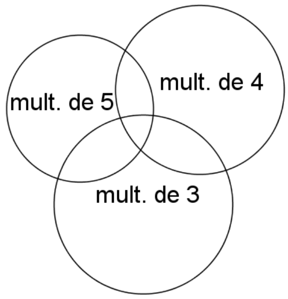
MARZO 2023

Para que a+b termine en 3, la suma de las cifras de las unidades de ambos números debe ser 3 o 13 (no puede ser mayor, ya que la suma de dos cifras nunca es mayor que 18). Las opciones posibles suponiendo que $a < b$ son:

Unidades *a*	Unidades *b*	Unidades*(a+b)*	Unidades a^3	Unidades b^3	Unidades(a^3+b^3)
0	3	3	0	7	7
1	2	3	1	8	9
4	9	3	4	9	3
5	8	3	5	2	7
6	7	3	6	3	9

El único caso en que tanto $a + b$ como $a^3 + b^3$ acaban en 3 es el que tiene uno de los números acabado en 4 y el otro en 9.

La cifra de las unidades de $a^2 + b^2$ será 6+1=7.



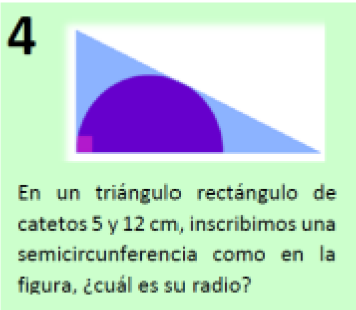
Empezamos por saber cuantos días lo llama cada uno. Habrá días en que lo llame más de uno, incluso alguno lo llamarán los tres. Para calcular el número de días en que recibirá alguna llamada debemos descontar las duplicidades, es decir, sumamos las cantidades de múltiplos de 3, 4 y 5 en un año, descontamos los de 12 (3 y 4 a la vez), 153 y 5 a la vez) y 20 (4 y 5 a la vez) y añadimos los de 60 (3, 4 y 5 a la vez).

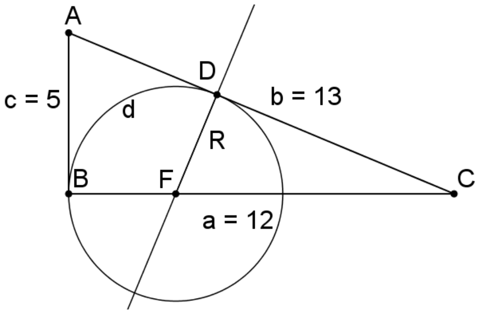
Para saber cuantos múltiplos de un número n hay en los 365 días de un año, necesitamos la parte entera de $\frac{365}{n}$.

Múltiplos de		total
3	365:3=121,…	121
4	365:4=91,…	91
5	365:5=73	73
12	365:12=30,…	30
15	365:15=24,…	24
20	365:20=13,…	13
60	365:60=6,…	6

$$Total\ de\ días\ en\ que\ recibe\ llamadas = 121 + 91 + 73 - 30 - 24 - 13 + 6 = 224$$

$$Total\ de\ días\ en\ que\ no\ recibe\ llamadas = 365 - 224 = 141$$





El que la semicircunferencia sea tangente a la hipotenusa nos indica que el radio trazado hasta el punto de tangencia es perpendicular a la hipotenusa. Con este punto D tenemos definido un triángulo rectángulo de vértices C, D y F. Este triángulo es semejante al de vértices A, B y C, ya que ambos tienen en común el ángulo en C y son rectángulos.

En el triángulo pequeño la hipotenusa mide $12 - R$, y el cateto pequeño R.

En el grande la hipotenusa 13 (con el teorema de Pitágoras: $\sqrt{12^2 - 5^2} = 13$)

$$\frac{hipotenusa\ del\ grande}{cateto\ del\ grande} = \frac{hipotenusa\ del\ pequeño}{cateto\ del\ pequeño} \rightarrow$$

$$\frac{13}{5} = \frac{12 - R}{R} \rightarrow 18R = 60 \rightarrow R = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}\ cm$$

La paralela media del trapecio mide $\frac{B+b}{2}$, donde B es la base mayor y b la menor.

$$A_{triángulo} = \frac{18 \cdot a}{2} = A_{trapecio} = \frac{B+b}{2} \cdot a \quad \rightarrow \quad \frac{B+b}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Para cualquier real r distinto de cero, sólo hay dos opciones para la fracción $\frac{r}{|r|} = \begin{cases} 1 \; si \; r > 0 \\ -1 \; si \; r < 0 \end{cases}$

Como a+b+c=0, al menos uno debe ser negativo.

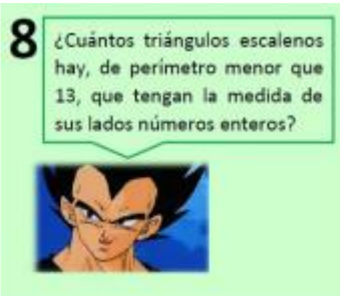
Si de a, b y c dos de ellos son negativos, tendríamos que abc sería positivo.

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$$

Si sólo uno de ellos es negativo, abc sería negativo.

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

La suma siempre dará 0.



Si a, b y c son las longitudes de los tres lados del triángulo deben cumplirse las siguientes condiciones:

Por ser escaleno $a \neq b \neq c \neq a$.

Por tener perímetro menor que 13 $a + b + c < 13$.

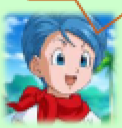
Por ser un triángulo $\begin{cases} a + b > c \\ a + c > b \\ b + c > a \end{cases}$

Veamos en una tabla las opciones posibles

a	b	$a + b$	c	$a + c$	$b + c$	*cumple*
1	2	3				No es posible, c debe ser menor que 3 y distinto de 1 y 2
1	3	4	2	3		No cumple $a + c > b$
1	4	5	2 o 3	3 o 4		No cumple $a + c > b$
1	5	6	2, 3 o 4	3, 4 o 5		No cumple $a + c > b$
1	6	7				No vale porque el perímetro es 14>13
2	3	5	4	6	7	VÁLIDO
2	4	6	5	7	9	VÁLIDO
2	5	7	6	8	11	No vale porque el perímetro es 2+5+6=13
3	4	7	5	8	9	VÁLIDO
3	4	7	6			No vale porque el perímetro es 3+4+6=13

Hay tres triángulos que cumplen las condiciones pedidas.

9 ¿Cuántos trapecios existen que cumplan que su área sea 1400 cm^2, su altura 50 cm y sus bases múltiplos de 8?



En un trapecio calculamos el área con la fórmula $A = \frac{B+b}{2} \cdot a$ donde B y b son las bases mayor y menor y a la altura.

Con los datos que tenemos $1400 = \frac{B+b}{2} \cdot 50 \;\rightarrow\; B + b = 56 = 7 \cdot 8$

Las opciones posibles con la condición de que ambas bases sean múltiplos de 8 son:

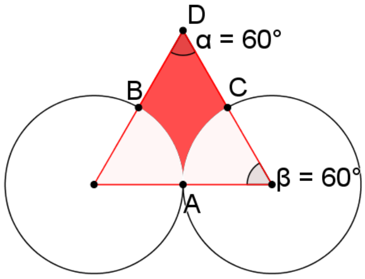
Opción	b	B
1	8·1=8	8·6=48
2	8·2=16	8·5=40
3	8·3=24	8·4=32

Hay tres trapecios que lo cumplen.


10

11

En la figura adjunta DB = DC = 2 cm, ∠BDC = 60°, la longitud de los arcos BA y CA son la sexta parte de la longitud de una circunferencia de radio 2 cm. Hallar el área de la zona coloreada.



Si observamos el dibujo completo, es evidente que el área de la zona coloreada se puede calcular restando al área de un triángulo equilátero de lado 4 cm el área de los dos sectores circulares, es decir, la tercera parte del área de un círculo de radio 2 cm.

Para el área del triángulo necesitamos la altura. Si la trazamos obtenemos un triángulo rectángulo de base 2 cm e hipotenusa 4 cm. Basta usar el teorema de Pitágoras para saber la longitud:

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$A_{roja} = A_{triangulo} - \frac{1}{6}A_{circulo} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 = 4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \cong 2{,}7394\ cm^2$$


13

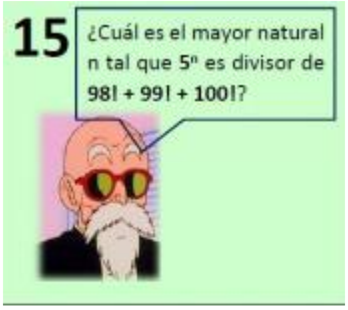
14 π day-1

En cada caja de la figura está escrito un número de forma que cada uno de los tres centrales es la media aritmética de los dos que tiene a su lado. Hallar los números escritos en cada caja.

x	26	y	z	8

$$\begin{cases} 26 = \dfrac{x+y}{2} \\ y = \dfrac{26+z}{2} \\ z = \dfrac{y+8}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 52 \\ 2y - z = 26 \\ 2z - y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} \\ \cdot 2 \end{array}\begin{cases} 2y - z = 26 \\ \underline{-2y + 4z = 16} \\ 3z = 42 \end{cases} \rightarrow z = \frac{42}{3} = 14 \rightarrow \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 32 \end{array}$$

32	26	20	14	8



$$98! + 99! + 100! = 98! \cdot (1 + 99 + 100 \cdot 99) = 98! \cdot 10\,000 = 98! \cdot 2^4 \cdot 5^4$$

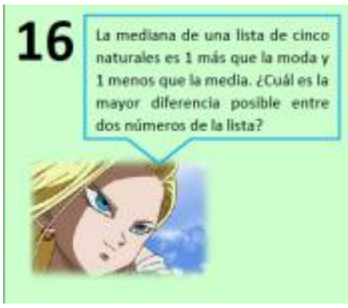
Falta ver cuantos cincos hay en la factorización de 98!:

Menores que 98 hay 19 números que son múltiplos de 5 (desde 5=5·1 hasta 95=5·19), pero entre estos números hay tres que son múltiplos de 25 (25, 50 y 75), que en su factorización tienen dos cincos.

Por lo tanto, en la factorización de 98! aparece el cinco 19+3=22 veces.

Si los unimos a los cuatro cincos de $98! \cdot 2^4 \cdot 5^4$, el total sería 22+4=26.

El valor de n que buscamos será 26. Si fuera mayor, $98! + 99! + 100!$ no sería divisible por 5^n.



Llamamos a los cinco naturales, ordenados de menor a mayor, a, b, c, d, e.

La mediana será $m_e = c$

Sabemos que $m_e = m_o + 1 = \bar{x} - 1$

De $m_e = m_o + 1$, deducimos que la moda será $m_o = a = b$.

De $m_o + 1 = \bar{x} - 1 \;\; \rightarrow \;\; \bar{x} = m_o + 2 = a + 2$

$$\bar{x} = \frac{a + b + c + d + e}{5} = \frac{a + a + (a+1) + d + e}{5} = a + 2 \quad \rightarrow$$

$$3a + 1 + d + e = 5a + 10 \quad \rightarrow \quad d + e = 2a + 9$$

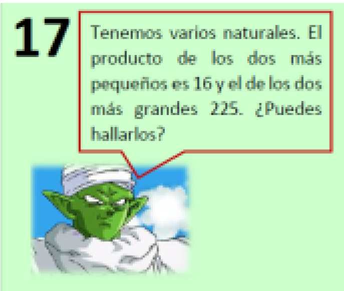
Para obtener $2a + 9$ tenemos varias opciones teniendo en cuenta que d debe ser mayor que $a + 1$, ya que no es bimodal.

$$d + e = (a + 4) + (a + 5)$$

$$d + e = (a + 3) + (a + 6)$$

$$d + e = (a + 2) + (a + 7)$$

La última opción es la que nos da la mayor diferencia entre e y a (el mayor y el menor de la lista): $e - a = a + 7 - a = 7$



Llamamos $n_1\ y\ n_2$ a los dos más pequeños y $n_{F-1}\ y\ n_F$ a los dos más grandes.

Se cumple $n_1 \cdot n_2 = 16 = 2^4$

$$n_{F-1} \cdot n_F = 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

Para $n_1\ y\ n_2$ tendríamos las opciones:

1 y 16	2 y 8

Para $n_{F-1}\ y\ n_F$

1 y 225	3 y 75	5 y 45	9 y 25

Pero sabemos que $n_1 < n_2 < n_{F-1} < n_F$, lo que nos permite eliminar varias opciones:

~~1 y 225~~	~~3 y 75~~	5 y 45	9 y 25

Porque el 1 y el 3 (n_{F-1}) serían menores que n_2 (puede ser 8 o 16).

~~1 y 16~~	2 y 8

Porque 16 sería mayor que n_{F-1} en las dos opciones que nos quedan (podría ser 5 o 9).

~~1 y 225~~	~~3 y 75~~	~~5 y 45~~	9 y 25

Porque n_2=8 sería mayor que $n_{F-1} = 5$

De donde tenemos que $n_1 = 2 < n_2 = 8 < n_{F-1} = 9 < n_F = 25$ es la única opción posible.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo BCD

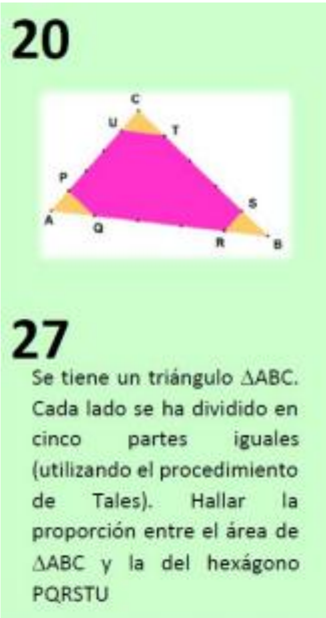
$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 3^{\,2} = 9$

Los triángulos BCD y CDP son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo común. Entonces tenemos

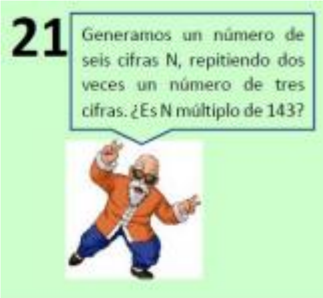
$\dfrac{\overline{DP}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \;\rightarrow\; \overline{BD} \cdot \overline{DP} = \overline{CD}^2 \;\rightarrow\; 3 \cdot 1 = \overline{CD}^2 \;\rightarrow \overline{CD} = \sqrt{3}$

$\overline{BC}^2 + 3 = 9 \;\rightarrow\; \overline{BC}^2 = 6 \;\rightarrow\; \overline{BC} = \sqrt{6}$

El área es $A = \overline{BC} \cdot \overline{CD} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \cong 4.243\ u^2$



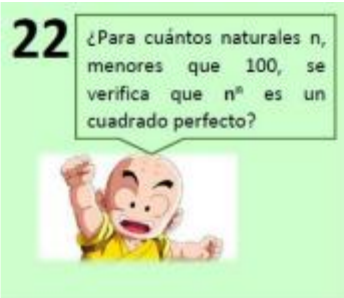
La razón de proporcionalidad entre los triángulos amarillos y el magenta es 1/5 así que la razón entre sus áreas es de 1/25. El área del hexágono es la del triángulo magenta menos la de los tres triángulos $A_{Hexágono}$=22/25 $A_{Triángulo}$. Por lo tanto la razón entre las áreas del hexágono y el triángulo es 22/25



El número tendrá la estructura ABCABC. Para saber si es múltiplo de 143, teniendo en cuenta que si factorizamos 143=11·13, basta comprobar que el número es múltiplo tanto de 11 como de 13.

ABCABC=ABC·1000+ABC=ABC·1001=ABC·7·11·13=ABC·7·143

Por lo que si es múltiplo de 143.



Siempre que n sea un número par, n^n será un cuadrado perfecto:

$$n = 2p \quad \rightarrow \; n^n = \; n^{2p} = \; (n^p)^2$$

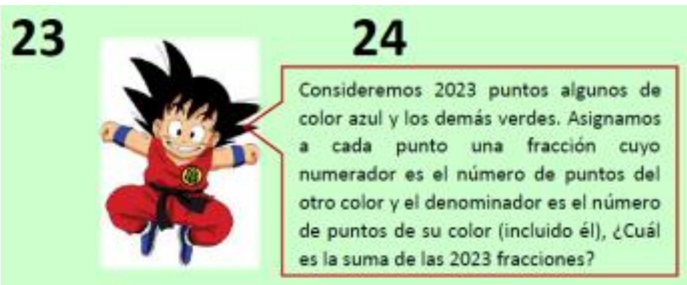
Con esto, como hay 49 números menores que 100 que sean pares, ya tenemos 49 números que cumplen la condición pedida.

Entre los valores impares de n, también se cumplirá si n es un cuadrado perfecto:

$$n = q^2 \quad \rightarrow \quad n^n = (q^2)^n = \; (q^n)^2$$

En este grupo tenemos los números siguientes: 1, 9, 25, 49 y 81.

En total tendremos 49+5=54 números menores que 100 que cumplen que n^n es un cuadrado perfecto.



Llamamos x al número de puntos azules.

$2023-x$ será la cantidad de puntos verdes.

La fracción asignada a los puntos azules será $\frac{2023-x}{x}$

La fracción asignada a los puntos verdes $\frac{x}{2023-x}$

La suma pedida

S=cantidad puntos azules·fracción punto azul+ cantidad puntos verdes·fracción punto verde=

$$S = x \cdot \frac{2023-x}{x} + (2023-x) \cdot \frac{x}{2023-x} = 2023 - x + x = 2023$$

Sean v la velocidad media prevista y t el tiempo estimado tenemos que:

$$v \cdot t = 210 \;\rightarrow\; v = \frac{210}{t}$$

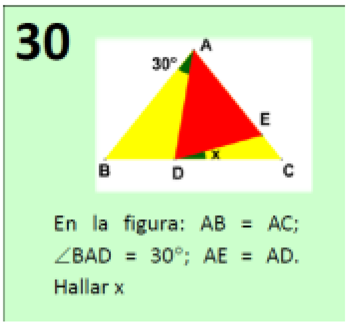
En realidad la situación fue $(v+5)\cdot(t-1) = 210 \;\rightarrow\; v \cdot t - v + 5t - 5 = 210$

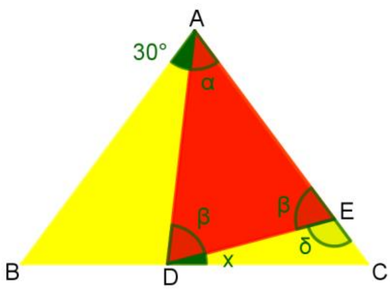
$$\rightarrow -v + 5t - 5 = 0 \;\rightarrow\; -\frac{210}{t} + 5t - 5 = 0 \;\rightarrow\; -210 + 5t^2 - 5t = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 5\cdot(-210)}}{2\cdot 5} = \frac{5 \pm \sqrt{25+4200}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{4225}}{10} = \frac{5 \pm 65}{10} = \begin{cases} \frac{5+65}{10} = 7 \\ \frac{5-65}{10} = -6 \end{cases}$$

$$v = \frac{210}{7} = 30$$

La velocidad media alcanzada es de 35 km/h y el tiempo empleado 6 h.





Triángulo ABC (amarillo)

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{A} = 30° + \alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = 180° - \hat{B} - \hat{C} - 30° \ \rightarrow \ \alpha = 150° - \hat{B} - \hat{C} = 150° - 2\hat{C}$$

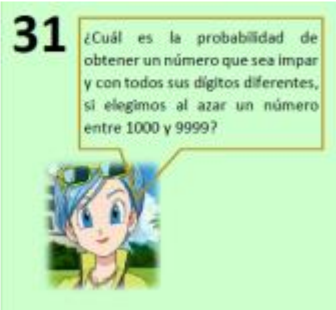
Triángulo ADE (rojo)

$$\alpha + 2\beta = 180° \ \rightarrow \ \alpha = 180° - 2\beta$$

$$150° - 2\hat{C} = 180° - 2\beta \ \rightarrow \ 2\beta - 2\hat{C} = 30° \ \rightarrow \ \beta - \hat{C} = 15°$$

Triángulo DCE

$$x + \delta + \hat{C} = 180° \ \ y \ \ \beta + \delta = 180° \ \rightarrow \ x + \delta + \hat{C} = \beta + \delta \ \rightarrow x = \beta - \hat{C} = 15°$$



El número tendrá cuatro cifras:

D	C	B	A

A debe ser una cifra impar (1, 3, 5, 7, 9)

D no puede ser 0, porque tendríamos un número menor que 1000. Tampoco puede coincidir con una de las otras cifras.

Para C y D la única condición será que sean distintas de las demás.

Calculamos cuántos números podemos formar sin tener en cuenta la condición de que D no puede ser 0. Después, de todos los obtenidos, eliminaremos los que empiecen por 0.

Para A tenemos 5 opciones.

Para B sirve cualquier cifra menos la usada en A: 9 opciones.

Para C, si eliminamos las usadas en A y B, quedan 8 opciones.

De la misma forma, para D tendríamos 7 opciones.

En total, tendríamos 5·9·8·7=2520 opciones.

Pero aquí hemos incluido números que empiezan por cero. Para descontarlos, tenemos en cuenta que en la posición D hay 10 cifras posibles, por lo que la décima parte empezará por 0, es decir, de los 2520 obtenidos 252 empiezan por cero. Los descontamos y tenemos que con las condiciones del problema (todas las cifras distintas, número de cuatro cifras, impar) hay un total de 2520-252=2268 números.

Teniendo en cuenta que entre 1000 y 9999 hay 9000 números, la probabilidad pedida será:

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{2268}{9000} = \frac{63}{250} = 0{,}252$$