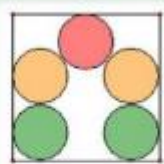


ABRIL 2023

1



Cinc circumferències iguals, de radi r estan a l'interior d'un quadrat de costat c . Calculeu r/c . *Prefectura de Hyogo*

Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen J, K, L centres de tres circumferències de de radi $\overline{JT} = r$

Siga M el punt mig del segment $\overline{JK}$

$$\overline{JL} = 2r, \overline{JM} = \frac{c}{2} - r, \overline{LM} = c - 4r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle JML$

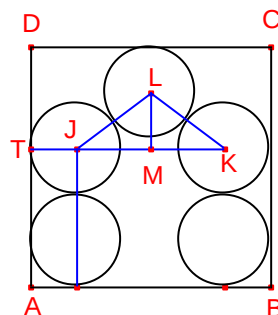
$$4r^2 = (c - 4r)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\right)^2$$

Simplificant:

$$13r^2 - 9cr + \frac{5}{4}c^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$\frac{r}{c} = \frac{5}{26}$$



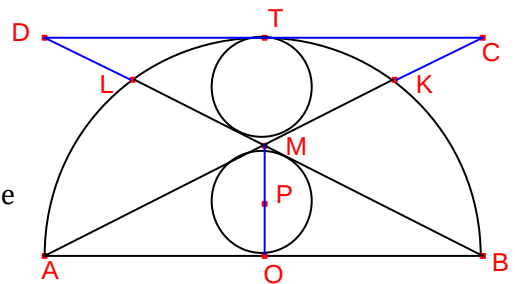
Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al costat del quadrat c . Triarem $c=10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem el quadrat de costat 10.
2. Definim un lliscador r per al radi de les circumferències: de número, definit entre 0.1 i 2.5, amb increment 0.001.
3. Els centres de les cinc circumferències que hem de dibuixar es troben tots sobre un quadrat de costat $10-2r$. Per a dibuixar-ho introduïm els dos vèrtexs inferiors d'aquest: (r, r) i $(10-r, r)$ i amb polígon regular, tracem el quadrat.
4. Les dues circumferències inferiors tenen el centre en els vèrtexs del quadrat i radi r .
5. Les dues centrals, els centres en els punts $(r, 3r)$ i $(10-r, 3r)$ i radi r .

- $$\frac{r}{c} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$



Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem el semicercle de radi 10.
2. Trobem el centre del diàmetre, punt de contacte de la circumferència inferior. Tracem la perpendicular al diàmetre per aqueix punt i podrem obtenir el punt de contacte de la circumferència superior amb el semicercle.
3. En el punt mitjà del segment que uneix aquests dos punts es troba el punt que separa la zona roja superior de la inferior.
4. Tracem les dues rectes aqueix punt i cadascun dels extrems del diàmetre de la semicircumferència.
5. Només falta dibuixar les dues circumferències. Per a fer-ho, introduïm un lliscador per al radi r d'aquestes. Els centres es trobaran en els punts $(10,r)$ i $(10,10-r)$, totes dues amb radi r .
6. Ajustem el lliscador perquè siguin tangents.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$

Siguen K, L, M els punts de tangència al triangle.

Els punts K, L, M són punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$ del triangle.

Siguen $\overline{OK} = R$, $\overline{PL} = r_1$, $\overline{QM} = r_2$

El radi de la circumferència circumscripta és:

$$\overline{KB} = \overline{KT} = 2R$$

Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$16R^2 = b^2 + c^2$$

Els triangles rectangles $\triangle LK, \triangle ABC$ són semblants i de raó 1:2.

$$\frac{KL}{b} = \frac{1}{2} = \frac{2R - 2r_1}{b}$$

$$b = 4R - 4r_1$$

Anàlogament:

$$c = 4R - 4r_2$$

$$16R^2 = b^2 + c^2 = 16(2R^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1R - 2r_2R)$$

Simplificant:

$$R^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2(r_1 + r_2)R = 0$$

Resolent l'equació:

$$R = r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 \cdot r_2}$$

Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al radi del cercle R. Triarem R=10.

Els passos a seguir serien:

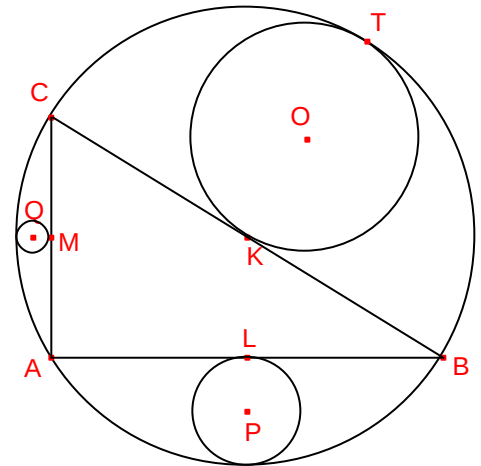
1. Dibuixem la circumferència centrada en l'origen amb radi 10.
2. Per a inscriure el triangle començarem per definir dos lliscadors de número associats a l'altura (a) i la base (b) del triangle. Tots dos de número, entre 0.1 i 10 i amb increment 0.001.

La hipotenusa del triangle coincidirà amb un diàmetre de la circumferència pel fet que el triangle és rectangle.

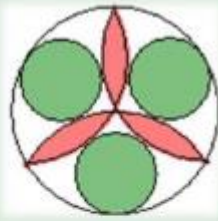
3. Els vèrtexs del triangle estaran en els punts de coordenades $(-b/2, -a/2)$ el corresponent a l'angle recte, i $(-b/2, a/2)$ i $(b/2, -a/2)$ els altres dos.

Per a dibuixar el triangle els introduïm en la barra d'entrada i després tracem el triangle.

4. Les tres circumferències són tangents en els punts mitjans dels costats del triangle. Els trobem, i amb la recta perpendicular a cadascun dels costats per aqueixos punts, obtenim l'altre extrems de cadascun dels diàmetres. Per a dibuixar-les, només ens falta trobar el centre de cada circumferència com a punt mitjà del diàmetre. Ja podem dibuixar les tres.



6



13

En la figura les tres circumferències verdes són iguals i tangents cadascuna d'elles a una circumferència exterior i a dos arcs. Determineu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.
Prefectura de Yamagata

Solució:

Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$

$\overline{TQ} = R$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = r$

$\angle POT = 120^\circ$

$\overline{PT} = R + r, \overline{OP} = R - r$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle OPT$:

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2 - 2(R - r)R \cdot \cos 120^\circ$$

Simplificant:

$$2R^2 = 5Rr$$

Aleshores:

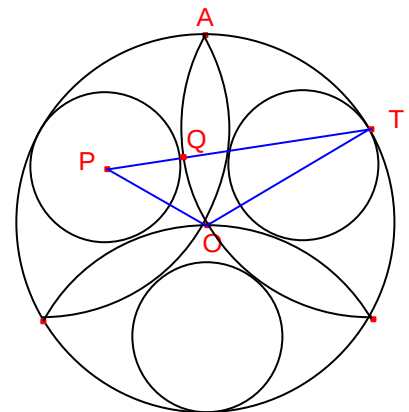
$$\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$$

Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al radi del cercle R . Triarem $R=10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem la circumferència centrada en l'origen amb radi 10.
2. Dibuixem tres diàmetres de la circumferència a 30° , 150° i 270° respecte a la part positiva de l'eix d'abscisses. La intersecció d'aquestes rectes amb la circumferència ens donarà els extrems dels arcs de circumferència. Com també passen per l'origen de coordenades, tenim els tres punts necessaris per a dibuixar els arcs.
3. Definim un lliscador de número per al radi de les tres circumferències, amb valors entre 0.1 i 5 i increment 0.001.



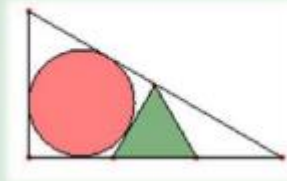
4. Els centres de les tres circumferències estaran sobre la circumferència centrada en l'origen i amb radi $10-r$. La dibuixem i trobem els centres amb la intersecció d'aquesta circumferència i els diàmetres.
5. Podem dibuixar una qualsevol amb centre en un dels punts trobats i radi r . Les altres les obtindríem girant 120° dues vegades.
6. Només falta moure el lliscador fins a aconseguir la tangència que busquem entre les circumferències i els arcs.

7

8

El catet xicotet del triangle rectangle és c . Calculeu el radi de la circumferència i el costat del triangle equilàter.

Prefectura Ehime



Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, $\overline{AC} = c$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OP} = \overline{OQ} = r$ inscrita al triangle $\triangle ABC$

Siga el triangle equilàter $\triangle KLM$ de costat $\overline{KL} = x$

Siga $\angle ABC = \alpha$

$\angle OQM = \angle OPM = 90^\circ$

A més a més, $\overline{OM}$ és perpendicular a $\overline{PQ}$

Aleshores, $OPMQ$ és un quadrat.

$\angle KMQ = 90^\circ$

$\angle MKB = 60^\circ$

Aleshores, $\angle ABC = \alpha = 30^\circ$

$\overline{BC} = 2a$, $\overline{AB} = a\sqrt{3}$

Aleshores, el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\triangle ABC$ és:

$$r = \overline{OT} = \frac{c + c\sqrt{3} - 2c}{2} = (-1 + \sqrt{3})c$$

Els triangles rectangles $\triangle CAK$, $\triangle CMK$ són iguals (ACA)

Aleshores, $\overline{AK} = \overline{KM} = x$

$\angle LBM = \angle LMB = 30^\circ$

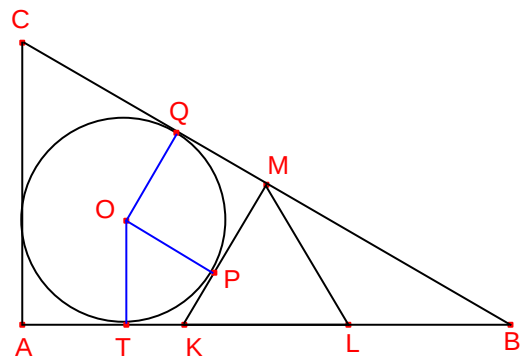
Aleshores, $\overline{BL} = \overline{LM} = x$

$\overline{AB} = 3x = c\sqrt{3}$

Aleshores,

$$x = \overline{KL} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$

Construcció amb GeoGebra



El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al costat del catet c. Triarem $c=10$.

Els passos a seguir serien:

1. Obtindre informació del dibuix:

El vèrtex superior del triangle divideix la hipotenusa en dues parts iguals i els dos vèrtexs de la base divideixen al catet horitzontal en tres parts iguals.

També obtenim que la hipotenusa mesura el doble que el catet c.

2. Dibuixem el catet c amb extrems en els punts (0,0) i (0,10).

3. Amb centre en (0,10) i radi 20 dibuixem una circumferència.

4. El vèrtex que ens falta del triangle està en la intersecció d'aquesta circumferència i l'eix d'abscisses. Dibuixem el triangle.

5. La circumferència inscrita té el centre en el punt d'intersecció de les bisectrius interiors dels angles del triangle. Tracem dos de les bisectrius i trobem el centre.

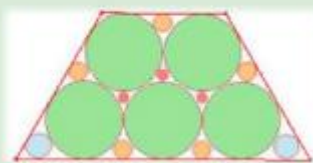
6. La perpendicular per aquest punt a la base ens servirà per a trobar un punt de la circumferència. Ja podem dibuixar-la.

7. El radi de la circumferència el podem mesurar amb el segment que uneix el centre i el punt que hem usat per a dibuixar-la.

8. Per a dibuixar el triangle verd ja tenim el vèrtex superior. Necessitem un altre més. El triangle blanc que queda a la dreta és isòsceles. Si tracem la mediatriu del segment que correspon al costat diferent d'aquest triangle, podrem trobar el vèrtex inferior dret de la base del triangle amb la intersecció amb l'eix d'abscisses. Amb polígon regular i els dos vèrtexs que tenim ja es pot dibuixar el triangle.

9. Per a mesurar el costat del triangle, com tenim els vèrtexs es pot mesurar amb el segment que uneix dos qualssevol.

10



11

El radi de les cinc circumferències verdes tangents als costats del trapezi és r , calculeu el radi dels altres tres tipus de circumferències.

Prefectura de Gunma

Solució:

Siguen les circumferències de centres O, P i radi $\overline{OK} = \overline{PL} = r$

Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.

Siga L el punt mig del segment $\overline{KL}$

Siga la circumferència de centre U i radi $\overline{UM} = s$

$$\overline{TU} = r - s, \overline{OT} = r, \overline{OU} = r + s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OTU$:

$$(r + s)^2 = r^2 + (r - s)^2$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{1}{3}r$$

Siga la circumferència de centre V i radi $\overline{VW} = t$

Siga Z el punt de tangència de la circumferència de centre O i el costat no paral·lel del trapezi.

$$\overline{OX} = 2 \cdot \overline{OZ} = 2r$$

$$\overline{XW} = r$$

$$t = \overline{VW} = \frac{1}{3}\overline{XW} = \frac{1}{3}r$$

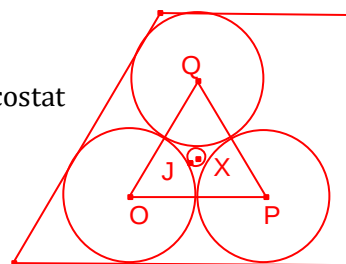
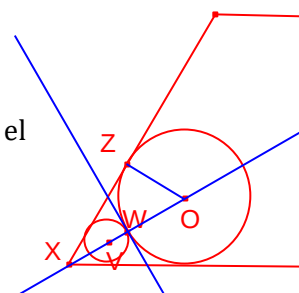
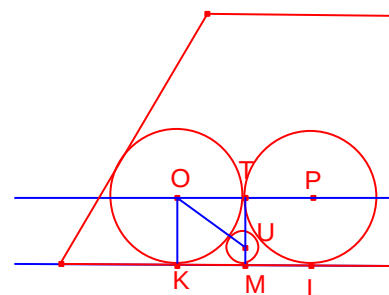
Siga la circumferència de centre Q i radi r .

Siga la circumferència de centre X i radi $\overline{XJ} = x$

El centre X és el baricentre del triangle equilàter $\triangle OPQ$ de costat $\overline{OP} = 2r$

$$\overline{OX} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r$$

$$x = \overline{XJ} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r - r = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}r$$



Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al radi del cercle verd r . Triarem $r=10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem una circumferència centrada en l'origen amb radi 10. Seria la central de la línia inferior. Traslladant-la amb els vectors $(2r, 0)$ i $(-2r, 0)$ (amb el valor de $r=10$ serien $(20,0)$ i $(-20,0)$) obtindríem les dues que falten.
2. Les dues circumferències superiors tenen el centre en el vèrtex superior del triangle equilàter la base del qual uneix els dos centres de les circumferències que tenen davall. Dibuixem un dels dos triangles i tracem la circumferència amb centre el vèrtex trobat i radi $r=10$. L'altra per translació igual que hem fet en l'altra fila de circumferències.
3. Per a dibuixar el trapezi necessitem les rectes tangents a les circumferències de cada costat. Amb els punts d'intersecció obtenim els vèrtexs i podem traçar el polígon.
4. Per a traçar les circumferències xicotetes roges, usem el triangle equilàter que hem traçat abans per a les circumferències. El centre de la circumferència coincideix amb el del triangle. Si tracem el segment que uneix el centre de la roja amb el d'una de les verds a les quals és tangent, obtenim en la intersecció de la circumferència verda i el segment, un punt de la circumferència roja. Ja podem traçar-la.
5. Per a la grogues usarem que són tangents a dues circumferències verdes i a la recta que defineix el costat corresponent.

El centre estarà en el punt de tall de les paràboles amb focus en el centre de cadascuna de les dos verds i vèrtex en el punt d'intersecció de la recta i la circumferència.

Per a dibuixar les paràboles necessitem la directriu:

Fem una simetria axial dels centres de les circumferències amb la base del trapezi com a eix de simetria i tracem la directriu com la recta que passa per tots dos simètrics.

Dibuixem les dues paràboles, i en el punt d'intersecció d'ambdues tenim el centre de la circumferència que busquem.

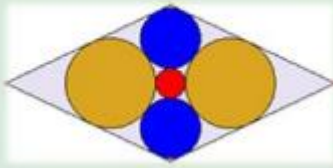
Tracem la perpendicular per aqueix punt a la base del trapezi per a obtindre el punt que necessitem de la circumferència groga.

6. Per a les circumferències blaves començarem per unir el centre de la verd amb el vèrtex del trapezi. El punt de tall d'aquesta línia i la circumferència verda pertany a la blava.

Si tracem una paral·lela a la base per aquest punt, tallarà al costat oblic del trapezi en un altre punt de la circumferència blava. La mediatriu d'aquest segment conté al centre de la blava. Podem trobar-ho amb la intersecció de la mediatriu i la recta que hem traçat al principi unint el vèrtex i el centre de la verd.

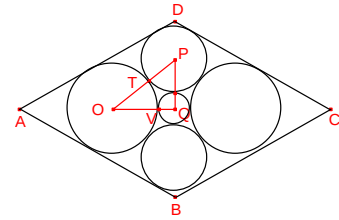
7. De totes les circumferències tenim el centre i un punt, amb el que podem mesurar tots els radis.

14



15

Quatre circumferències de radi R i r són tangents als costats d'un rombe. Una cinquena circumferència de radi s és tangent a les quatre anteriors. Calculeu el valor del radi R en funció dels radis r i s
Prefectura de Nagano



Solució:

Siga el rombe $ABCD$.

Siga la circumferència de centre O i radi $R = \overline{OT}$.

Siga la circumferència de centre P i radi $r = \overline{PT}$

Siga la circumferència de centre Q i radi $s = \overline{QV}$

$$\overline{OQ} = R + s, \overline{PQ} = r + s, \overline{OP} = R + r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OQP$:

$$(R + r)^2 = (r + s)^2 + (R + s)^2$$

Simplificant:

$$Rr = s^2 + rs + Rs$$

Resolent l'equació en la incògnita R :

$$R = \frac{s(r + s)}{r - s}$$

Construcció amb GeoGebra

Per a fer el dibuix començarem per les circumferències per a després dibuixar el rombe.

Els passos a seguir serien:

1. Definim tres lliscadors (R , r i s) per als radis de les tres circumferències. Els tres de número, des de 0.1 fins a 10, amb increment 0.001.
2. Dibuixem la circumferència de radi s (la central) amb centre en l'origen.

El centre de les marrons es trobarà en el $(s + R, 0)$ i en $(-(s + R), 0)$. El radi serà R . Les dibuixem. (Podem dibuixar una i per simetria l'altra).

El centre de les blaves serà $(0, s + r)$ i $(0, -(s + r))$. El radi serà r . Dibuixem les dues.

Els costats del rombe són tangents a dos de les circumferències. Mitjançant recta tangent, podem dibuixar-les. Prou trobar els punts d'intersecció per a tindre els vèrtexs del rombe i poder dibuixar-lo.

Movem els lliscadors fins a obtindre la tangència de les circumferències.

Per a veure la relació entre els radis, dibuixem els tres quadrats que tenen com a base el segment que uneix dos dels centres de les circumferències. Es compleix el teorema de Pitàgores, la relació serà $(R + r)^2 = (r + s)^2 + (R + s)^2$.

17

Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels sis cercles iguals tangents a dotze arcs iguals de circumferència i l'àrea del cercle exterior.

Prefectura Nagasaki

24



Solució:

La intersecció dels dotze arcs forma un hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O .

Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència exterior.

Siga la circumferència tangent a dos arcs de centre P i radi $\overline{PT} = r$

$$\overline{OP} = R - r, \overline{AB} = \frac{1}{2}R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle APO$

$$R^2 = (R - r)^2 + \frac{1}{4}R^2$$

Simplificant:

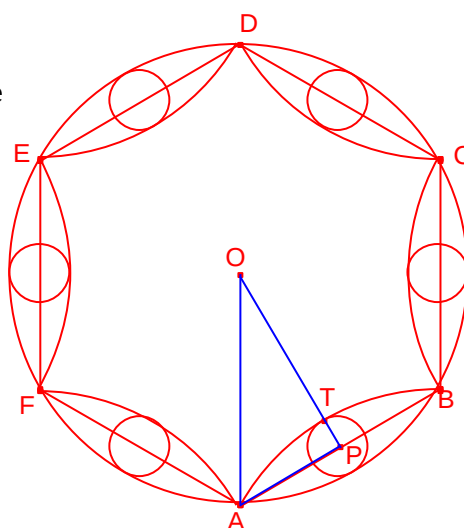
$$4r^2 - 8Rr + R^2$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}R$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{6 \cdot S_P}{S_O} = \frac{6 \cdot r^2}{R^2} = \frac{3}{2}(7 - 4\sqrt{3})$$



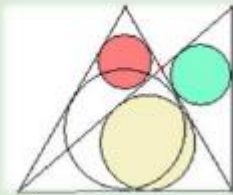
Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al radi del cercle exterior R . Triarem $R=10$.

Els passos a seguir serien:

1. L'estrela que queda a l'interior té les puntes en els vèrtexs de l'hexàgon inscrit en la circumferència exterior, per la qual cosa el costat d'aquest mesurarà el mateix que el radi R . Dibuixem un hexàgon regular de costat 10.
2. Circumscrivim la circumferència a l'hexàgon (Amb circumferència per tres punts).
3. Per als arcs que formen l'estrela n'hi ha prou amb fer una simetria axial de la circumferència respecte a cadascun dels costats de l'hexàgon (O dibuixar una i anar girant respecte al centre de la circumferència 60° fins a tindre'ls tots).
4. La mediatriu d'un costat qualsevol de l'hexàgon ens permet obtindre per intersecció amb la circumferència exterior i amb els arcs els dos extrems d'un diàmetre de les circumferències xicotetes. Trobem amb punt mitjà del diàmetre el centre de la circumferència i la dibuixem amb circumferència amb centre i punt.
5. Podem trobar l'àrea de les circumferències dibuixades i calcular la proporció demanada.

18



19

En la figura el costat del triangle equilàter és 1. El triangle rectangle té el catet vertical igual a l'altura del triangle equilàter. Calculeu els radis de les tres circumferències ombrejades.

Prefectura Yamagata

Solució:

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle rectangle $\triangle ABD$, $B = 90^\circ$, $\overline{BD} = \overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Siga E la intersecció dels dos triangles.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Siga $\alpha = \angle DAB$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\sqrt{7}}{7} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{14}, \quad \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KP} = r$. Siga $\overline{CE} = x$, $\overline{AE} = y$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ACE$

$$\frac{x}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin(60^\circ + \alpha)}, \quad \frac{y}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sin(60^\circ + \alpha)}$$

$$\text{Aleshores, } \overline{CE} = x = \frac{1}{3}, \overline{AE} = y = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

L'àrea del triangle $\triangle ACE$ és

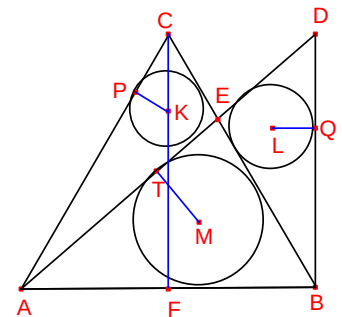
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} r \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \right)$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{21}}{18}$$

Siga la circumferència de centre L i radi $\overline{LQ} = s$

$$\overline{BE} = \frac{2}{3}, \overline{DE} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$



L'àrea del triangle $\triangle BDE$ és

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}s \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{6} \right)$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{\sqrt{21} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{7} - 1}{12}$$

Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MT} = t$

L'àrea del triangle $\triangle ABE$ és

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}t \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \right)$$

Resolent l'equació:

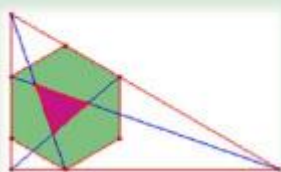
$$t = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{21}}{18}$$

Construcció amb GeoGebra

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem el triangle equilàter de costat 1.
2. Per a dibuixar el triangle rectangle necessitem el vèrtex superior. Tracem la paral·lela a la base pel vèrtex superior de l'equilàter i la perpendicular a la base pel vèrtex dret de la base. El punt de tall d'aquestes dues rectes és el que busquem. Ja podem traçar el triangle rectangle.
3. Les circumferències són totes inscrites en un triangle. Per a dibuixar-les seguim en totes els mateixos passos:
4. Trobem les bisectrius de dues dels angles del triangle. El punt de tall correspon al centre de la circumferència.
5. Per a trobar un punt de la circumferència i poder dibuixar-la, tracem la perpendicular a un dels costats del triangle que passe pel centre de la circumferència. La intersecció de les dues rectes és un punt de la circumferència.
6. Amb aquest punt, podem tant dibuixar les circumferències, com mesurar els radis amb el segment que uneix aquest punt amb el centre de la circumferència.

20



21

En un triangle rectangle s'ha inscrit un hexàgon regular (veure figura). Calculeu la ràtio de proporcionalitat de les seues àrees. Els vèrtexs del triangle rectangle s'han unit amb vèrtexs de l'hexàgon regular. Calculeu la proporció entre les àrees del triangle i de l'hexàgon regular.

Prefectura Iwate

Solució:

Notem que el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, $B = 30^\circ$, $C = 60^\circ$

Siga $x = \overline{HI}$, costat de l'hexàgon regular $HIJKLM$

Notem que el triangle $\triangle HIC$ és equilàter.

$\angle ALM = 30^\circ$, $\overline{ML} = x$, aleshores, $\overline{MA} = \frac{x}{2}$.

$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MH} + \overline{HC} = \frac{x}{2} + x + x = \frac{5}{2}x$$

$$\overline{BC} = 5x$$

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és igual a la meitat de l'àrea d'un triangle equilàter de costat $\overline{BC} = 5x$:

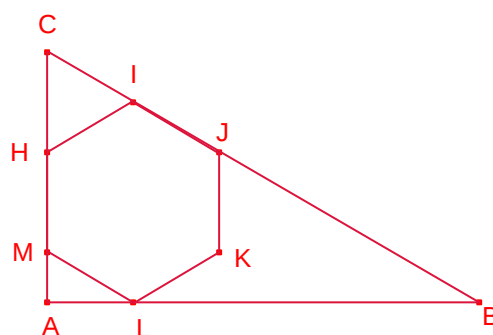
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \frac{(5x)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{8} x^2$$

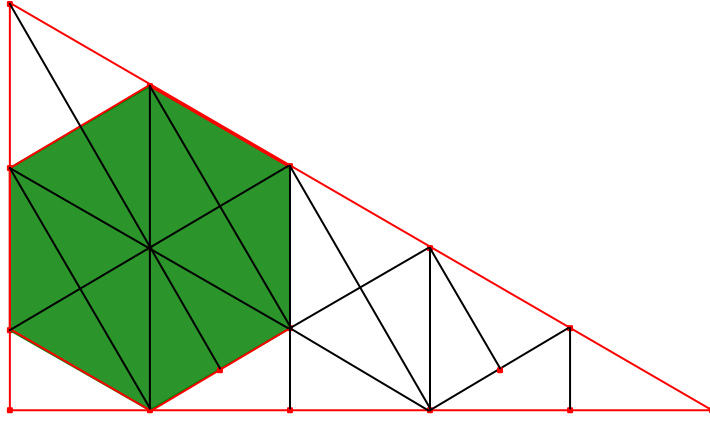
L'àrea de l'hexàgon regular $HIJKLM$ és igual a sis vegades l'àrea d'un triangle equilàter de costat $x = \overline{HI}$.

$$S_{HIJKLM} = 6 \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

La proporció entre les àrees de l'hexàgon $HIJKLM$ i del triangle $\triangle ABC$ és:

$$\frac{S_{HIJKLM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} x^2}{\frac{25\sqrt{3}}{8} x^2} = \frac{12}{25}$$





$$\overline{AL} = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \overline{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x, \overline{CL} = x\sqrt{7}, \overline{BH} = \sqrt{21}x$$

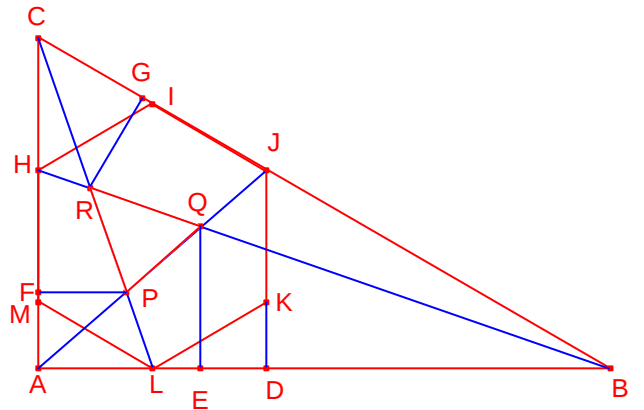
Notem que $\angle ACL = \angle ABH = \beta$, ja que:

$$\tan \beta = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{14}, \cos \beta = \frac{5}{14}\sqrt{7}$$

$$\text{Siga } \angle JAB = \alpha, \overline{AD} = x\sqrt{3}, \overline{JD} = \frac{3}{2}x, \overline{AJ} = \frac{1}{2}\sqrt{21}x$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos \alpha = \frac{2}{7}\sqrt{7}, \tan \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$



$$\text{Siga } \angle PQR = \gamma = \alpha + \beta$$

$$\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{14} - \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = 60^\circ$$

Siga E la projecció de Q sobre $\overline{AB}$. Siga $\overline{AE} = a$

$$\frac{\overline{QE}}{a} = \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\overline{QE}}{\frac{5}{2}\sqrt{3}x - a} = \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Aleshores:

$$a = \frac{5\sqrt{3}}{7}x, \overline{QE} = \frac{15}{14}x, \overline{BE} = \frac{25\sqrt{3}}{14}x, \overline{AQ} = \frac{5\sqrt{21}}{14}x, \overline{BQ} = \frac{5\sqrt{21}}{7}x$$

Siga F la projecció de P sobre $\overline{AC}$. Siga $\overline{CF} = b$

$$\frac{\overline{PF}}{b} = \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\overline{PF}}{\frac{5}{2}x - b} = \cotan \beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Aleshores:

$$b = \frac{25}{13}x, \overline{PF} = \frac{5\sqrt{3}}{13}x, \overline{AF} = \frac{15}{26}x, \overline{AP} = \frac{5\sqrt{21}}{26}x, \overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \frac{15\sqrt{21}}{91}x$$

Siga G la projecció de R sobre $\overline{BC}$. Siga $\overline{CF} = c$

$$\frac{\overline{RG}}{c} = \tan(60^\circ - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\overline{RG}}{5x - c} = \tan(30^\circ - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Aleshores:

$$c = \frac{10}{11}x, \overline{RG} = \frac{5\sqrt{3}}{11}x, \overline{BR} = \frac{45}{11}x, \overline{BR} = \frac{10\sqrt{21}}{11}x, \overline{QR} = \overline{BR} - \overline{BQ} = \frac{15\sqrt{21}}{77}x$$

L'àrea del triangle PQR és:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \overline{PQ} \cdot \overline{QR} \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{15\sqrt{21}}{91}x \cdot \frac{15\sqrt{21}}{77}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{675}{4004}\sqrt{3}$$

La proporció d'àrees és:

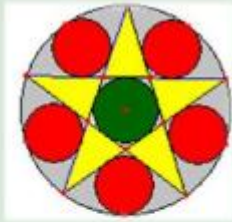
$$\frac{S_{PQR}}{S_{HIJKLM}} = \frac{\frac{675}{4004}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{225}{2002}$$

Construcció amb GeoGebra

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem el triangle rectangle. Per a fer-ho, sabent que l'hexàgon és regular, és fàcil comprovar que els angles del triangle són 60° el superior i 30° el de la dreta.
2. Necessitem donar una grandària a un dels costats del triangle. Triem 10 per al catet vertical. Una vegada dibuixat, pel vèrtex superior tracem un angle de 60° . El punt de tall de la recta que el defineix amb l'eix d'abscisses serà el vèrtex que ens falta. Dibuixem el triangle.
3. Per a dibuixar l'hexàgon necessitem els dos vèrtexs d'un dels costats. En el catet vertical es troben a $1/5$ de la distància des de l'origen al vèrtex i a $3/5$ d'aquest. Els punts serien $(0,2)$ i $(0,6)$. Dibuixem l'hexàgon.
4. Tracem els segments que defineixen el triangle roig. Trobem els vèrtexs amb la intersecció dels segments i dibuixem el triangle.
5. Les tres àrees demanades estan en la vista algebraica en els dos triangles i el polígon.

22



29

Considerem el pentàgon regular estrellat i la seua circumferència inscrita de radi r . Siguen les cinc circumferències tangents, de radi s , al pentàgon regular estrellat i a la seua circumferència circumscrita. Calculeu la proporció: s/r
Prefectura de Nagano

Solució:

Siga $ABCDE$ el pentàgon regular estrellat, de centre O .

$$\text{Siga } \overline{AB} = 1, \overline{AC} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència circumscrita al pentàgon regular $ABCDE$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{1}{\sin 36^\circ} = 2R$$

Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència inscrita al pentàgon regular estrellat.

Siga la circumferència tangent al pentàgon regular estrellat i a la circumferència circumscrita de centre P i radi $s = \overline{PQ}$

La circumferència inscrita al pentàgon estrellat està inscrita al triangle $\triangle ACG$

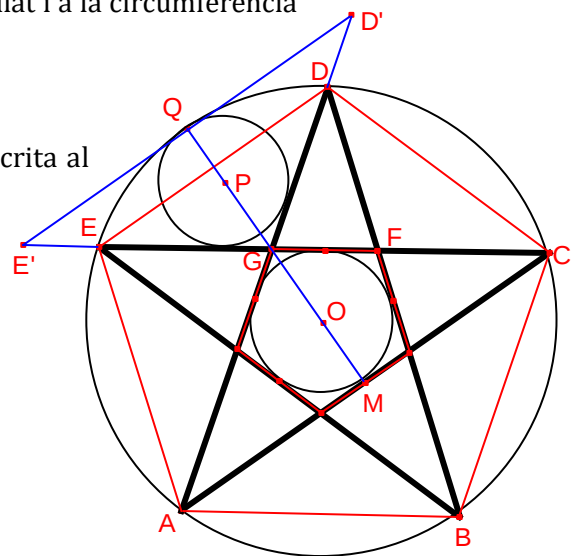
Siga $h = \overline{GM}$ l'altura.

L'àrea del triangle $\triangle ACG$ és:

$$S_{ACG} = \frac{1}{2}(2 + \Phi)r = \frac{1}{2}\Phi \sin 36^\circ = \frac{1}{2}\Phi \cdot h$$

Aleshores:

$$r = \frac{\Phi}{2 + \Phi} \sin 36^\circ$$



$$h = \sin 36^\circ$$

La circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = s$ està inscrita en el triangle $D'E'G$

Els triangles $\triangle ACG, \triangle D'E'G$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\begin{aligned} \frac{s}{r} = \frac{\overline{GQ}}{h} = \frac{2R - 2h}{h} &= \frac{\frac{1}{\sin 36^\circ} - 2 \cdot \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{\sin^2 36^\circ} - 2 = \frac{1}{1 - \cos^2 36^\circ} - 2 = \frac{1}{1 - \frac{\Phi^2}{4}} - 2 \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Construcció amb GeoGebra

Els passos a seguir serien:

1. Comencem dibuixant un pentàgon regular de costat 10. En ell inscrivim el pentàgon estrellat i la circumferència circumscrita (amb circumferència per tres punts, tenim cinc).
2. La circumferència verda podem dibuixar-la amb el centre (coincideix amb el de la circumscrita) i un punt (serveix el punt mitjà de qualsevol dels costats de l'estrela).
3. Per a dibuixar les roges traçarem el radi de la circumferència circumscrita que passe per un vèrtex del pentàgon circumscrit a la verd. Sobre l'estarà el centre de la roja. El punt de tall del radi i la circumferència circumscrita pertany a la roja.
4. Definim un lliscador s per al radi de les roges: de número, entre 1 i 2.5 i increment de 0.001.
5. Tracem una circumferència amb centre en el mateix punt que la verda i radi $R-s$, on R és el radi de la circumscrita. (Podem traçar un segment des del centre a un punt qualsevol per a conèixer R si no sabem el que mesura).
6. Movem el lliscador fins que la circumferència siga tangent a la circumscrita i a l'estrela.
7. Per rotació amb centre en el de la circumferència verda i 72° podem anar traçant les altres roges.

25

En una circumferència s'han dibuixat cinc circumferències. Les tres roges iguals i les altres dos iguals i tangents interiors. Calculeu la proporció entre els radis.
Prefectura de Hyogo

26



Solució:

Siga O el centre de la circumferència de radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$

Siga P el centre de la circumferència de radi $\overline{PT} = r$

Siga Q el centre de la circumferència de radi $\overline{QA} = s$

Siga O el centre de la circumferència de radi $\overline{OK} = s$

Notem que $2r - s = R$

$\overline{OP} = r - s, \overline{OQ} = R - s = 2r - 2s, \overline{PQ} = r + s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle POQ$

$$(r + s)^2 = (r - s)^2 + 4(r - s)^2$$

Simplificant:

$$\frac{r + s}{r - s} = \sqrt{5}$$

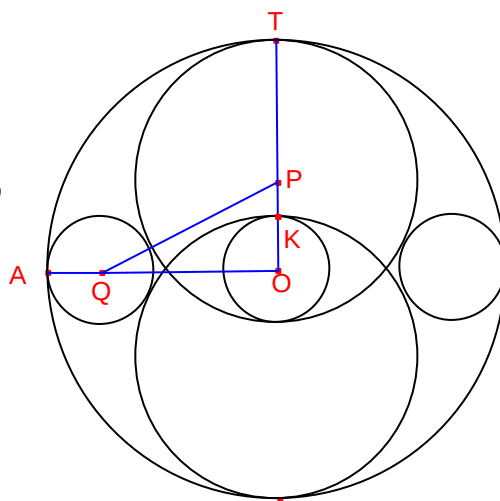
Resolent l'equació:

$$\frac{s}{r} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$R = 2r - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

$$\frac{R}{s} = 2 + \sqrt{5}$$



Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al radi de la circumferència exterior. Triarem 10.

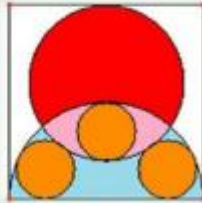
Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem la circumferència de radi 10 centrada en l'origen de coordenades.
2. Introduïm un lliscador per al radi de les circumferències xicotetes: de número entre 0.5 i 7 i amb increment 0.001.
3. Els centres de les tres xicotetes estan en l'origen de coordenades i a una distància de r de la circumferència exterior. Per a trobar-los tracem una circumferència amb centre en $(0,0)$ i radi $10-r$ i trobem la intersecció amb l'eix d'abscisses.
4. Dibuixem les tres circumferències amb radi r i els tres centres esmentats.
5. Trobem la intersecció de l'eix d'ordenades amb la circumferència central i amb l'exterior. Obtenim els extrems d'un diàmetre de les circumferències mitjanes. El punt mitjà del diàmetre serà el centre. Dibuixem les dues circumferències.
6. Movem el lliscador fins a aconseguir la tangència de les circumferències.

27

Donat un quadrat de costat $2a$ dibuixem un semicircle sobre el costat inferior com a diàmetre. Construïm una circumferència de radi R amb centre en la mediatriu del diàmetre del semicircle i tangent al costat superior. Tres circumferències de radi r són tangents a la semicircumferència i a la circumferència anterior. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferència.
Prefectura de Iwate.

28



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$ i centre O .

Siguen M, N els punts mitjans dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PN} = r$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = s$

Siga K la projecció ortogonal de Q sobre $\overline{PM}$.

$$2r = a + 2s$$

$$\overline{PQ} = r + s = \frac{a}{2} + 2s, \overline{MQ} = a - s, \overline{MK}, \overline{PK} = 2a - r - s = \frac{3a}{2} - 2s$$

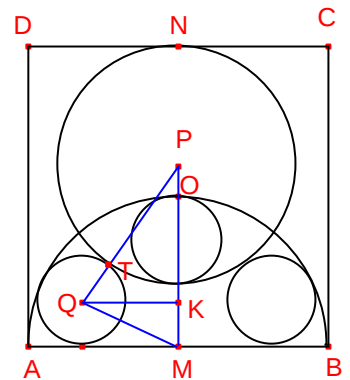
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle QKM$:

$$\overline{QK}^2 = (a - s)^2 - s^2 = a^2 - 2as$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PKQ$:

$$\overline{QK}^2 = \left(\frac{a}{2} + 2s\right)^2 - \left(\frac{3a}{2} - 2s\right)^2 = -2a^2 + 8as$$

Igualant les dues expressions:



$$a^2 - 2as = -2a^2 + 8as$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{3}{10}a$$

$$\text{Aleshores, } r = \frac{4}{5}a$$

La proporció entre els radis dels dos tipus de circumferència és:

$$\frac{s}{r} = \frac{3}{8}$$

Construcció amb GeoGebra

El primer per a poder dibuixar és assignar un valor al costat del quadrat $2a$.

Triarem $2a = 10$.

Els passos a seguir serien:

1. Dibuixem el quadrat amb base entre els punts (0,0) i (10,0).
2. Dibuixem la semicircumferència.
3. Definim un lliscador per al radi R de la circumferència gran. De número, entre 1 i 5 amb increment 0.001.
4. Tracem la mediatriu de la base.
5. Introduïm el punt $(5, 10 - R)$ que serà el centre de la circumferència gran. La dibuixem amb centre en aqueix punt i radi R .

Per al radi de les xicotetes establim la relació entre r i R .

El diàmetre de la circumferència gran podem mesurar-lo de dues formes

$$2R$$

$$a + 2r$$

D'ací deduïm que $r = R - a/2$. Com estem usant $2a = 10$, tindrem que $r = R - 2.5$

6. Introduïm en la barra d'entrada $r = R - 2.5$.
7. Per a dibuixar la circumferència xicoteta del centre necessitem el seu centre. Trobem la intersecció de la mediatriu de la base amb la circumferència gran i la semicircumferència. Obtindrem els extrems d'un diàmetre. El punt mitjà d'aquest diàmetre serà el centre de la circumferència.
8. Dibuixem la circumferència amb centre en el punt que acabem de trobar i radi r .
9. Per a les dues que ens falten sabem que el centre està a una distància de r de la base del quadrat. Introduïm la recta horitzontal $y = r$.
10. També sabem que el centre està en una circumferència centrada en el mateix punt que la semicircumferència i amb radi $5 - r$. La dibuixem.
11. Trobem el punt d'intersecció de la recta i la circumferència que acabem de traçar i tindrem el centre de la circumferència. La dibuixem amb radi r .
12. L'altra la podem traçar amb una simetria axial respecte a la mediatriu.
13. Movem el lliscador fins a aconseguir que es verifiquen les tangències. S'obté amb $R = 4$ i $r = 1.5$
14. $R/r = 4/1.5 = 8/3$