

# FEBRERO 2023

**1**

Encontrar el término del desarrollo del binomio  $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$  que contiene  $a^7$



Solución

El término  $k+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \binom{12}{k} \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k} \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^k$$

Exponente de  $a \Rightarrow$

$$a^{\frac{2}{3}(12-k)} \cdot a^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \frac{24-2k}{3} + \frac{k}{2} = 7$$

Resolviendo la ecuación:

$$2(24-2k)+3k=42 \Rightarrow 48-4k+3k=42 \Rightarrow k=6$$

Por tanto, buscamos el término siete:  $T_7 =$

$$\binom{12}{6} \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-6} \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^6 = 924 \frac{3^6}{4^6} \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^6 \frac{2^6}{3^6} \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^6 = \frac{231}{16} a^7$$

**2**

¿Para qué valor de  $x$  el quinto término del desarrollo de  $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$  es igual a 105?



Solución

$$T_5 = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 210 \frac{1}{2^6 x^3} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{210}{1024x^3} = \frac{105}{512x^3} \Rightarrow$$

$$\frac{105}{512x^3} = 105 \implies x^3 = \frac{1}{512} \implies x = \frac{1}{8}$$

**3**

**4**

Encontrad el término central de  $\left( -\sqrt[7]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a} - \sqrt[7]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}} \right)^n$ , sabiendo que el coeficiente del quinto término es al coeficiente del tercer término como 11 es a 1.

Solución

$$\frac{\binom{m}{4}}{\binom{m}{2}} = \frac{11}{1} \implies \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \frac{m(m-1)}{2} \implies (m-2)(m-3) = 132$$

$$\implies m^2 - 5m - 126 = 0 \implies m = 14 \quad m = -9$$

Pero  $m = -9$  no es una solución válida. Por tanto el término central es:

$$T_8 = \binom{14}{7} \left( -\sqrt[7]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a} \right)^7 \cdot \left( -\sqrt[7]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}} \right)^7 = -3432 a \cdot a^{7/2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-1/2} = -3432 a^2$$

**6**

En el desarrollo del binomio  $\left( x^3 + \frac{1}{x} \right)^n$  los coeficientes de los términos cuarto y decimoctavo son iguales. Encontrar el término donde aparece  $x^4$

**7**

Solución

Son iguales los números combinatorios simétricos  $\implies$

$$\binom{m}{3} = \binom{m}{m-3} \implies m-3=17 \implies m=20$$

El término  $k+1$  será:

$$\binom{20}{k} (x^3)^{20-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{20}{k} x^{60-3k-k} = \binom{20}{k} x^{60-4k} \quad 60-4k=4 \implies k=14$$

Por tanto el término 15 es:

$$T_{15} = \binom{20}{14} (x^3)^{20-14} \left(\frac{1}{x}\right)^{14} = 38760 x^4$$

**8**

En la expresión  $\left(\frac{\sqrt[3]{m^x}}{x+1\sqrt[m]{m^x}} + m\sqrt[x]{m^{x-2}}\right)^{10}$   
Encontrar  $x$  para que el término séptimo sea  $210m^6$ .



Solución

El término séptimo es:

$$T_7 = \binom{10}{6} \left( \frac{\sqrt[3]{m^2}}{x+1\sqrt[m]{m^x}} \right)^4 \left( m\sqrt[x]{m^{x-2}} \right)^6 = 210m^6$$

$$210 \left( \frac{m^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{x}{x+1}}} \right)^4 \left( m^6 \cdot m^{\frac{6x-12}{x}} \right) = 210m^6$$

Igualando los exponentes:

$$\frac{8}{3} - \frac{4x}{x+1} + 6 + \frac{6x-12}{x} = 6 \implies \frac{8}{3} - \frac{4x}{x+1} + \frac{6x-12}{x} = 0$$

Quitando los denominadores:

$$8x(x+1) - 12x^2 + (6x-12)3(x+1) = 0$$

$$8x^2 + 8x - 12x^2 + 18x^2 + 18x - 36x - 36 = 0$$

$$14x^2 - 10x - 36 = 0 \implies 7x^2 - 5x - 18 = 0 \implies x=2 \text{ o } x= -\frac{9}{7}$$

**10****11**

La suma de todos los coeficientes del desarrollo del binomio  $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)^m$  es  
64. Encontrad el término donde el exponente de  $x$  es  $\frac{5}{2}$

Solución

Sumando los coeficientes:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m \implies 2^m = 64 \implies m=6$$

El término de posición  $k+1$  será:

$$T_{k+1} = \binom{6}{k} \left(\sqrt[3]{x}\right)^{6-k} \left(\sqrt{x}\right)^k$$

El exponente de  $x$  será:

$$\frac{6-k}{3} + \frac{k}{2} = \frac{5}{2} \implies 12 - 2k + 3k = 15 \implies k=3$$

Por tanto, el cuarto término será:

$$T_4 = \binom{6}{3} \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \left(\sqrt{x}\right)^3 = 20x^{\frac{5}{2}}$$

**13**

El cuarto término del desarrollo del binomio  $\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{(\sqrt[3]{x})^{10 \log x}} + x \cdot \frac{\log x^2}{\sqrt{x}}\right)^6$  es 100. Encontrar  $x$ .



Solución

$$T_4 = \binom{6}{3} \left( \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{x}^{10 \log x}} \right)^3 \left( x \cdot \sqrt[3]{x^3} \right)^3 = 100 \implies 20 \frac{5}{x^{10 \log x}} \cdot x^3 \cdot x^{\frac{3}{\log x}} = 100 \implies$$

$$\frac{100}{x^{10 \log x}} \cdot x^3 \cdot x^{\frac{3}{\log x}} = 100 \implies x^{-10 \log x + 3 + \frac{1}{\log x}} = 1 \implies (-10 \log x) + 3 + \frac{1}{\log x} = 0$$

Cambiando la variable

$$\log x = t \implies -10t + 3 + \frac{1}{t} = 0 \implies -10t^2 + 3t + 1 = 0 \implies$$

$$t = \frac{1}{2} \implies \log x = \frac{1}{2} \implies x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$t = -\frac{1}{5} \implies \log x = -\frac{1}{5} \implies x = 10^{-\frac{1}{5}}$$

**14**



**15**

Encontrar el valor de  $x$  en el desarrollo  $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ , sabiendo que el término que contiene  $x$  elevado a un exponente que es  $\frac{5}{2}$  el exponente del término siguiente, es 144 unidades más grande que el último término mencionado.

Solución

$$\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} \left(\sqrt[4]{x}\right)^{8-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$$

Exponente del término  $k+1$ :

$$\frac{8-k}{4} - \frac{k}{2} = \frac{8-3k}{4}$$

Exponente del término  $k+2$ :

$$\frac{8-(k+1)}{4} - \frac{k+1}{2} = \frac{5-3k}{4}$$

Igualando los exponentes:

$$\frac{8-3k}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5-3k}{4} \implies 8-3k = \frac{5}{2}(5-3k) \implies 16-6k=25-15k \implies k=1$$

La relación entre los términos será:

$$T_2=144+T_3$$

$$\binom{8}{1} \left(\sqrt[4]{x}\right)^7 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^1 = 144 + \binom{8}{2} \left(\sqrt[4]{x}\right)^6 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \implies 8x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 144 + 28x^{\frac{6}{4}} \cdot x^{-1} \implies 8x^{\frac{5}{4}} = 144 + 28x^{\frac{1}{2}} \implies 8\sqrt[4]{x^5} - 28\sqrt{x} - 144 = 0$$

Cambiando la variable:

$$\sqrt{x} = z^2 \implies \sqrt[4]{x} = z \implies 8z^5 - 28z^2 - 144 = 0$$

Por Ruffini:

$$z=2 \implies \sqrt[4]{x} = 2 \implies x=16$$

**9**

Encontrad para qué valor de  $x$ , la suma del segundo y cuarto término en el desarrollo de  $\left(\sqrt{2^{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^m$  es igual a  $\frac{129}{2}\sqrt{2}$ , sabiendo que la suma de los coeficientes binómicos de los tres últimos términos es igual a 11.



**16**

Solución

La relación entre los coeficientes es:

$$\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2} = 11 \implies$$

$$1 + \frac{m!}{(m-1)! \cdot 1!} + \frac{m!}{(m-2)! \cdot 2!} = 11 \implies 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} = 11 \implies$$

$$2 + 2m + m^2 - m = 22 \implies m^2 + m - 20 = 0 \implies m=4 \quad \text{or} \quad m= -5$$

La solución  $m=-5$  no vale

$$\begin{aligned} T_2 + T_4 &= \binom{4}{1} \left(\sqrt{2^{x+1}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{2^x}} + \binom{4}{3} \left(\sqrt{2^{x+1}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^3 = \\ &= 4 \cdot 2^{\frac{3x+3}{2}} \cdot 2^{\frac{-x}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}} \cdot 2^{\frac{-3x}{2}} = 4 \cdot 2^{\frac{3x}{2} + \frac{3}{2} - \frac{x}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3x}{2}} = 4 \cdot 2^{\frac{x+3}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{1-x}{2}} = \\ &= 4 \cdot 2^x \cdot \sqrt{2^3} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-x} = 4 \cdot 2^x \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-x} \end{aligned}$$

La relación entre los términos es:

$$4 \cdot 2^x \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-x} = \frac{129}{2} \sqrt{2}$$

Simplificando por  $\sqrt{2}$ :

$$8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{129}{2} \implies$$

Realizando cambio de variable:

$$2^x = z \implies 8z + \frac{4}{z} = \frac{129}{2}$$

Quitando los denominadores:

$$16z^2 + 8 = 129z \implies 16z^2 - 129z + 8 = 0 \implies$$

$$z = 8 \implies 2^x = 8 \implies x = 3$$

$$z = \frac{1}{16} \implies 2^x = 2^{-4} \implies x = -4$$

**17**

Encontrad el noveno término de una progresión geométrica, cuyo segundo término es el complejo  $\frac{2}{i}$  y la razón  $2+i$ .



Solución

$$a_9 = a_2 \cdot r^7 = \frac{2}{i} (2+i)^7$$

$$\begin{aligned}(2+i)^7 &= \binom{7}{0} 2^7 + \binom{7}{1} 2^6 \cdot i + \binom{7}{2} 2^5 \cdot i^2 + \binom{7}{3} 2^4 \cdot i^3 + \binom{7}{4} 2^3 \cdot i^4 + \binom{7}{5} 2^2 \cdot i^5 + \binom{7}{6} 2 \cdot i^6 + \binom{7}{7} i^7 \\ &= 128 + 448i + 612i^2 + 560i^3 + 280i^4 + 84i^5 + 14i^6 + i^7 = \\ &= 128 + 448i - 672 - 560i + 280 + 84i - 14 - i = -278 - 29i\end{aligned}$$

$$a_9 = \frac{2}{i} (2+i)^7 = \frac{2}{i} (-278-29i) = \frac{2}{i} (-278-29i) \frac{i}{i} = -2(-278i - 29i^2) = -58 + 556i$$

**21****22**

En una progresión geométrica el primer término es el coeficiente del sexto término del desarrollo de  $(x+y)^8$ , y el quinto término (de la progresión) es el logaritmo de la raíz cuadrada de 2187 en base 3. Calcular:

- a) la suma de los diez primeros términos.
- b) la suma de toda la serie.

Solución

$$T_6 = \binom{8}{5} x^3 y^5 \implies a_1 = \binom{8}{5} = 56 \quad a_5 = \log_3 \sqrt{2187} = \log_3 (3)^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \implies r^4 = \frac{\frac{7}{2}}{56} = \frac{1}{16} \implies r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 r - a_1}{r-1} \quad \Rightarrow \quad S_{10} = \frac{\frac{7}{64} \cdot \frac{1}{2} - 56}{\frac{1}{2}} = \frac{7161}{64}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 56 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{7}{64}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{56}{1-\frac{1}{2}} = 112$$

**23**



**24**

La distancia entre el Pont de Suert y Vilaller son  $x$  Km. Si expresamos esta distancia, sucesivamente, en Km, Hm, Dm, m, dm, cm y mm y sumamos todos estos números obtenemos 12.222.221. Encontrad  $x$ .

Solución

$$x + 10x + 100x + 1000x + 10^4x + 10^5x + 10^6x$$

Es una suma de siete términos de una progresión geométrica de razón 10:

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{10^6 x \cdot 10 - x}{10 - 1} = \frac{(10^7 - 1)x}{9}$$

$$\frac{(10^7 - 1)x}{9} = 12.222.221 \quad \Rightarrow \quad x = 11 \text{ km}$$

**18**

Los sistemas  $\begin{cases} x - y = a \\ 2y - x = b \end{cases}$  i  
 $\begin{cases} x + 2y = c \\ x + y = 22 \end{cases}$  tienen las mismas soluciones. Encontrad a, b y c sabiendo que a, b y c están en progresión geométrica.

**25**

Solución

$$a = \frac{b}{r}, \quad b, \quad c = b \cdot r$$

Reescribimos los sistemas

$$\begin{cases} x - y = \frac{b}{r} & (1) \\ 2y - x = b & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = br & (3) \\ x + y = 22 & (4) \end{cases}$$

Del primer sistema obtenemos la razón

$$\begin{cases} r(x - y) = b \\ 2y - x = b \end{cases} \implies r(x - y) = 2y - x \implies r = \frac{2y - x}{x - y}$$

Sustituimos el valor de b de (2) en (3)

$$x + 2y = (2y - x) \frac{2y - x}{x - y} \implies$$

$$(x + 2y)(x - y) = (2y - x)^2 \implies x^2 - xy + 2yx - 2y^2 = 4y^2 - 4xy + x^2 \implies$$

$$5xy - 6y^2 = 0 \quad (5)$$

Ahora sustituimos x de (4) en (5):  $5(22 - y)y - 6y^2 = 0 \implies 110y - 11y^2 = 0 \implies$

$$11y(10-y)=0 \implies y=10 \quad y=0$$

Si  $y=0 \implies (de\ 4) x=22 \implies (de\ 2) b=2y-x=-22 \implies r=-1 \implies (de\ 1) 22=-b$

$\implies b=-22 \implies (de\ 3) 22=(-22)(-1)$  Verifican las cuatro ecuaciones

$$\implies a=22; b=-22; c=22$$

Si  $y=10 \implies (de\ 4) x=12 \implies (de\ 2) b=2y-x=8 \implies r=4 \implies (de\ 1) b=8$

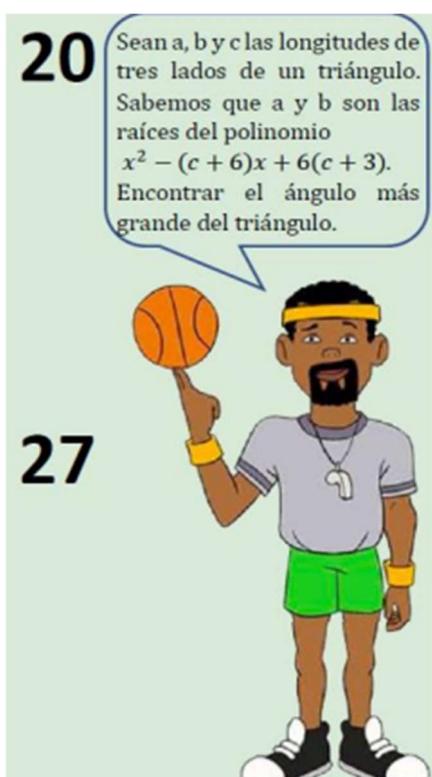
$\implies (de\ 3) 32=8(4)$  Verifican las cuatro ecuaciones

$$\implies a=2; b=8; c=32$$

**20**

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  las longitudes de tres lados de un triángulo. Sabemos que  $a$  y  $b$  son las raíces del polinomio  $x^2 - (c+6)x + 6(c+3)$ . Encontrar el ángulo más grande del triángulo.

**27**



Solución

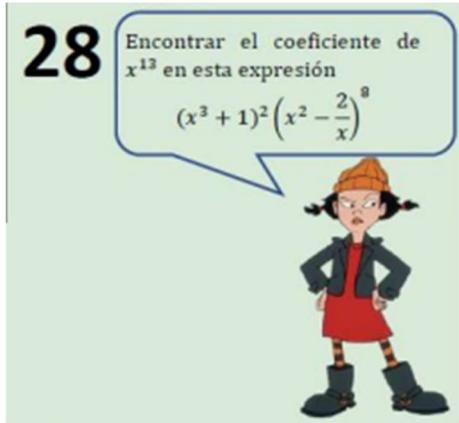
De las fórmulas de Cardano-Vieta

$$\begin{aligned} a+b &= c+6 \\ ab &= 6(c+3) \end{aligned}$$

Consideramos

$$\begin{aligned}
 a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\
 &= (c+6)^2 - 2(6c+18) \\
 &= c^2 + 12c + 36 - 12c - 36 = c^2
 \end{aligned}$$

Por tanto se trata de una terna Pitagórica  $\Rightarrow C = 90^\circ$



Solución

$$(x^3 + 1)^2 \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8 = \frac{1}{x^8} (x^3 + 1)^2 (x^3 - 2)^8$$

Cambio de variable  $x^3 = y \Rightarrow$

$$(y+1)^2(y-2)^8 \quad \text{Es equivalente a encontrar el coeficiente de } y^7$$

$(y^2 + 2y + 1)(y-2)^8$  lo cual implica:

$$y^2 \cdot y^5 \Rightarrow \text{coeficiente de } y^5 \text{ en } (y-2)^8: \binom{8}{3} y^5 (-2)^3 = -448y^5 \Rightarrow -448y^7$$

$$2y \cdot y^6 \Rightarrow \text{coeficiente de } y^6 \text{ en } (y-2)^8: \binom{8}{2} y^6 (-2)^2 = 112y^6 \Rightarrow 224y^7$$

$$1 \cdot y^7 \Rightarrow \text{coeficiente de } y^7 \text{ en } (y-2)^8: \binom{8}{1} y^7 (-2)^1 = -16y^7$$

$$\Rightarrow (-448 + 224 - 16)y^7 = -240 y^7 \Rightarrow -240x^{21} \Rightarrow \frac{1}{x^8} (-240x^{21}) = -240 x^{13}$$

Por tanto la solución es -240