

MARÇ 2023

1 Siguen a i b naturals. Si $a + b$ i $a^3 + b^3$ acaben en 3, en quina xifra acaba $a^2 + b^2$?



Perquè $a + b$ acabe en 3, la suma de les xifres de les unitats de tots dos números ha de ser 3 o 13 (no pot ser major, ja que la suma de dues xifres mai és major que 18). Les opcions possibles suposant que $a < b$ són:

Unitats a	Unitats b	Unitats $(a+b)$	Unitats a^3	Unitats b^3	Unitats $(a^3 + b^3)$
0	3	3	0	7	7
1	2	3	1	8	9
4	9	3	4	9	3
5	8	3	5	2	7
6	7	3	6	3	9

L'únic cas en què tant $a + b$ com $a^3 + b^3$ acaben en 3 és el que té un dels números acabat en 4 i l'altre en 9.

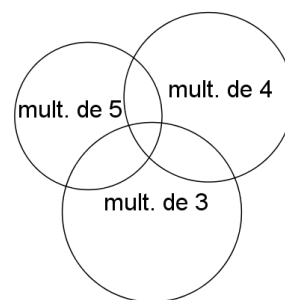
La xifra de les unitats de $a^2 + b^2$ serà $6 + 1 = 7$.

2



3

Rafael té tres fills que li telefonen regularment: un cada tres dies, un altre cada quatre dies i l'últim cada cinc dies. L'últim dia del 2022 el van telefonar els tres fills. Quants dies de 2023 no rebrà cap trucada telefònica d'ells?



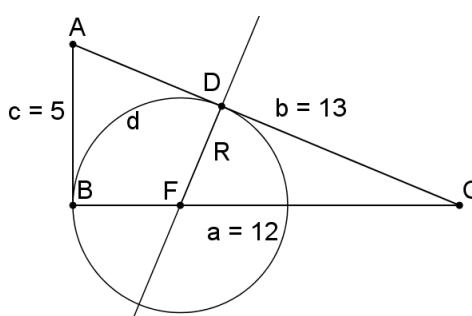
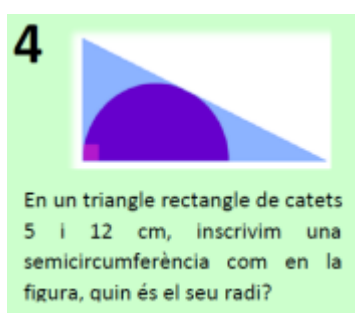
Comencem per saber quants dies ho crida cadascun. Hi haurà dies en què ho crida més d'un, fins i tot algun ho diran els tres. Per a calcular el nombre de dies en què rebrà alguna trucada hem de descomptar les duplicitats, és a dir, sumem les quantitats de múltiples de 3, 4 i 5 en un any, descomptem els de 12 (3 i 4 alhora), 15 i 5 alhora) i 20 (4 i 5 alhora) i afegim els de 60 (3, 4 i 5 alhora).

Per a saber quants múltiples d'un número n hi ha en els 365 dies d'un any, necessitem la part sencera de $365/n$.

Múltiples de		total
3	$365:3=121,...$	121
4	$365:4=91,...$	91
5	$365:5=73$	73
12	$365:12=30,...$	30
15	$365:15=24,...$	24
20	$365:20=13,...$	13
60	$365:60=6,...$	6

$$\text{Total de dies en què rep trucades} = 121 + 91 + 73 - 30 - 24 - 13 + 6 = 224$$

$$\text{Total de dies en què no rep trucades} = 365 - 224 = 141$$



El que la semicircumferència siga tangent a la hipotenusa ens indica que el radi traçat fins al punt de tangència és perpendicular a la hipotenusa. Amb aquest punt D tenim definit un triangle rectangle de vèrtexs C, D i F. Aquest triangle és semblant al de vèrtexs A, B i C, ja que tots dos tenen en comú l'angle en C i són rectangles.

En el triangle xicotet la hipotenusa mesura $12 - R$, i el catet xicotet R .

En el gran la hipotenusa 13 (amb el teorema de Pitàgores: $\sqrt{12^2 - 5^2} = 13$) i el catet xicotet 5.

Per semblança:

$$\frac{\text{hipotenusa del gran}}{\text{catet del gran}} = \frac{\text{hipotenusa del xicotet}}{\text{catet del xicotet}} \rightarrow$$

$$\frac{13}{5} = \frac{12-R}{R} \rightarrow 18R = 60 \rightarrow R = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ cm}$$



La paral·lela mitjana del trapezi mesura $\frac{B+b}{2}$, on B és la base major i b la menor.

$$A_{\text{triangle}} = \frac{18 \cdot a}{2} = A_{\text{trapezi}} = \frac{B+b}{2} \cdot a \rightarrow \frac{B+b}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$$

7 Si a, b i c són reals no nuls tals que $a + b + c = 0$, trobeu els valors possibles de:

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$$


Per a qualsevol real r diferent de zero, només hi ha dues opcions per a la fracció

$$\frac{r}{|r|} = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Com $a + b + c = 0$, almenys un ha de ser negatiu.

Si de a, b i c dues d'ells són negatius, tindríem que abc seria positiu.

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$$

Si només un d'ells és negatiu, abc seria negatiu.

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

La suma sempre donarà 0.

8 Quants triangles escalens hi ha, de perímetre menor que 13, que tinguin la mesura dels seus costats nombres enters?



Si a, b i c són les longituds dels tres costats del triangle han de complir-se les següents condicions:

Per ser escalé $a \neq b \neq c \neq a$.

Per tindre perímetre menor que 13, $a + b + c < 13$.

Per ser un triangle $\begin{cases} a + b > c \\ a + c > b \\ b + c > a \end{cases}$

Vegem en una taula les opcions possibles

a	b	$a + b$	c	$a + c$	$b + c$	compleix
1	2	3				No és possible, c ha de ser menor que 3 i diferent d'1 i 2
1	3	4	2	3		No compleix $a + c > b$
1	4	5	2 o 3	3 o 4		No compleix $a + c > b$
1	5	6	2, 3 o 4	3, 4 o 5		No compleix $a + c > b$
1	6	7				No val perquè el perímetre és $14 > 13$
2	3	5	4	6	7	VÁLIDO
2	4	6	5	7	9	VÁLIDO
2	5	7	6	8	11	No val perquè el perímetre és $2+5+6=13$
3	4	7	5	8	9	VÁLIDO
3	4	7	6			No val perquè el perímetre és $3+4+6=13$

Hi ha tres triangles que compleixen les condicions demanades.



En un trapezi calculem l'àrea amb la fórmula $A = \frac{B+b}{2} \cdot a$ on B i b són les bases major i menor i a l'altura.

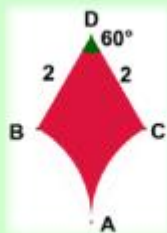
Amb les dades que tenim $1400 = \frac{B+b}{2} \cdot 50 \rightarrow B + b = 56 = 7 \cdot 8$

Les opcions possibles amb la condició que totes dues bases siguen múltiples de 8 són:

Opció	b	B
1	$8 \cdot 1 = 8$	$8 \cdot 6 = 48$
2	$8 \cdot 2 = 16$	$8 \cdot 5 = 40$
3	$8 \cdot 3 = 24$	$8 \cdot 4 = 32$

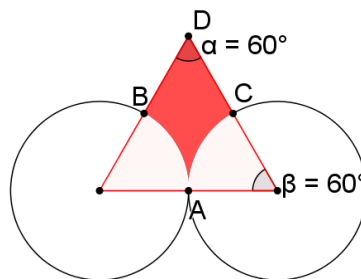
Hi ha tres trapezis que ho compleixen.

10



11

En la figura adjunta $DB = DC = 2 \text{ cm}$, $\angle BDC = 60^\circ$, la longitud dels arcs BA i CA són la sisena part de la longitud d'una circumferència de radi 2 cm. Trobar l'àrea de la zona acolorida.



Si observem el dibuix complet, és evident que l'àrea de la zona acolorida es pot calcular restant a l'àrea d'un triangle equilàter de costat 4 cm l'àrea dels dos sectors circulars, és a dir, la tercera part de l'àrea d'un cercle de radi 2 cm.

Per a l'àrea del triangle necessitem l'altura. Si la tracem obtenim un triangle rectangle de base 2 cm i hipotenusa 4 cm. Usem el teorema de Pitàgores per a saber la longitud:

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A_{roja} = A_{triangle} - \frac{1}{6} A_{cercle} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \pi \cdot 2^2 = 4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \cong 2,7394 \text{ cm}^2$$

13

En cada caixa de la figura està escrit un número de manera que cadascun dels tres centrals és la mitjana aritmètica dels dos que té al seu costat. Trobar els números escrits en cada caixa.

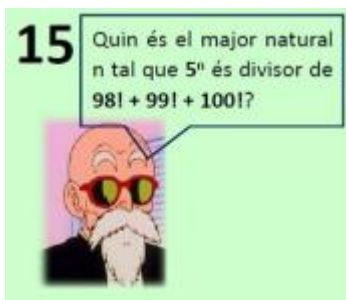
14 π day-1



x	26	y	z	8
---	----	---	---	---

$$\begin{cases} 26 = \frac{x+y}{2} \\ y = \frac{26+z}{2} \\ z = \frac{y+8}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=52 \\ 2y-z=26 \\ 2z-y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y-z=26 \\ -2y+4z=16 \end{cases} \cdot 2 \rightarrow \begin{cases} 2y-z=26 \\ 3z=42 \end{cases} \rightarrow z = \frac{42}{3} = 14 \rightarrow \begin{cases} y=20 \\ x=32 \end{cases}$$

32	26	20	14	8
----	----	----	----	---



$$98! + 99! + 100! = 98! \cdot (1 + 99 + 100 \cdot 99) = 98! \cdot 10\,000 = 98! \cdot 2^4 \cdot 5^4$$

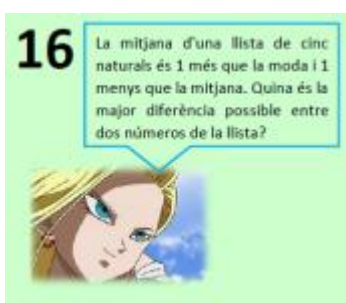
Falta veure quants cincs hi ha en la factorització de $98!$:

Menors que 98 hi ha 19 números que són múltiples de 5 (des de $5=5 \cdot 1$ fins a $95=5 \cdot 19$), però entre aquests números hi ha tres que són múltiples de 25 (25, 50 i 75), que en la seua factorització tenen dues cincs.

Per tant, en la factorització de $98!$ apareix el cinc $19+3=22$ vegades.

Si els unim als quatre cincs de $98! \cdot 2^4 \cdot 5^4$, el total seria $22 + 4 = 26$.

El valor de n que busquem serà 26. Si fora major, $98! + 99! + 100!$ no seria divisible per 5^n .



Cridem als cinc naturals, ordenats de menor a major, a, b, c, d, e .

La mitjana serà $m_e = c$.

Sabem que $m_e = m_o + 1 = \bar{x} - 1$.

De $m_e = m_o + 1$, deduïm que la moda serà $m_o = a = b$.

De $m_o + 1 = \bar{x} - 1 \rightarrow \bar{x} = m_o + 2 = a + 2$

$$\bar{x} = \frac{a + b + c + d + e}{5} = \frac{a + a + (a + 1) + d + e}{5} = a + 2 \rightarrow$$

$$3a + 1 + d + e = 5a + 10 \rightarrow d + e = 2a + 9$$

Per a obtindre $2a + 9$ tenim diverses opcions tenint en compte que d ha de ser major que $a + 1$, ja que no és bimodal:

$$d + e = (a + 4) + (a + 5)$$

$$d + e = (a + 3) + (a + 6)$$

$$d + e = (a + 2) + (a + 7)$$

L'última opció és la que ens dona la major diferència entre e i a (el major i el menor de la llista):

$$e - a = a + 7 - a = 7$$



Diem n_1 i n_2 als dos més xicotets i n_{F-1} i n_F als dos més grans.

Es compleix $n_1 \cdot n_2 = 16 = 2^4$.

$$n_{F-1} \cdot n_F = 225 = 3^2 \cdot 5^2.$$

Per a n_1 i n_2 tindriem les opcions:

1 i 16	2 i 8
--------	-------

Per a n_{F-1} i n_F

1 i 225	3 i 75	5 i 45	9 i 25
---------	--------	--------	--------

Però sabem que $n_1 < n_2 < n_{F-1} < n_F$, lo que ens permet eliminar diverses opcions:

1 i 225	3 i 75	5 i 45	9 i 25
--------------------	-------------------	--------	--------

Perquè l'1 i el 3 (n_{F-1}) serien menors que n_2 (pot ser 8 o 16).

1 i 16	2 i 8
-------------------	-------

Perquè 16 seria major que n_{F-1} en las dos opciones que nos quedan (podría ser 5 o 9).

1 i 225	3 i 75	5 i 45	9 i 25
--------------------	-------------------	-------------------	--------

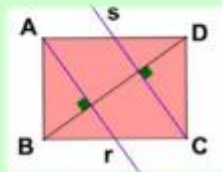
Perquè $n_2=8$ seria major que $n_{F-1} = 5$

D'on tenim que $n_1 = 2 < n_2 = 8 < n_{F-1} = 9 < n_F = 25$ és l'única opció possible.

18

En el rectangle de la figura, les rectes r i s que passen pels vèrtexs A i C són perpendiculars a la diagonal BD i divideixen a BD en tres segments de longitud 1 cadascun. Trobeu l'àrea del rectangle $ABCD$

25



Aplicant el Teorema de Pitàgores al triangle BCD

$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 3^2 = 9$$

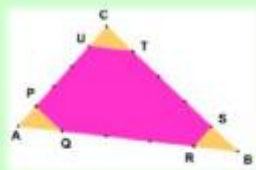
Els triangles BCD i CDP són semblants per ser rectangles i tindre un angle comú. Llavors tenim

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \rightarrow \overline{BD} \cdot \overline{DP} = \overline{CD}^2 \rightarrow 3 \cdot 1 = \overline{CD}^2 \rightarrow \overline{CD} = \sqrt{3}$$

$$\overline{BC}^2 + 3 = 9 \rightarrow \overline{BC}^2 = 6 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{6}$$

$$\text{L'àrea és } A = \overline{BC} \cdot \overline{CD} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \cong 4.243 u^2$$

20



27

Es té un triangle $\triangle ABC$. Cada costat s'ha dividit en cinc parts iguals (utilitzant el procediment de Tales). Trobeu la proporció entre l'àrea de $\triangle ABC$ i la de l'hexàgon $PQRSTU$

La raó de proporcionalitat entre els triangles grocs i el magenta és $1/5$ així que la raó entre les seues àrees és de $1/25$. L'àrea de l'hexàgon és la del triangle magenta menys la dels tres triangles $A_{\text{Hexàgon}} = 22/25 A_{\text{Triangle}}$. Per tant la raó entre les àrees de l'hexàgon i el triangle és $22/25$.

21 Generem un número de sis xifres N , repetint dues vegades un número de tres xifres. És N múltiple de 143?



El número tindrà l'estructura ABCABC. Per a saber si és múltiple de 143, tenint en compte que si factoritzem $143=11 \cdot 13$, és suficient comprovar que el número és múltiple tant d'11 com de 13.

$$\underline{ABCABC} = \underline{ABC} \cdot 1000 + \underline{ABC} = \underline{ABC} \cdot 1001 = \underline{ABC} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = \underline{ABC} \cdot 7 \cdot 143$$

Pel que si és múltiple de 143.

22 Per a quants naturals n , menors que 100, es verifica que n^n és un quadrat perfecte?



Sempre que n siga un nombre parell, n^n serà un quadrat perfecte:

$$n = 2p \rightarrow n^n = n^{2p} = (n^p)^2$$

Amb això, com hi ha 49 números menors que 100 que siguen pares, ja tenim 49 números que compleixen la condició demanada.

Entre els valors imparells de n , també es complirà si n és un quadrat perfecte:

$$n = q^2 \rightarrow n^n = (q^2)^n = (q^n)^2$$

En aquest grup tenim els números següents: 1, 9, 25, 49 i 81.

En total tindrem $49+5=54$ números menors que 100 que compleixen que n^n és un quadrat perfecte.

23



24

Considerem 2023 punts alguns de color blau i els altres verds. Assignem a cada punt una fracció el numerador de la qual és el nombre de punts de l'altre color i el denominador és el nombre de punts del seu color (inclòs ell). Quina és la suma de les 2023 fraccions?

Diem x al nombre de punts blaus.

$2023 - x$ serà la quantitat de punts verds.

La fracció assignada als punts blaus serà $\frac{2023-x}{x}$

La fracció assignada als punts verds $\frac{2023-x}{x}$

La suma demanada

$S = \text{quantitat punts blaus} \cdot \text{fracció punt blau} + \text{quantitat punts verds} \cdot \text{fracció punt verd} =$

$$S = x \cdot \frac{2023 - x}{x} + (2023 - x) \cdot \frac{x}{2023 - x} = 2023 - x + x = 2023$$

28



29

Dani, algunes vesprades, ajuda a repartir mercaderies al seu pare. Una vesprada tenen previst recórrer 210 km. Al final resulta que han aconseguit una velocitat mitjana 5 km/h més de la que havien previst i han arribat una hora abans de l'esperat. Quina velocitat mitjana han aconseguit?

Siguen v la velocitat mitjana prevista i t el temps estimat tenim que:

$$v \cdot t = 210 \rightarrow v = \frac{210}{t}$$

En realitat la situació va ser $(v + 5) \cdot (t - 1) = 210 \rightarrow v \cdot t - v + 5t - 5 = 210$

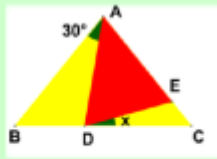
$$\rightarrow -v + 5t - 5 = 0 \rightarrow -\frac{210}{t} + 5t - 5 = 0 \rightarrow -210 + 5t^2 - 5t = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-210)}}{2 \cdot 5} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4200}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{4225}}{10} = \frac{5 \pm 65}{10} = \begin{cases} \frac{5 + 65}{10} = 7 \\ \frac{5 - 65}{10} = -6 \end{cases}$$

$$v = \frac{210}{7} = 30$$

La velocitat mitjana aconseguida és de 35 km/h i el temps emprat 6 h.

30



En la figura: $AB = AC$;
 $\angle BAD = 30^\circ$; $AE = AD$.
 Trobeu x

Triangle ABC (groc)

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} = 30^\circ + \alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} - 30^\circ \rightarrow \alpha = 150^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 150^\circ - 2\hat{C}$$

Triangle ADE (roig)

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \rightarrow \alpha = 180^\circ - 2\beta$$

$$150^\circ - 2\hat{C} = 180^\circ - 2\beta \rightarrow 2\beta - 2\hat{C} = 30^\circ \rightarrow \beta - \hat{C} = 15^\circ$$

Triangle DCE

$$x + \delta + \hat{C} = 180^\circ \text{ i } \beta + \delta = 180^\circ \rightarrow x + \delta + \hat{C} = \beta + \delta \rightarrow x = \beta - \hat{C} = 15^\circ$$

31

Quina és la probabilitat d'obtenir un número que siga imparell i amb tots els seus dígitos diferents, si triem a l'atzar un número entre 1000 i 9999?



El número tindrà quatre xifres:

D	C	B	A
---	---	---	---

A deure ser una xifra imparella (1, 3, 5, 7, 9)

D no pot ser 0, perquè tindríem un número menor que 1000. Tampoc pot coincidir amb una de les altres xifres.

Per a C i D l'única condició serà que siguin diferents de les altres.

Calculem quants números podem formar sense tindre en compte la condició que D no pot ser 0. Després, de tots els obtinguts, eliminarem els que comencen per 0.

Per a A tenim 5 opcions.

Per a B serveix qualsevol xifra menys la usada en A: 9 opcions.

Per a C, si eliminem les usades en A i B, queden 8 opcions.

De la mateixa forma, per a D tindríem 7 opcions.

En total, tindríem $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$ opcions.

Però ací hem inclòs números que comencen per zero. Per a descomptar-los, tenim en compte que en la posició D hi ha 10 xifres possibles, per la qual cosa la desena part començarà per 0, és a dir, dels 2520 obtinguts 252 comencen per zero. Els descomptem i tenim que amb les condicions del problema (totes les xifres diferents, número de quatre xifres, imparell) hi ha un total de $2520 - 252 = 2268$ números.

Tenint en compte que entre 1000 i 9999 hi ha 9000 números, la probabilitat demanada serà:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{2268}{9000} = \frac{63}{250} = 0,252$$