunferencia pequeña.
9. Dibujamos la circunferencia con centro en este punto y pasando por uno de los puntos de intersección de las diagonales y las circunferencias. La distancia entre estos dos puntos sería el radio.
10. Para las medidas del rectángulo, basta marcar los segmentos que lo forman.

Para el caso general, con radio r para la grande en lugar del 10 que hemos asignado al dibujo, tendríamos:

Si R es el radio de la circunferencia pequeña en el dibujo, su radio sería $\frac{r}{10} \cdot R$

Si b es la longitud de la base en el dibujo, la base mediría $\frac{r}{10} \cdot b$

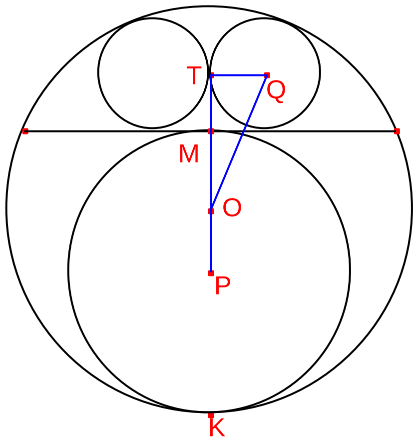
Si a es la longitud de la altura en el dibujo, la altura mediría $\frac{r}{10} \cdot a$

13 14

En la figura hay dos circunferencias pequeñas de radio r y una grande de radio s en el interior de una circunferencia.
Calculad el diámetro de la circunferencia exterior.
Jefatura de Nagasaki

Solución:

Sea la circunferencia exterior de centro O y radio $\overline{OK} = R$
Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PK} = \overline{PM} = s$
Sea la circunferencia pequeña de centro Q y radio $\overline{QT} = r$

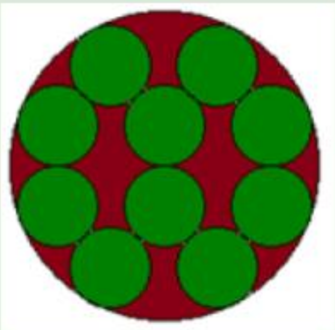


$\overline{OQ} = R - r, \overline{TM} = r$
$\overline{OM} = \overline{MK} - \overline{OK} = 2s - R$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OTQ}$:
$(R-r)^2 = r^2 + (r + 2s - R)^2$
Simplificando:
$r^2 + 4s^2 + 4rs - 4Rs = 0$
Resolviendo la ecuación:
$R = \dfrac{(r+2s)^2}{4s}$
El diámetro de la circunferencia exterior es:
$d = 2R = \dfrac{(r+2s)^2}{2s}$

Construcción con GeoGebra

1. Lo primero será definir dos deslizadores para los radios r y s. Ambos de número y con incremento 0,001. El radio de las pequeñas, r entre 1 y 9 y el de la grande s entre 1.5 y 10.
2. Dibujamos la circunferencia grande con centro en el origen y radio s.
3. Hallamos el punto de intersección de la circunferencia con el eje de ordenadas. Después la recta tangente a la circunferencia en ese punto.
4. Introducimos el punto de coordenadas (r, r+s) que será el centro de la circunferencia pequeña de la derecha. Después la circunferencia centrada en ese punto con radio r. Por simetría respecto al eje de ordenadas, la otra circunferencia pequeña.
5. Dibujamos la recta que pasa por los centros de la circunferencia grande y la pequeña de la derecha. Después el punto de intersección de esta recta con la circunferencia pequeña.
6. Por simetría, lo mismo para la circunferencia de la izquierda.
7. Dibujamos la circunferencia que pasa por tres puntos: los dos que acabamos de hallar en las circunferencias pequeñas y el tercero el de intersección de la parte inferior de la grande con el eje de ordenadas.

16



23

En una circunferencia se han inscrito diez circunferencias iguales. Determinad la proporción entre el radio de una pequeña y el radio de la circunferencia exterior.

Jefatura Shisouka

Solución:

Sea O el centro de la circunferencia exterior de radio $R = \overline{OT}$.
Sea L el centro de la circunferencia de radio $r = \overline{LK} = \overline{LM} = r$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{OKL}, \overset{\Delta}{OML}$ son iguales.
Sea $\angle KLO = \alpha$

$\overline{OL} = R - r$

$$\cos\alpha = \frac{r}{R-r}$$

$\angle OPQ = 2\alpha$

$\overline{OP} = r, \overline{PQ} = 2r, \overline{OQ} = R - r$

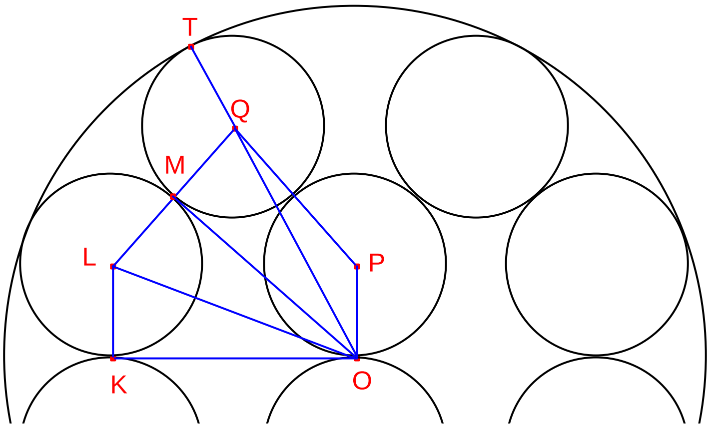
Aplicando el teorema del coseno al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OPQ}$

$$(R-r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2\cdot 2r^2 \cdot \cos 2\alpha$$
$$(R-r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2\cdot 2r^2 \cdot (2\cdot cos^2\alpha - 1)$$
$$(R-r)^2 = r^2 + 4r^2 - 2\cdot 2r^2 \cdot \left(2\frac{r^2}{(R-r)^2} - 1\right)$$

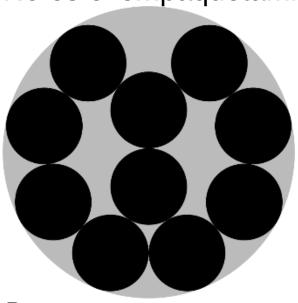
Simplificando:

$$R^3 - 4rR^2 - 3r^2R + 14r^3 = 0$$

Resolviendo la ecuación:
$$\frac{R}{r} = 2\sqrt{2} + 1 \approx 3.82$$



No es el empaquetamiento óptimo. El empaquetamiento óptimo es:



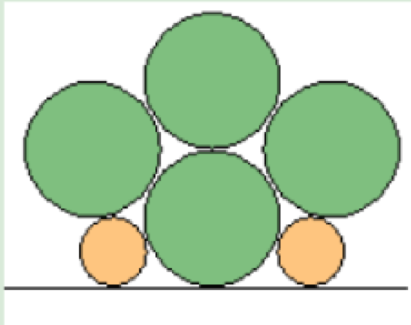
$$\frac{R}{r} = 2\sqrt{2} + 1 \approx 3.81$$

Construcción con GeoGebra
Lo primero para poder dibujar es asignar un valor al radio R de la grande. Vamos a elegir R=10.
Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia centrada en el origen $A(0,0)$ de radio 10.
2. Introducimos un deslizador para el radio de las circunferencias pequeñas. Sería de número, valor mínimo 1 y máximo 5 e incremento de 0,001. Lo llamamos r.
3. Los centros de dos de las circunferencias pequeñas del centro estarán en los puntos $B(0,r)$ y $C(0,-r)$. Dibujamos las circunferencias con centro en el punto correspondiente y radio r.
4. El centro de las demás circunferencias se encuentra a una distancia r de la circunferencia grande. Si dibujamos la circunferencia centrada en el origen y con radio $10 - r$, todos los centros estarán sobre ella.
5. Trazamos la recta que pasa por el centro de la circunferencia pequeña con centro en $(0,r)$ y es paralela al eje de abscisas. Hay dos circunferencias con centro sobre esta recta. Con intersección con la circunferencia de los centros y esta recta, obtenemos las coordenadas de los puntos centrales. Los radios siguen siendo r.
6. Por simetría respecto al eje de abscisas obtenemos dos circunferencias más.
7. Los centros de las que faltan son equidistantes respecto a los centros de las que son tangentes, es decir, están en la mediatriz del segmento que une los centros. Con la intersección con la circunferencia de los centros, obtenemos las coordenadas. Los radios miden r como los demás. Por simetrías obtenemos las que faltan.
8. Movemos el deslizador hasta que las circunferencias sean tangentes.

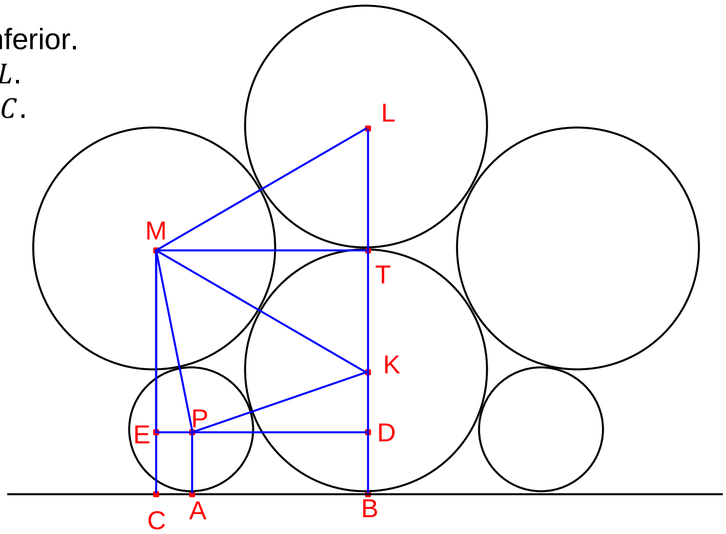
17 **18**

La figura tiene seis circunferencias tangentes tres a tres. Hay cuatro grandes iguales y dos pequeñas iguales. Las dos pequeñas y una de grande son tangentes a una recta. Calculad la proporción entre los radios de los dos tipos de circunferencias.
Jefatura de Nagano.



Solución:

Sean K, L, M los centros de las tres circunferencias iguales de radio $\overline{KT} = \overline{KB} = R$
Sea P el centro de la circunferencia pequeña de radio $\overline{PA} = r$
El triángulo $\overset{\Delta}{KLM}$ es equilátero.
$\overline{MT} = R\sqrt{3}$
Sea C la proyección de M sobre la recta inferior.
Sea D la proyección de P sobre la recta KL.
Sea E la proyección de P sobre la recta MC.



$\overline{PK} = R + r, \overline{DK} = R - r$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PDK}$:
$\overline{PD} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$

$\overline{PE} = \overline{MT} - \overline{PD} = R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}$

$\overline{MP} = R + r, \overline{ME} = \overline{TB} - \overline{PA} = 2R - r$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MPE}$:
$(R+r)^2 = (2R-r)^2 + \left(R\sqrt{3} - 2\sqrt{Rr}\right)^2$
Simplificando:
$4\sqrt{3}\sqrt{Rr} = 6R - 2r$
Elevando al cuadrado:
$r^2 - 18Rr + 9R^2 = 0$
Resolviendo la ecuación:
$\frac{r}{R} = 9 - 6\sqrt{2}$

Construcción con GeoGebra

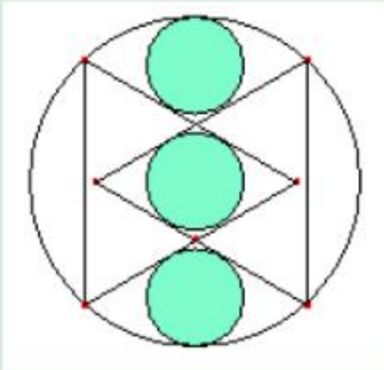
Lo primero para poder dibujar una de las circunferencias grandes es asignar un valor al radio R. Vamos a elegir $R = 10$.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia grande inferior, con centro en $A(0{,}0)$ y radio 10.
2. Hallamos el punto de intersección de la circunferencia con el eje de ordenadas.
3. Por simetría dibujamos la circunferencia grande que tiene encima.
4. Los centros de tres circunferencias iguales y tangentes se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero. Necesitamos el centro de la circunferencia superior.
5. Dibujamos el triángulo equilátero con base el segmento determinado por los dos centros. Con centro en el vértice y radio 10 dibujamos una de las otras circunferencias grandes. La otra, con el mismo procedimiento o por simetría.
6. Dibujamos la recta tangente inferior a la primera circunferencia. En ella también están apoyadas las dos circunferencias pequeñas.
7. El centro de las circunferencias pequeñas está sobre la mediatriz del segmento que une los centros de la circunferencia inferior y una de las laterales.
8. Marcamos un punto sobre la horizontal, y por él, la perpendicular. El punto de corte de ambas rectas, perpendicular y mediatriz, será el centro de la circunferencia pequeña.
9. Con el punto sobre la horizontal y el centro dibujamos una de las circunferencias pequeñas. Movemos el punto sobre la horizontal hasta que la circunferencia sea tangente a las dos circunferencias grandes y a la recta horizontal. La otra por simetría.
10. Tenemos el centro y un punto de la circunferencia pequeña, podemos medir el radio.

19 **20**

En una circunferencia de radio R se han dibujado dos triángulos equiláteros iguales con los lados paralelos. En la intersección de los dos triángulos y en el exterior de los dos triángulos se han dibujado tres circunferencias de igual radio.
Calculad el radio de las tres circunferencias.
Jefatura de Ishikawa



Solución:

Sea la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA} = R$
Sea la circunferencia de centro O y radio $\overline{OK} = r$
Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PL} = \overline{PA} = r$
Sea B el punto intersección de los dos triángulos equiláteros.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OKB}$:

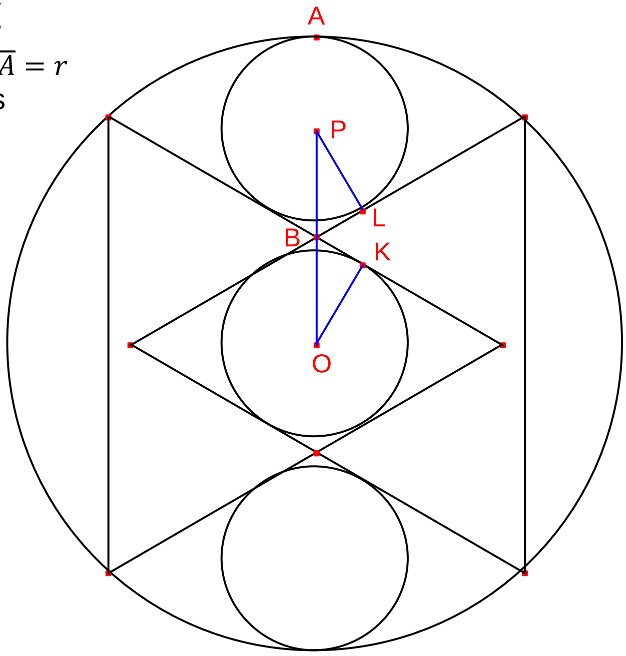
$$\overline{OB} = \overline{PB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$$

$$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{OB} + r = R$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) r = R$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{4\sqrt{3} - 3}{13}$$



Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar la circunferencia grande es asignar un valor al radio R. Vamos a elegir $R = 10$.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia grande con centro en $A(0,0)$ y radio 10.
2. Insertamos un deslizador de número, entre 0 y 10 con incremento 0.001. Lo llamaremos a.
3. Definimos el punto $(a, 0)$, y por él, la perpendicular al eje de abscisas. Los puntos de corte de esta recta con la circunferencia serán los vértices de un lado del triángulo equilátero de la derecha. Lo dibujamos.
4. El otro lo conseguimos por simetría respecto al eje de ordenadas.
5. Movemos el deslizador hasta que los dos triángulos estén en una posición parecida a la del dibujo.
6. Empezamos por dibujar la circunferencia central. Su centro está en el (0,0). Si dibujamos la recta tangente a uno de los lados del rombo que la debe contener que pase por el (0,0), obtendremos un punto de la circunferencia. Ya podemos dibujarla.
7. Si trazamos la perpendicular al eje de abscisas que pase por el punto de tangencia de la circunferencia que ya tenemos con el rombo, tendremos los puntos de tangencia de las otras dos circunferencias con los lados del triángulo en uno de los dos lados del eje de ordenadas. Por simetría, podemos obtener los del otro lado.
8. Ahora tenemos tres puntos de cada una de las dos circunferencias: los dos que acabamos de obtener donde es tangente a los triángulos, y el punto en que coincide con la circunferencia grande. En la de arriba sería el (0,10). Podemos dibujarlas.
9. Sólo falta mover el deslizador para que los radios de las tres circunferencias coincidan.

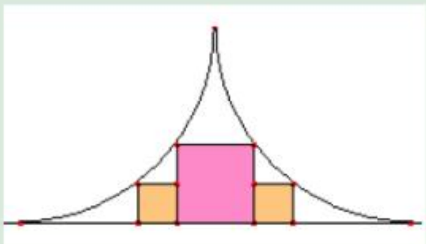
21

Dada una recta y dos arcos iguales de radio r tangentes entre ellos y tangentes a la recta, se han dibujado tres cuadrados.

Calculad la medida de los lados de los cuadrados.

Jefatura Fukushima

28



Solución:

Sea el arco de centro O y radio $\overline{OP} = \overline{OT} = r$

Como los dos arcos son tangentes e iguales, es un cuadrante.

Sea el cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = c$

Sea el cuadrado $AEFG$ de lado $\overline{AG} = d$

Sea K la proyección de D sobre $\overline{OP}$

$\overline{OK} = r - c, \overline{KD} = r - \frac{1}{2}c$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OKD}$:

$$r^2 = (r + c)^2 + \left(r + \frac{1}{2}c\right)^2$$

Simplificando:

$5c^2 - 12rc + 4r^2 = 0$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{c}{r} = \frac{2}{5}$$

Sea L la proyección de F sobre $\overline{OP}$

$\overline{OL} = r - d, \overline{KD} = r - d - \frac{1}{2}c = \frac{4}{5}r - d$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OLF}$:

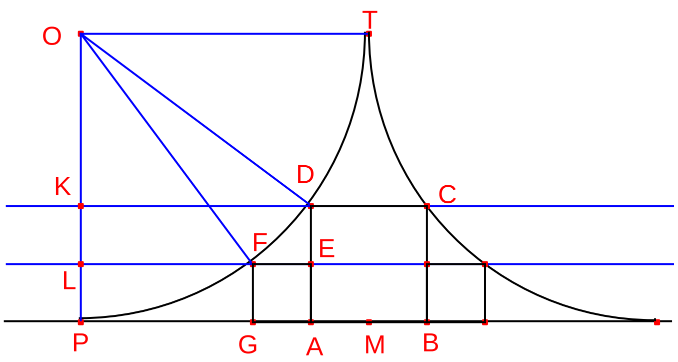
$r^2 = (r+d)^2 + \left(\frac{4}{5}r - d\right)^2$

Simplificando:

$25d^2 - 45rd + 8r^2 = 0$

Resolviendo la ecuación:

$\frac{d}{r} = \frac{1}{5}$



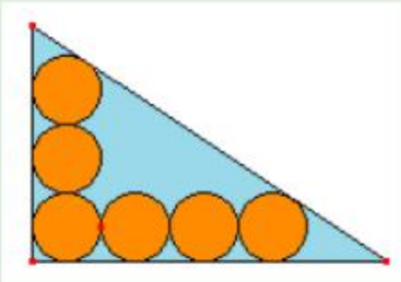
Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar una de las circunferencias es asignar un valor al radio R. Vamos a elegir $R = 10$.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia de la izquierda, con centro en $A(0,10)$ y radio 10. La de la derecha tendrá centro en $B(20,10)$ y el mismo radio.
2. Marcamos dos puntos sobre la circunferencia de la izquierda. Serán los vértices de dos de los cuadrados.
3. En cada punto trazamos la recta perpendicular al eje de abscisas. Hallamos los puntos de intersección de las verticales con el eje. Con ellos tendremos el lado vertical izquierdo de cada uno de los cuadrados.
4. Ahora basta con mover los dos puntos que hemos colocado sobre la circunferencia hasta que los cuadrados estén en la posición buscada. El cuadrado pequeño de la derecha que nos falta, lo podemos sacar por simetría.

24



25

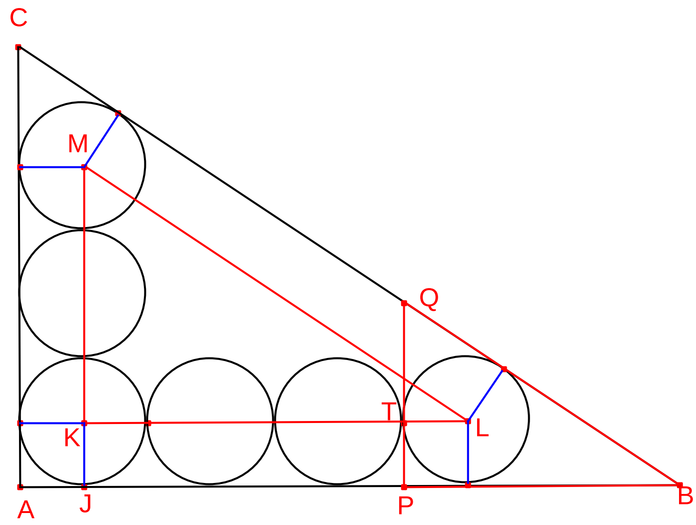
En un triángulo rectángulo se han inscrito seis circunferencias iguales y tangentes entre si de radio r.
Calculad la proporción de los catetos.
Calculad la medida de los catetos.
Jefatura de Fukushima

Solución:

Sea el triángulo rectángulo exterior $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Sean las circunferencias de centros K, L, M i radio $\overline{KJ} = \overline{LT} = r$.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KLM}$ son semejantes.
$\overline{KL} = 6r, \overline{KM} = 4r$
Aplicando el teorema de Tales:
$\frac{b}{c} = \frac{\overline{KM}}{\overline{KL}} = \frac{4r}{6r} = \frac{2}{3}$
Por el punto de tangencia T trazamos una perpendicular al lado $\overline{AB}$ que corta a los lados del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ en los puntos P, Q.

Los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{PBQ}$ son semejantes.
Sea $\overline{PQ} = 2k, \overline{PB} = 3k$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PBQ}$:
$\overline{BQ} = k\sqrt{13}$

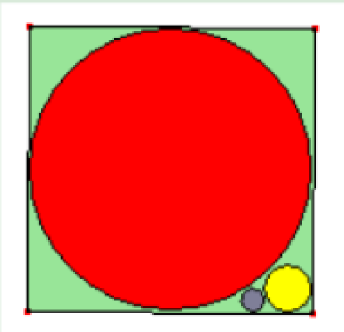


La circunferencia de centro L está inscrita al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PBQ}$.
El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo es:
$$r = \frac{\overline{PQ} + \overline{PB} - \overline{BQ}}{2} = \frac{2k + 3k - k\sqrt{13}}{2}$$
$$2r = \left(5 - \sqrt{13}\right)k$$
Resolviendo la ecuación:
$$k = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} r$$
Los catetos del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ son:
$$\overline{AB} = 6r + 3k = \frac{17 + \sqrt{13}}{2} r, \overline{AC} = 4r + 2k = \frac{17 + \sqrt{13}}{3} r$$

Construcción con GeoGebra
Lo primero para poder dibujar una de las circunferencias es asignar un valor al radio R. Vamos a elegir $R = 1$.
Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia inferior izquierda, con centro en $A(0,0)$ y radio 1.
2. Para dibujar las demás, definimos dos vectores para trasladarlas: En horizontal el (2,0) y en vertical el (0,2).
3. Dibujamos mediante traslaciones las demás circunferencias.
4. La base y la altura del triángulo es tangente a las circunferencias, usando recta tangente a dos de las circunferencias horizontales obtendremos la base, y con dos de las verticales la altura.
5. La hipotenusa es tangente a las dos circunferencias de los extremos.
6. Hay de desechar una de las dos tangentes que hemos obtenido cada vez que hemos aplicado recta tangente. Sólo nos interesa la exterior en cada caso.
7. Con intersección, obtenemos los vértices del triángulo. Ya podemos dibujarlo.

26



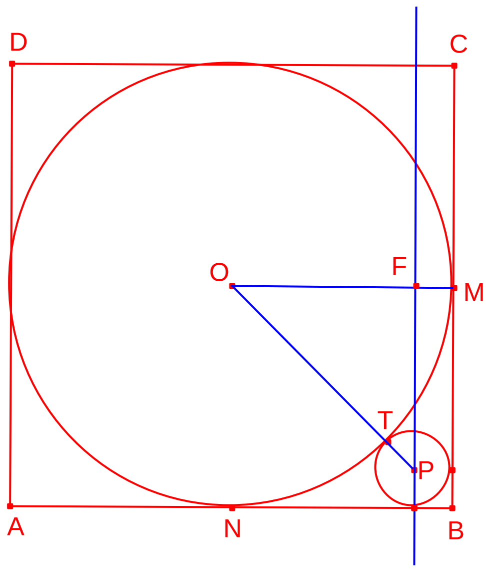
27

Dado un cuadrado se ha inscrito una circunferencia de radio r. Otra circunferencia es tangente exterior a la inscrita y a dos lados del cuadrado. Una tercera circunferencia es tangente a un lado y tangente exterior a las dos circunferencias anteriores **Calculad el radio de las circunferencias.**

Jefatura de Saitama

Solución:

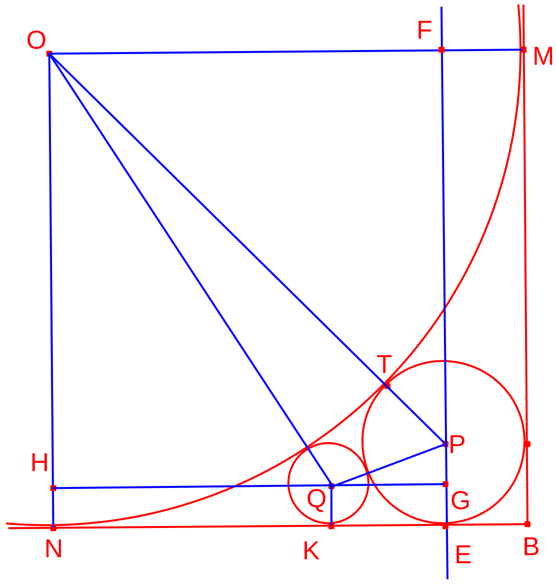
Sea el cuadrado $ABCD$ de centro O.
Sea la circunferencia inscrita al cuadrado de radio $\overline{OM} = \overline{ON} = r$
Sea la circunferencia de centro P y radio $\overline{PT} = s$ tangente exterior a la circunferencia inscrita al cuadrado y a los lados del cuadrado.



Por el punto P trazamos una perpendicular al lado $\overline{AB}$ que corta al segmento $\overline{OM}$ en el punto F.
$\overline{OT} = \overline{PF} = r - s, \overline{OP} = r + s$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OFP}$:
r+s= $(r - s)\sqrt{2}$.
Resolviendo la ecuación:
$s = (3 - 2\sqrt{2})r$

Sea la circunferencia de centro Q y radio $\overline{QK} = t$ tangente exterior a las otras dos circunferencias y al lado del cuadrado.
Sea H la proyección de Q sobre el segmento $\overline{ON}$
Sea G la proyección de Q sobre la recta PF

Sea $a = \overline{HQ}, \overline{GQ} = r - s - a$
$\overline{OH} = r - t, \overline{OQ} = r + t$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OHQ}$:
$a^2 = 4rt$



$\overline{PG} = s - t, \overline{PQ} = s + t$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OHQ}$:
$4st = (r - s + a)^2$

$$4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)rt = 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)r^2 + 4rt - 4\left(\sqrt{2} - 1\right)r2\sqrt{rt}$$

Simplificando:
$2t - \left(1 + \sqrt{2}\right)r = 2\sqrt{rt}$
Resolviendo la ecuación:

$$t = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}r$$

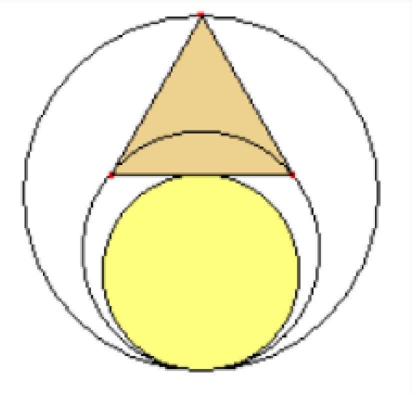
Notemos que $t = \frac{1}{2}s$

Construcción con GeoGebra

Primero dibujamos un cuadrado de vértices A(0, 0) y B(1, 0) y la circunferencia roja con centro C(0.5, 0.5) y radio r=0.5
Creamos los deslizadores para determinar el radio de las circunferencias:
R1 con valores comprendidos entre 0 y 0.1
R2 con valores comprendidos entre 0 y 0.05
Dibujamos el segmento BC. El centro de la circunferencia amarilla se encontrará sobre él y sus coordenadas son C1(1-R1, R1) y radio R1. Debemos ajustar su valor para que sea tangente a la circunferencia roja.
Para situar el centro de la circunferencia gris no tenemos una restricción tan clara. Situaremos el punto D en el lado AB del cuadrado, las coordenadas del centro serán C2=B+(0, R2) y su radio R2. Ahora debemos modificar la posición de el punto D y el valor del radio para que sea tangente a las otras dos circunferencias.

30

31



En una circunferencia de radio R se han inscrito dos circunferencias tangentes interiores en el mismo punto de tangencia.
El radio de la circunferencia pequeña es r.
Un triángulo equilátero es tangente a la circunferencia pequeña y tiene dos vértices en la circunferencia mediana y el otro en la circunferencia exterior.
Calculad el radio de la circunferencia mediana.
Jefatura Nagasaki

Solución:

Sea la circunferencia grande de centro O y radio $\overline{OT} = \overline{OC} = R$
Sea la circunferencia pequeña de centro Q y radio $\overline{QM} = \overline{QT} = r$
Sea la circunferencia mediana de centro P y radio $\overline{PA} = \overline{PB} = s$

Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{MC} = 2(R - r)$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BMC}$:

$$\overline{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 2(R - r)$$

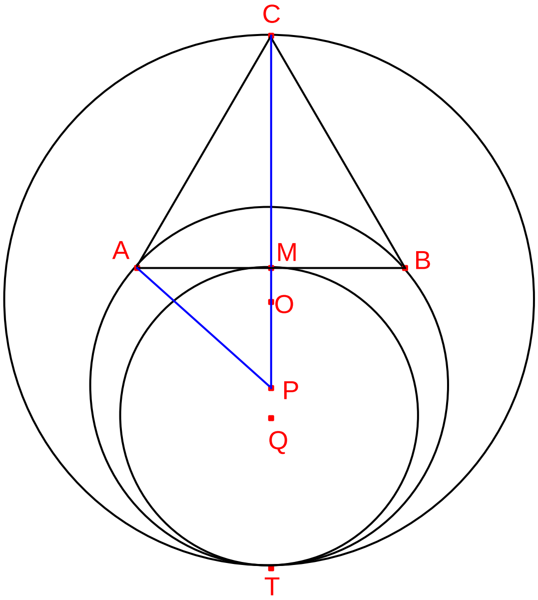
$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (R - r)$$

$\overline{PM} = 2r - s$
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PMA}$:

$$s^2 = (2r - s)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (R - r)\right)^2$$

Simplificando:
$3rs = 4r^2 - 2Rr + R^2$

$$s = \frac{R^2 - 2Rr + 4r^2}{3r}$$



Construcción con GeoGebra

Lo primero para poder dibujar una de las circunferencias es asignar un valor al radio de una de ellas, la pequeña, RP. Vamos a elegir $RP = 10$.

Los pasos a seguir serían:

1. Dibujamos la circunferencia pequeña, con centro en $A(0,0)$ y radio 10.
2. La base del triángulo está sobre la recta tangente a la circunferencia en el punto $B(0,10)$. La dibujamos.
3. Con punto sobre objeto, marcamos el vértice derecho de la base del triángulo, y por simetría de éste sobre el eje de ordenadas, el otro vértice.
4. Dibujamos el triángulo equilátero con base en estos dos puntos.
5. La circunferencia mediana, podemos dibujarla sabiendo que pasa por tres puntos: los dos vértices de la base del triángulo y el punto inferior de la circunferencia pequeña, el $(0, -10)$.
6. Por este punto y el vértice superior del triángulo pasa un diámetro de la circunferencia grande. Hallamos el punto medio del segmento y dibujamos la circunferencia con el centro obtenido y uno de los dos puntos que conocemos, por ejemplo, el vértice superior del triángulo.
7. Moviendo el vértice inferior derecho del triángulo, el que hemos definido sobre la recta, modificamos los tamaños.