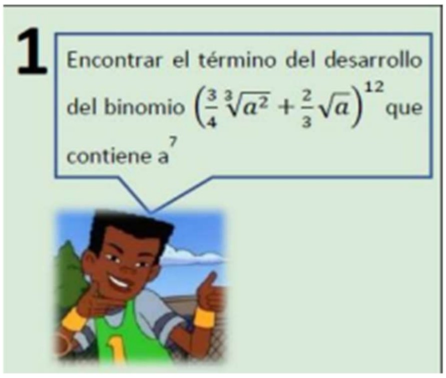
FEBRERO 2023



Solución

El término k+1==>

$$==> \binom{12}{k}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{k}$$

Exponente de a==>

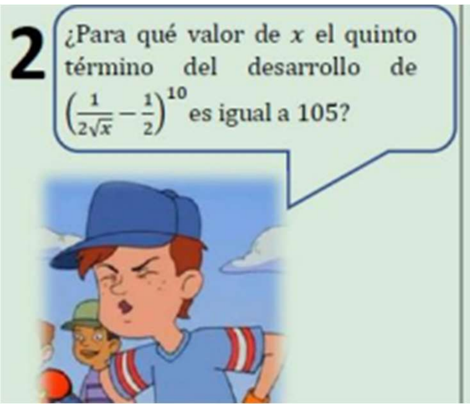
$$a^{\frac{2}{3}(12-k)}\cdot a^{\frac{k}{2}} ==> \frac{24-2k}{3}+\frac{k}{2}=7$$

Resolviendo la ecuación:

$$2(24-2k)+3k=42 \quad ==> 48-4k+3k=42 \quad ==> k=6$$

Por tanto, buscamos el término siete: $T_7 =$

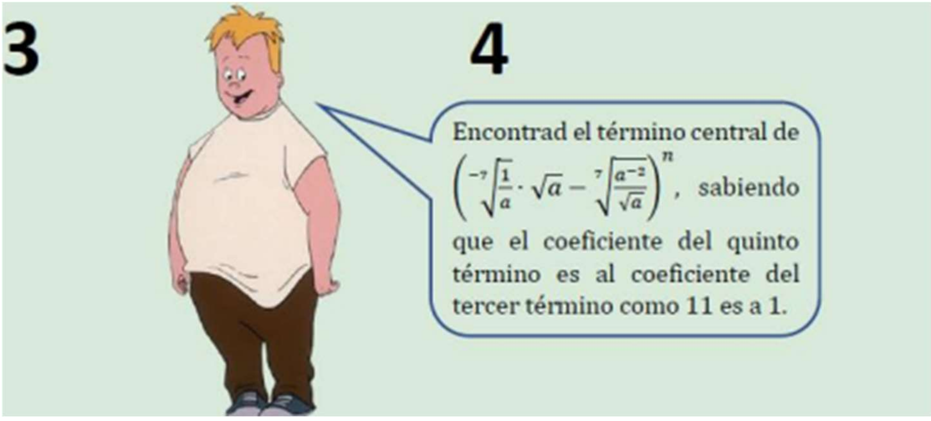
$$\binom{12}{6}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-6}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{6}=924\,\frac{3^6}{4^6}\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^6\frac{2^6}{3^6}\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^6=\frac{231}{16}a^7$$



Solución

$$T_5=\binom{10}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}=210\,\frac{1}{2^6x^3}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{210}{1024x^3}=\frac{105}{512x^3} \quad ===>$$

$$\frac{105}{512x^3}=105 \quad ==> \quad x^3=\frac{1}{512} \quad ===> \quad x=\frac{1}{8}$$



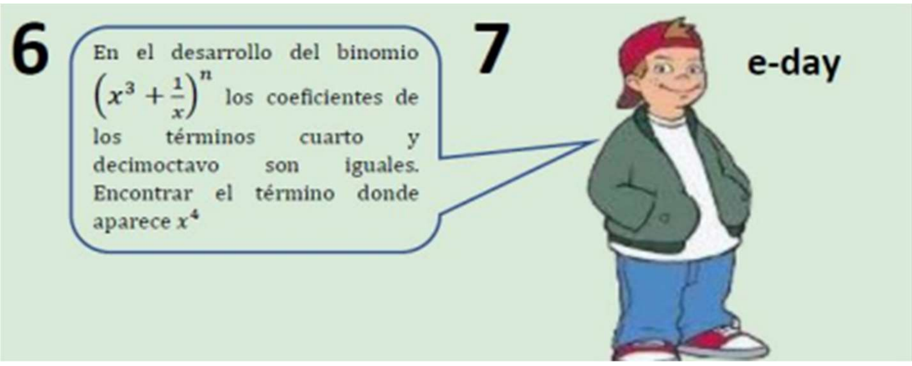
Solución

$$\frac{\binom{m}{4}}{\binom{m}{2}}=\frac{11}{1} \quad ===> \quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=11\frac{m(m-1)}{2} \quad ===> \quad (m-2)(m-3)=132$$

$$===> \quad m^2-5m-126=0 \quad ==> \quad m=14 \qquad m=-9$$

Pero m=-9 no es una solución válida. Por tanto el término central es:

$$T_8=\binom{14}{7}\left(\sqrt[-7]{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{a}\right)^{7}\cdot\left(-\sqrt[7]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^{7}=-3432\ a\cdot\ a^{7/2}\cdot a^{-2}\cdot a^{-1/2}=\mathbf{-\,3432\ a^2}$$



Solución

Son iguales los números combinatorios simétricos ==>

$$\binom{m}{3}=\binom{m}{m-3} \quad ===> \quad m-3=17 \qquad ==> \quad m=20$$

El término k+1 será:

$$\binom{20}{k}\left(x^{3}\right)^{20-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k}=\binom{20}{k}x^{60-3k-k}=\binom{20}{k}x^{60-4k} \qquad 60-4k=4 \quad \Longrightarrow k=14$$

Por tanto el término 15 es:

$$T_{15}=\binom{20}{14}\left(x^{3}\right)^{20-14}\left(\frac{1}{x}\right)^{14}=\mathbf{38760\ x^{4}}$$

Solución

El término séptimo es:

$$T_7=\binom{10}{6}\left(\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[x+1]{m^x}}\right)^4\left(m\sqrt[x]{m^{x-2}}\right)^6=210m^6$$

$$210\left(\frac{m^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{x}{x+1}}}\right)^4\left(m^6\cdot m^{\frac{6x-12}{x}}\right)=210m^6$$

Igualando los exponentes:

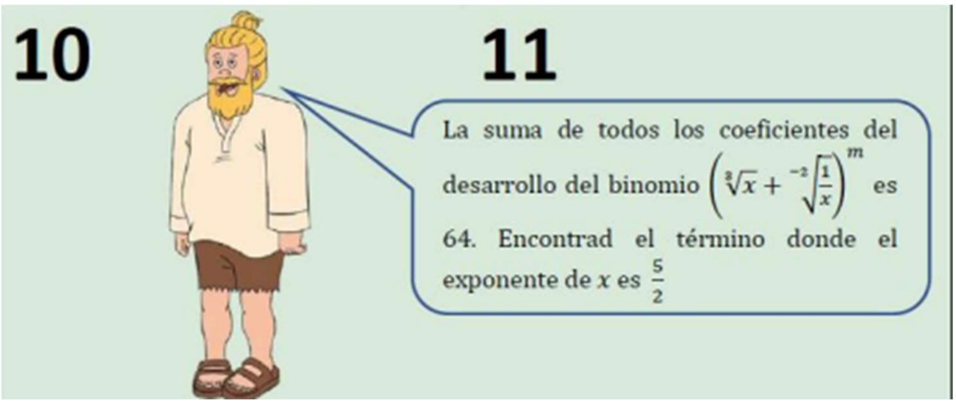
$$\frac{8}{3}-\frac{4x}{x+1}+6+\frac{6x-12}{x}=6 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8}{3}-\frac{4x}{x+1}+\frac{6x-12}{x}=0$$

Quitando los denominadores:

$$8x(x+1)-12x^2+(6x-12)3(x+1)=0$$

$$8x^2+8x-12x^2+18x^2+18x-36x-36=0$$

$$14x^2-10x-36=0 \quad \Longrightarrow \quad 7x^2-5x-18=0 \quad \Longrightarrow \mathbf{x=2} \ \text{o} \ \mathbf{x=-\frac{9}{7}}$$



Solución

Sumando los coeficientes:

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots\cdots+\binom{m}{m}=2^{m} \quad ==> \quad 2^{m}=64 \quad ==> \quad m=6$$

El término de posición k+1 será:

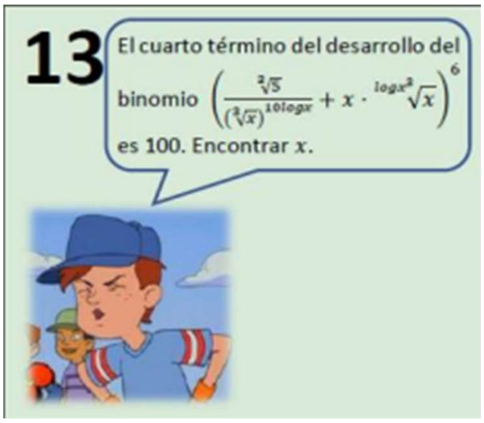
$$T_{k+1}=\binom{6}{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{6-k}\left(\sqrt{x}\right)^{k}$$

El exponente de x será:

$$\frac{6-k}{3}+\frac{k}{2}=\frac{5}{2} \quad ===> \quad 12-2k+3k=15 \quad ===> k=3$$

Por tanto, el cuarto término será:

$$T_{4}=\binom{6}{3}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{3}\left(\sqrt{x}\right)^{3}=20x^{\frac{5}{2}}$$



Solución

$$T_4=\binom{6}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{10\log x}}\right)^3\left(x\cdot\sqrt[\log x^3]{x}\right)^3=100 \quad ===> \quad 20\frac{5}{x^{10\log x}}\cdot x^3\cdot x^{\frac{3}{\log x^3}}=100 \quad ==>$$

$$\frac{100}{x^{10\log x}}\cdot x^3\cdot x^{\frac{3}{3\log x}}=100 \quad ===> \quad x^{-10\log x+3+\frac{1}{\log x}}=1 \quad ===> \quad (-10\log x)+3+\frac{1}{\log x}=0$$

Cambiando la variable

$$\log x=t \quad ==> \quad -10t+3+\frac{1}{t}=0 \quad ===> \quad -10t^2+3t+1=0 \quad ===>$$

$$t=\frac{1}{2} \quad ==> \quad \log x=\frac{1}{2} \quad ===> \quad x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$

$$t=\frac{-1}{5} \quad ==> \quad \log x=-\frac{1}{5} \quad ==> \quad x=10^{\frac{-1}{5}}$$

14

15

Encontrar el valor de x en el desarrollo $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$, sabiendo que el término que contiene x elevado a un exponente que es $\frac{5}{2}$ el exponente del término siguiente, es 144 unidades más grande que el último término mencionado.

Solución

$$\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\left(\sqrt[4]{x}\right)^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$$

Exponente del término k+1:

$$\frac{8-k}{4}-\frac{k}{2}=\frac{8-3k}{4}$$

Exponente del término k+2:

$$\frac{8-(k+1)}{4}-\frac{k+1}{2}=\frac{5-3k}{4}$$

Igualando los exponentes:

$$\frac{8-3k}{4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{5-3k}{4} \text{ ===> } 8-3k=\frac{5}{2}(5-3k) \text{ ===> } 16-6k=25-15k \text{ ===> } k=1 \text{ ==>}$$

La relación entre los términos será:

$T_2=144+T_3$

$$\binom{8}{1}\left(\sqrt[4]{x}\right)^7\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^1=144+\binom{8}{2}\left(\sqrt[4]{x}\right)^6\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \text{ ===> } 8x^{\frac{7}{4}}\cdot x^{\frac{-1}{2}}=144+28x^{\frac{6}{4}}\cdot x^{-1} \text{ ===>}$$

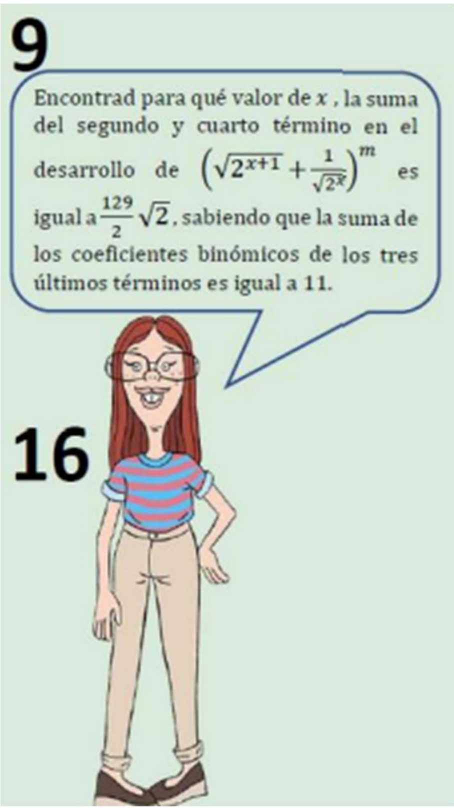
$$8x^{\frac{5}{4}}=144+28x^{\frac{1}{2}} \quad \text{==> } 8\sqrt[4]{x^5}-28\sqrt{x}-144=0$$

Cambiando la variable:

$$\sqrt{x}=z^2 \text{ ==> } \sqrt[4]{x}=z \quad \text{==> } 8z^5-28z^2-144=0$$

Por Ruffini:

$$z=2 \text{ ===> } \sqrt[4]{x}=2 \quad \text{===> } \mathbf{x=16}$$



Solución

La relación entre los coeficientes es:

$$\binom{m}{m}+\binom{m}{m-1}+\binom{m}{m-2}= 11 \implies$$

$$1+\frac{m!}{(m-1)!\,1!}+\frac{m!}{(m-2)!\cdot 2!}=11 \implies 1+m+\frac{m(m-1)}{2}=11 \implies$$

$$2+2m+m^2-m=22 \implies m^2+m-20=0 \implies m=4 \quad \text{i} \quad m=-5$$

La solución m=-5 no vale

$$T_2+T_4=\binom{4}{1}\left(\sqrt{2^{x+1}}\right)^3\frac{1}{\sqrt{2^x}}+\binom{4}{3}\left(\sqrt{2^{x+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^3=$$

$$=4\cdot 2^{\frac{3x+3}{2}}\cdot 2^{\frac{-x}{2}}+4\cdot 2^{\frac{x+1}{2}}\cdot 2^{\frac{-3x}{2}}=4\cdot 2^{\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}-\frac{x}{2}}+4\cdot 2^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}}=4\cdot 2^{x+\frac{3}{2}}+4\cdot 2^{\frac{1}{2}-x}=$$

$$=4\cdot 2^x\cdot\sqrt{2^3}+4\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-x}=4\cdot 2^x\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-x}$$

La relación entre los términos es:

$$4\cdot 2^x\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-x}=\frac{129}{2}\sqrt{2}$$

Simplificando por $\sqrt{2}$:

$$8\cdot 2^x+4\cdot\frac{1}{2^x}=\frac{129}{2} \implies$$

Realizando cambio de variable:

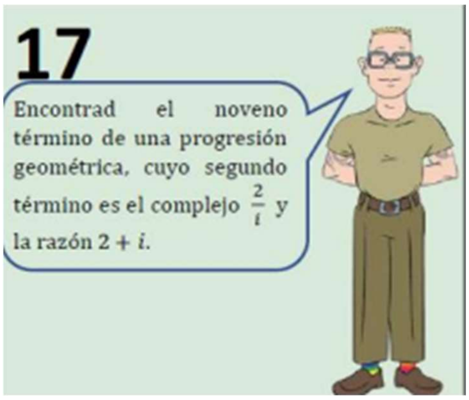
$$2^x=z \implies 8z+\frac{4}{z}=\frac{129}{2}$$

Quitando los denominadores:

$$16z^2+8=129z \implies 16z^2-129z+8=0 \implies$$

$$z=8 \implies 2^x=8 \implies \mathbf{x=3}$$

$$z=\frac{1}{16} \implies 2^x=2^{-4} \implies \mathbf{x=-4}$$



Solución

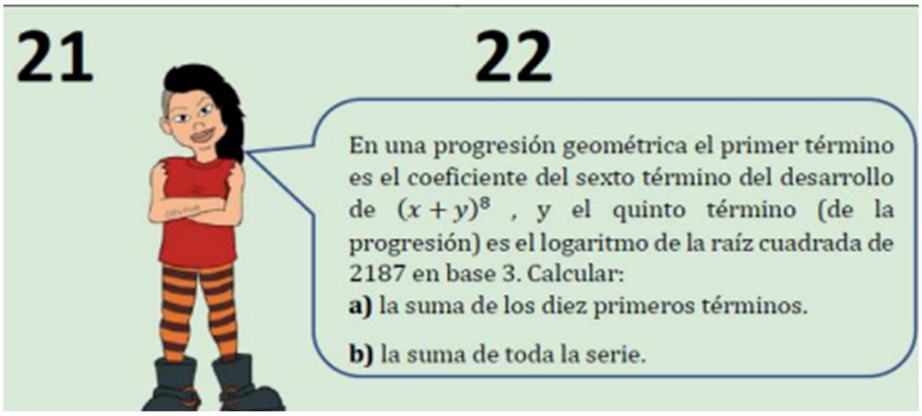
$$a_9 = a_2 \cdot r^7 = \frac{2}{i}(2+i)^7$$

$$(2+i)^7 = \binom{7}{0}2^7 + \binom{7}{1}2^6 \cdot i + \binom{7}{2}2^5 \cdot i^2 + \binom{7}{3}2^4 \cdot i^3 + \binom{7}{4}2^3 \cdot i^4 + \binom{7}{5}2^2 \cdot i^5 + \binom{7}{6}2 i^6 + \binom{7}{7}i^7$$

$$= 128 + 448i + 612i^2 + 560i^3 + 280i^4 + 84i^5 + 14i^6 + i^7 =$$

$$= 128 + 448i - 672 - 560i + 280 + 84i - 14 - i = -278 - 29i$$

$$a_9 = \frac{2}{i}(2+i)^7 = \frac{2}{i}(-278-29i) = \frac{2}{i}(-278-29i)\frac{i}{i} = -2\left(-278i - 29i^2\right) = -58 + 556i$$



Solución

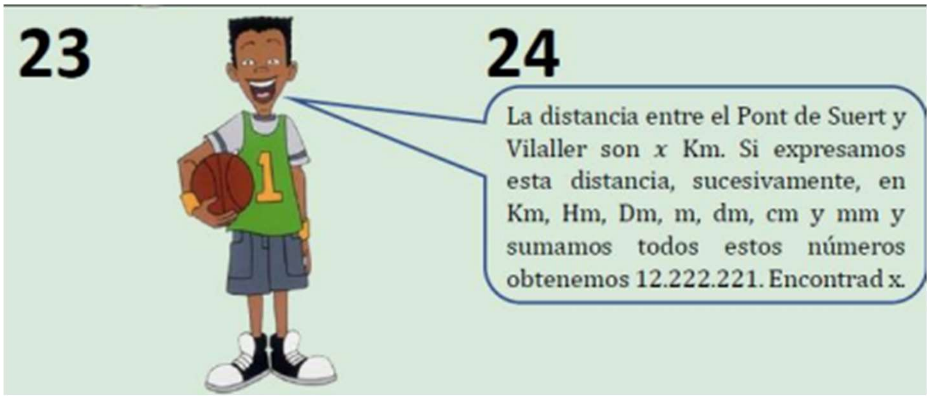
$$T_6 = \binom{8}{5}x^3y^5 \text{ ===> } a_1 = \binom{8}{5} = 56 \qquad a_5 = \log_3\sqrt{2187} = \log_3(3)^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \text{ ==> } r^4 = \frac{\frac{7}{2}}{56} = \frac{1}{16} \text{ ===> } r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_n\, r - a_1}{r-1} \quad \textbf{==>} \quad S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{7}{64} \cdot \frac{1}{2} - 56}{-\frac{1}{2}} = \frac{7161}{64}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 56\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{7}{64}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{56}{1-\frac{1}{2}} = 112$$



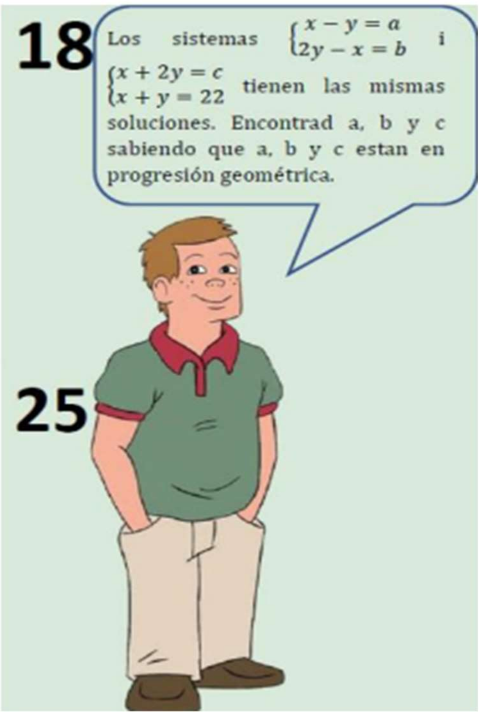
Solución

$x + 10x + 100x + 1000x + 10^4x + 10^5x + 10^6x$

Es una suma de siete términos de una progresión geométrica de razón 10:

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{10^6 x \cdot 10 - x}{10-1} = \frac{(10^7 - 1)x}{9}$$

$$\frac{(10^7 - 1)x}{9} = 12.222.221$$ **===> x= 11 km**



Solución

$a = \frac{b}{r}$, b , $c = b \cdot r$

Reescribimos los sistemas

$$\begin{cases} x - y = \frac{b}{r} & (1) \\ 2y - x = b & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = br & (3) \\ x + y = 22 & (4) \end{cases}$$

Del primer sistema obtenemos la razón

$$\begin{cases} r(x-y) = b \\ 2y - x = b \end{cases} \text{ ==> } r(x-y) = 2y - x \text{ ==> } \quad r = \frac{2y - x}{x - y}$$

Sustituimos el valor de b de (2) en (3)

$$x + 2y = (2y - x)\frac{2y - x}{x - y} \quad \text{===>}$$

$$(x+2y)(x-y) = (2y-x)^2 \text{ ===> } x^2 - xy + 2yx - 2y^2 = 4y^2 - 4xy + x^2 \text{ ===>}$$

$$5xy - 6y^2 = 0 \quad (5)$$

Ahora sustituimos x de (4) en (5): $5(22-y)y - 6y^2 = 0$ ===> $110y - 11y^2 = 0$==>

$11y(10-y)=0$ ==> y=10 y=0

Si **y=0** ==> (*de 4*) **x=22** ===> (de 2) b=2y-x=- 22 ==> **r=-1** ===>(de 1) 22=-b

==>b=-22 ==> (de 3) 22=(-22)(-1) Verifican las cuatro ecuaciones

==> a= 22 ;b=- 22 ; c=22

Si **y =10** ===>(de 4) **x=12** ===> (de 2) b=2y-x= 8 ==> **r=4** ==>(de 1)b=8

==> (de 3) 32=8(4) ==> Verifican las cuatro ecuaciones

===> a=2 ; b= 8 ; c=32

Solución

De las fórmulas de Cardano-Vieta

a+b =c+6
ab=6c+18

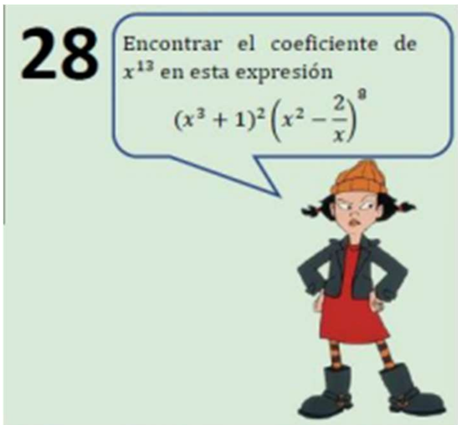
Consideramos

$a^2+b^2= (a+b)^2-2ab$

$= (c+6)^2- 2(6c+18)$

$= c^2+12c+36-12c-36= c^2$

Por tanto se trata de una terna Pitagórica $==> C = 90°$



Solución

$$(x^3+1)^2\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8=\frac{1}{x^8}(x^3+1)^2(x^3-2)^8$$

Cambio de variable $x^3=y$ ==>

$(y+1)^2(y-2)^8$ Es equivalente a encontrar el coeficiente de y^7

$(y^2+2y+1)(y-2)^8$ lo cual implica:

$y^2 \cdot y^5$ ==> coeficiente de y^5 en $(y-2)^8$: $\binom{8}{3}y^5(-2)^3=-448y^5$ ===> $-448y^7$

$2y \cdot y^6$ ===> coeficiente de y^6 en $(y-2)^8$: $\binom{8}{2}y^6(-2)^2=112y^6$ ===> $224y^7$

$1 \cdot y^7$===> coeficiente de $(y-2)^8$: $\binom{8}{1}y^7(-2)^1=-16y^7$

===> $(-448+224-16)y^7= -240\, y^7$ ===> $-240x^{21}$ ===> $\frac{1}{x^8}(-240x^{21})= -240\, x^{13}$

Por tanto la solución es -240