

# MARZO 2023

**1**

Sean  $a$  y  $b$  naturales. Si  $a + b$  y  $a^3 + b^3$  terminan en 3, ¿en qué cifra termina  $a^2 + b^2$ ?



Para que  $a+b$  termine en 3, la suma de las cifras de las unidades de ambos números debe ser 3 o 13 (no puede ser mayor, ya que la suma de dos cifras nunca es mayor que 18). Las opciones posibles suponiendo que  $a < b$  son:

Unidades $a$	Unidades $b$	Unidades( $a+b$ )	Unidades $a^3$	Unidades $b^3$	Unidades( $a^3 + b^3$ )
0	3	3	0	7	7
1	2	3	1	8	9
4	9	3	4	9	3
5	8	3	5	2	7
6	7	3	6	3	9

El único caso en que tanto  $a + b$  como  $a^3 + b^3$  acaban en 3 es el que tiene uno de los números acabado en 4 y el otro en 9.

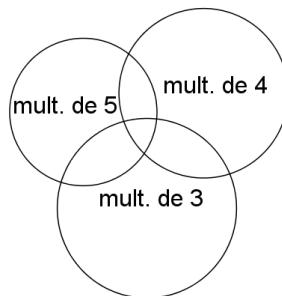
La cifra de las unidades de  $a^2 + b^2$  será  $6+1=7$ .

**2**



**3**

Rafael tiene tres hijos que lo llaman por teléfono regularmente: uno cada tres días, otro cada cuatro días y el último cada cinco días. El último día del 2022 lo llamaron los tres hijos. ¿Cuántos días de 2023 no recibirá ninguna llamada telefónica de ellos?



Empezamos por saber cuantos días lo llama cada uno. Habrá días en que lo llame más de uno, incluso alguno lo llamarán los tres. Para calcular el número de días en que recibirá alguna llamada debemos descontar las duplicidades, es decir, sumamos las cantidades de múltiplos de 3, 4 y 5 en un año, descontamos los de 12 (3 y 4 a la vez), 153 y 5 a la vez) y 20 (4 y 5 a la vez) y añadimos los de 60 (3, 4 y 5 a la vez).

Para saber cuantos múltiplos de un número  $n$  hay en los 365 días de un año, necesitamos la parte entera de  $\frac{365}{n}$ .

Múltiplos de		total
3	$365:3=121,\dots$	121
4	$365:4=91,\dots$	91
5	$365:5=73$	73
12	$365:12=30,\dots$	30
15	$365:15=24,\dots$	24
20	$365:20=13,\dots$	13
60	$365:60=6,\dots$	6

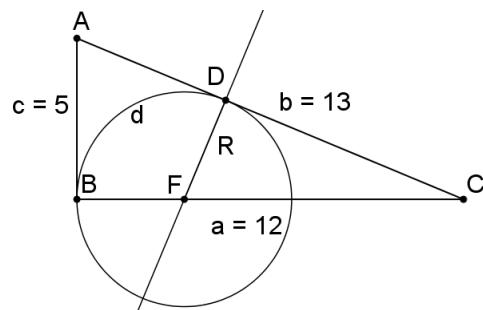
$$\text{Total de días en que recibe llamadas} = 121 + 91 + 73 - 30 - 24 - 13 + 6 = 224$$

$$\text{Total de días en que no recibe llamadas} = 365 - 224 = 141$$

4



En un triángulo rectángulo de catetos 5 y 12 cm, inscribimos una semicircunferencia como en la figura, ¿cuál es su radio?



El que la semicircunferencia sea tangente a la hipotenusa nos indica que el radio trazado hasta el punto de tangencia es perpendicular a la hipotenusa. Con este punto D tenemos definido un triángulo rectángulo de vértices C, D y F. Este triángulo es semejante al de vértices A, B y C, ya que ambos tienen en común el ángulo en C y son rectángulos.

En el triángulo pequeño la hipotenusa mide  $12 - R$ , y el cateto pequeño  $R$ .

En el grande la hipotenusa 13 (con el teorema de Pitágoras:  $\sqrt{12^2 - 5^2} = 13$ )

$$\frac{\text{hipotenusa del grande}}{\text{cateto del grande}} = \frac{\text{hipotenusa del pequeño}}{\text{cateto del pequeño}} \rightarrow$$

$$\frac{13}{5} = \frac{12 - R}{R} \rightarrow 18R = 60 \rightarrow R = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

**6**

Un triángulo y un trapecio tienen la misma área y altura. Si la base del triángulo mide 18 cm, ¿cuánto mide la longitud de la paralela media del trapecio?



La paralela media del trapecio mide  $\frac{B+b}{2}$ , donde B es la base mayor y b la menor.

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{18 \cdot a}{2} = A_{\text{trapecio}} = \frac{B + b}{2} \cdot a \rightarrow \frac{B + b}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

**7**

Si a, b y c son reales no nulos tales que  $a + b + c = 0$ , hallar los valores posibles de:

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$$



Para cualquier real r distinto de cero, sólo hay dos opciones para la fracción  $\frac{r}{|r|} = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$

Como  $a+b+c=0$ , al menos uno debe ser negativo.

Si de a, b y c dos de ellos son negativos, tendríamos que abc sería positivo.

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$$

Si sólo uno de ellos es negativo, abc sería negativo.

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

La suma siempre dará 0.

**8**

¿Cuántos triángulos escalenos hay, de perímetro menor que 13, que tengan la medida de sus lados números enteros?



Si  $a, b$  y  $c$  son las longitudes de los tres lados del triángulo deben cumplirse las siguientes condiciones:

Por ser escaleno  $a \neq b \neq c \neq a$ .

Por tener perímetro menor que 13  $a + b + c < 13$ .

Por ser un triángulo  $\begin{cases} a + b > c \\ a + c > b \\ b + c > a \end{cases}$

Veamos en una tabla las opciones posibles

$a$	$b$	$a + b$	$c$	$a + c$	$b + c$	<i>cumple</i>
1	2	3				No es posible, $c$ debe ser menor que 3 y distinto de 1 y 2
1	3	4	2	3		No cumple $a + c > b$
1	4	5	2 o 3	3 o 4		No cumple $a + c > b$
1	5	6	2, 3 o 4	3, 4 o 5		No cumple $a + c > b$
1	6	7				No vale porque el perímetro es $14 > 13$
2	3	5	4	6	7	VÁLIDO
2	4	6	5	7	9	VÁLIDO
2	5	7	6	8	11	No vale porque el perímetro es $2+5+6=13$
3	4	7	5	8	9	VÁLIDO
3	4	7	6			No vale porque el perímetro es $3+4+6=13$

Hay tres triángulos que cumplen las condiciones pedidas.

9

¿Cuántos trapecios existen que cumplan que su área sea  $1400 \text{ cm}^2$ , su altura 50 cm y sus bases múltiplos de 8?



En un trapecio calculamos el área con la fórmula  $A = \frac{B+b}{2} \cdot a$  donde  $B$  y  $b$  son las bases mayor y menor y  $a$  la altura.

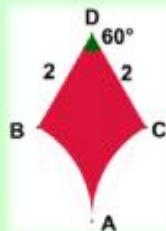
Con los datos que tenemos  $1400 = \frac{B+b}{2} \cdot 50 \rightarrow B + b = 56 = 7 \cdot 8$

Las opciones posibles con la condición de que ambas bases sean múltiplos de 8 son:

Opción	b	B
1	$8 \cdot 1 = 8$	$8 \cdot 6 = 48$
2	$8 \cdot 2 = 16$	$8 \cdot 5 = 40$
3	$8 \cdot 3 = 24$	$8 \cdot 4 = 32$

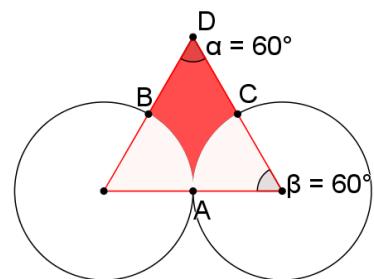
Hay tres trapecios que lo cumplen.

**10**



**11**

En la figura adjunta  $DB = DC = 2$  cm,  $\angle BDC = 60^\circ$ , la longitud de los arcos  $BA$  y  $CA$  son la sexta parte de la longitud de una circunferencia de radio 2 cm. Hallar el área de la zona coloreada.



Si observamos el dibujo completo, es evidente que el área de la zona coloreada se puede calcular restando al área de un triángulo equilátero de lado 4 cm el área de los dos sectores circulares, es decir, la tercera parte del área de un círculo de radio 2 cm.

Para el área del triángulo necesitamos la altura. Si la trazamos obtenemos un triángulo rectángulo de base 2 cm e hipotenusa 4 cm. Basta usar el teorema de Pitágoras para saber la longitud:

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$A_{roja} = A_{triangulo} - \frac{1}{6}A_{circulo} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 = 4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \cong 2,7394 \text{ cm}^2$$

**13**

**14 π day-1**

En cada caja de la figura está escrito un número de forma que cada uno de los tres centrales es la media aritmética de los dos que tiene a su lado. Hallar los números escritos en cada caja.

26		8
----	--	---



x	26	y	z	8
---	----	---	---	---

$$\begin{cases} 26 = \frac{x+y}{2} \\ y = \frac{26+z}{2} \\ z = \frac{y+8}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=52 \\ 2y-z=26 \\ 2z-y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y-z=26 \\ -2y+4z=16 \\ 3z=42 \end{cases} \rightarrow z = \frac{42}{3} = 14 \rightarrow y = 20 \rightarrow x = 32$$

32	26	20	14	8
----	----	----	----	---

**15**

¿Cuál es el mayor natural  $n$  tal que  $5^n$  es divisor de  $98! + 99! + 100!$ ?



$$98! + 99! + 100! = 98! \cdot (1 + 99 + 100 \cdot 99) = 98! \cdot 10\,000 = 98! \cdot 2^4 \cdot 5^4$$

Falta ver cuantos cincos hay en la factorización de  $98!$ :

Menores que  $98$  hay  $19$  números que son múltiplos de  $5$  (desde  $5=5 \cdot 1$  hasta  $95=5 \cdot 19$ ), pero entre estos números hay tres que son múltiplos de  $25$  ( $25, 50$  y  $75$ ), que en su factorización tienen dos cincos.

Por lo tanto, en la factorización de  $98!$  aparece el cinco  $19+3=22$  veces.

Si los unimos a los cuatro cincos de  $98! \cdot 2^4 \cdot 5^4$ , el total sería  $22+4=26$ .

El valor de  $n$  que buscamos será  $26$ . Si fuera mayor,  $98! + 99! + 100!$  no sería divisible por  $5^n$ .

**16**

La mediana de una lista de cinco naturales es 1 más que la moda y 1 menos que la media. ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre dos números de la lista?



Llamamos a los cinco naturales, ordenados de menor a mayor,  $a, b, c, d, e$ .

La mediana será  $m_e = c$

Sabemos que  $m_e = m_o + 1 = \bar{x} - 1$

De  $m_e = m_o + 1$ , deducimos que la moda será  $m_o = a = b$ .

De  $m_o + 1 = \bar{x} - 1 \rightarrow \bar{x} = m_o + 2 = a + 2$

$$\bar{x} = \frac{a + b + c + d + e}{5} = \frac{a + a + (a + 1) + d + e}{5} = a + 2 \rightarrow$$

$$3a + 1 + d + e = 5a + 10 \rightarrow d + e = 2a + 9$$

Para obtener  $2a + 9$  tenemos varias opciones teniendo en cuenta que  $d$  debe ser mayor que  $a + 1$ , ya que no es bimodal.

$$d + e = (a + 4) + (a + 5)$$

$$d + e = (a + 3) + (a + 6)$$

$$d + e = (a + 2) + (a + 7)$$

La última opción es la que nos da la mayor diferencia entre  $e$  y  $a$  (el mayor y el menor de la lista):  
 $e - a = a + 7 - a = 7$

**17**

Tenemos varios naturales. El producto de los dos más pequeños es 16 y el de los dos más grandes 225. ¿Puedes hallarlos?



Llamamos  $n_1$  y  $n_2$  a los dos más pequeños y  $n_{F-1}$  y  $n_F$  a los dos más grandes.

Se cumple  $n_1 \cdot n_2 = 16 = 2^4$

$$n_{F-1} \cdot n_F = 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

Para  $n_1$  y  $n_2$  tendríamos las opciones:

1 y 16 2 y 8

Para  $n_{F-1}$  y  $n_F$

1 y 225 3 y 75 5 y 45 9 y 25

Pero sabemos que  $n_1 < n_2 < n_{F-1} < n_F$ , lo que nos permite eliminar varias opciones:

1 y 225 3 y 75 5 y 45 9 y 25

Porque el 1 y el 3 ( $n_{F-1}$ ) serían menores que  $n_2$  (puede ser 8 o 16).

1 y 16 2 y 8

Porque 16 sería mayor que  $n_{F-1}$  en las dos opciones que nos quedan (podría ser 5 o 9).

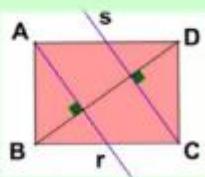
1 y 225 3 y 75 5 y 45 9 y 25

Porque  $n_2=8$  sería mayor que  $n_{F-1}=5$

De donde tenemos que  $n_1 = 2 < n_2 = 8 < n_{F-1} = 9 < n_F = 25$  es la única opción posible.

**18**

En el rectángulo de la figura, las rectas  $r$  y  $s$  que pasan por los vértices  $A$  y  $C$  son perpendiculares a la diagonal  $BD$  y dividen a  $BD$  en tres segmentos de longitud 1 cada uno. Hallar el área del rectángulo  $ABCD$ .

**25**

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo  $BCD$

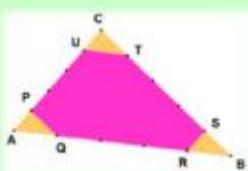
$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 3^2 = 9$$

Los triángulos  $BCD$  y  $CDP$  son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo común. Entonces tenemos

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \rightarrow \overline{BD} \cdot \overline{DP} = \overline{CD}^2 \rightarrow 3 \cdot 1 = \overline{CD}^2 \rightarrow \overline{CD} = \sqrt{3}$$

$$\overline{BC}^2 + 3 = 9 \rightarrow \overline{BC}^2 = 6 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{6}$$

El área es  $A = \overline{BC} \cdot \overline{CD} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \cong 4.243 \text{ } u^2$

**20****27**

Se tiene un triángulo  $\triangle ABC$ . Cada lado se ha dividido en cinco partes iguales (utilizando el procedimiento de Tales). Hallar la proporción entre el área de  $\triangle ABC$  y la del hexágono  $PQRSTU$ .

La razón de proporcionalidad entre los triángulos amarillos y el magenta es  $1/5$  así que la razón entre sus áreas es de  $1/25$ . El área del hexágono es la del triángulo magenta menos la de los tres triángulos  $A_{\text{Hexágono}}=22/25 A_{\text{Triángulo}}$ . Por lo tanto la razón entre las áreas del hexágono y el triángulo es  $22/25$ .

**21**

Generamos un número de seis cifras N, repitiendo dos veces un número de tres cifras. ¿Es N múltiplo de 143?



El número tendrá la estructura ABCABC. Para saber si es múltiplo de 143, teniendo en cuenta que si factorizamos  $143=11\cdot13$ , basta comprobar que el número es múltiplo tanto de 11 como de 13.

$$\underline{\text{ABCABC}} = \underline{\text{ABC}} \cdot 1000 + \underline{\text{ABC}} = \underline{\text{ABC}} \cdot 1001 = \underline{\text{ABC}} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = \underline{\text{ABC}} \cdot 7 \cdot 143$$

Por lo que si es múltiplo de 143.

**22**

¿Para cuántos naturales n, menores que 100, se verifica que  $n^n$  es un cuadrado perfecto?



Siempre que n sea un número par,  $n^n$  será un cuadrado perfecto:

$$n = 2p \rightarrow n^n = n^{2p} = (n^p)^2$$

Con esto, como hay 49 números menores que 100 que sean pares, ya tenemos 49 números que cumplen la condición pedida.

Entre los valores impares de n, también se cumplirá si n es un cuadrado perfecto:

$$n = q^2 \rightarrow n^n = (q^2)^n = (q^n)^2$$

En este grupo tenemos los números siguientes: 1, 9, 25, 49 y 81.

En total tendremos  $49+5=54$  números menores que 100 que cumplen que  $n^n$  es un cuadrado perfecto.

**23****24**

Consideremos 2023 puntos algunos de color azul y los demás verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2023 fracciones?

Llamamos x al número de puntos azules.

$2023 - x$  será la cantidad de puntos verdes.

La fracción asignada a los puntos azules será  $\frac{2023-x}{x}$

La fracción asignada a los puntos verdes  $\frac{x}{2023-x}$

La suma pedida

$S = \text{cantidad puntos azules} \cdot \text{fracción punto azul} + \text{cantidad puntos verdes} \cdot \text{fracción punto verde} =$

$$S = x \cdot \frac{2023 - x}{x} + (2023 - x) \cdot \frac{x}{2023 - x} = 2023 - x + x = 2023$$

**28**



**29**

Dani, algunas tardes, ayuda a repartir mercancías junto a su padre. Una tarde tienen previsto recorrer 210 km. Al final resulta que han alcanzado una velocidad media 5 km/h más de la que habían previsto y han llegado una hora antes de lo esperado. ¿Qué velocidad media han alcanzado?

Sean  $v$  la velocidad media prevista y  $t$  el tiempo estimado tenemos que:

$$v \cdot t = 210 \rightarrow v = \frac{210}{t}$$

En realidad la situación fue  $(v + 5) \cdot (t - 1) = 210 \rightarrow v \cdot t - v + 5t - 5 = 210$

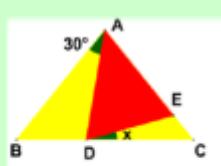
$$\rightarrow -v + 5t - 5 = 0 \rightarrow -\frac{210}{t} + 5t - 5 = 0 \rightarrow -210 + 5t^2 - 5t = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-210)}}{2 \cdot 5} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4200}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{4225}}{10} = \frac{5 \pm 65}{10} = \begin{cases} \frac{5 + 65}{10} = 7 \\ \frac{5 - 65}{10} = -6 \end{cases}$$

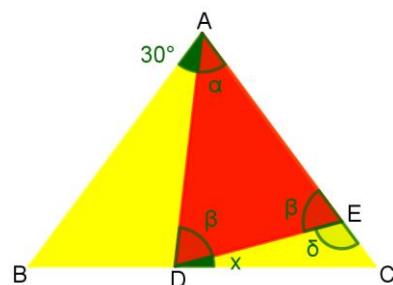
$$v = \frac{210}{7} = 30$$

La velocidad media alcanzada es de 35 km/h y el tiempo empleado 6 h.

**30**



En la figura:  $AB = AC$ ;  $\angle BAD = 30^\circ$ ;  $AE = AD$ . Hallar  $x$



Triángulo ABC (amarillo)

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} = 30^\circ + \alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} - 30^\circ \rightarrow \alpha = 150^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 150^\circ - 2\hat{C}$$

Triángulo ADE (rojo)

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \rightarrow \alpha = 180^\circ - 2\beta$$

$$150^\circ - 2\hat{C} = 180^\circ - 2\beta \rightarrow 2\beta - 2\hat{C} = 30^\circ \rightarrow \beta - \hat{C} = 15^\circ$$

Triángulo DCE

$$x + \delta + \hat{C} = 180^\circ \text{ y } \beta + \delta = 180^\circ \rightarrow x + \delta + \hat{C} = \beta + \delta \rightarrow x = \beta - \hat{C} = 15^\circ$$

**31**

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que sea impar y con todos sus dígitos diferentes, si elegimos al azar un número entre 1000 y 9999?



El número tendrá cuatro cifras:

D	C	B	A
---	---	---	---

A debe ser una cifra impar (1, 3, 5, 7, 9)

D no puede ser 0, porque tendríamos un número menor que 1000. Tampoco puede coincidir con una de las otras cifras.

Para C y D la única condición será que sean distintas de las demás.

Calculamos cuántos números podemos formar sin tener en cuenta la condición de que D no puede ser 0. Después, de todos los obtenidos, eliminaremos los que empiecen por 0.

Para A tenemos 5 opciones.

Para B sirve cualquier cifra menos la usada en A: 9 opciones.

Para C, si eliminamos las usadas en A y B, quedan 8 opciones.

De la misma forma, para D tendríamos 7 opciones.

En total, tendríamos  $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$  opciones.

Pero aquí hemos incluido números que empiezan por cero. Para descontarlos, tenemos en cuenta que en la posición D hay 10 cifras posibles, por lo que la décima parte empezará por 0, es decir, de los 2520 obtenidos 252 empiezan por cero. Los descontamos y tenemos que con las condiciones del problema (todas las cifras distintas, número de cuatro cifras, impar) hay un total de  $2520 - 252 = 2268$  números.

Teniendo en cuenta que entre 1000 y 9999 hay 9000 números, la probabilidad pedida será:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2268}{9000} = \frac{63}{250} = 0,252$$