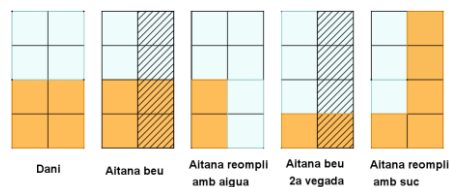
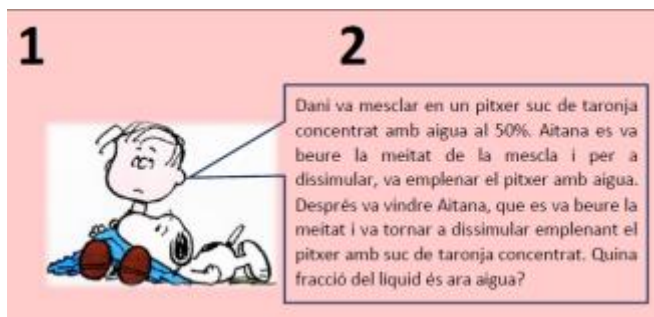


MAIG 2023

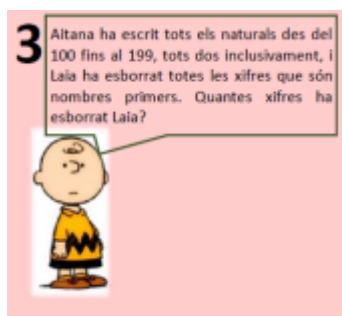


Quan Dani plena el pitxer, la meitat és aigua i la meitat suc.

En estar mesclat, Aitana beu la meitat del suc i la meitat de l'aigua. Per això, en emplenar només amb aigua, tenim una quarta part de suc i tres quartes parts d'aigua.

Quan torna a beure, Aitana beu una part de suc i tres d'aigua del mig pitxer. En emplenar amb suc aquesta vegada, el resultat és que en el pitxer hi ha cinc parts de suc per tres d'aigua.

És a dir, com tenim el líquid del pitxer dividit en huit parts, al final el contingut del pitxer és de $\frac{5}{8}$ de suc per $\frac{3}{8}$ d'aigua, tal com es pot veure en el dibuix.



Els nombres primers d'una sola xifra són 2, 3, 5 i 7. Són les xifres que ha esborrat Laia.

Comptem quantes vegades apareix cadascuna:

El 2 no apareix mai en la posició de les centenes.

Del 120 al 129 apareix 10 vegades en la posició de les desenes.

En la posició de les unitats apareix també 10 vegades, des del 102 fins al 192.

En total el 2 apareix 20 vegades.

De la mateixa forma, les altres tres xifres (3, 5 i 7) també apareixen 20 vegades.

En total, Laia esborra $4 \cdot 20 = 80$ xifres.

4

Laia va recollir un cistell de taronges de l'hort familiar. Li va donar la meitat a Dani, 3 taronges a Aitana, 4 a Carles i es va quedar 6 per a ella. Quantes taronges va recollir Laia?



Si va donar la meitat a Dani, les d'Aitana, Carles i les que es va quedar ella són l'altra meitat.

$3+4+6=13$ són la meitat, llavors Laia va recollir 26 taronges.

5



6

Laia i Aitana salten a la corda, però a ritmes diferents. Per cada dos salts que dona Laia, Aitana dona set. Les dues comencen a saltar alhora i quan Laia ha fet cent salts es para, mentre que Aitana encara ha seguit i ha fet cinquanta salts més. Quants salts ha donat Aitana en total?

Sabem que en el temps que Laia fa dos salts, Aitana dona set.

Quan Laia para a els 100 salts ($100=2 \cdot 50$), Aitana haurà donat $7 \cdot 50=350$ salts.

Abans de parar Aitana ha donat 50 salts més, per la qual cosa en total Aitana ha donat $350+50=400$ salts.

8

Òbviament, $10 = 5 \cdot 2$. Quants números de dues xifres són el producte de dos números d'una sola xifra?



Una de les xifres no pot ser mai el 1, perquè el major producte que podríem aconseguir seria el 9 que té una única xifra.

Vegem en una taula els productes possibles

	4	5	6	7	8	9
2		10	12	14	16	18
3	12	15	18	21	24	27
4	16	20	24	28	32	36
5		25	30	35	40	45
6			36	42	48	54
7				49	56	63
8					64	72
9						81
Totals columna	2	4	5	6	7	8

Si sumem tindrem un total de $2+4+5+6+7+8=32$, però alguns productes estan repetits i cal descomptar-los.

Són les cinc parelles marcades amb color en la taula, per la qual cosa hem de descomptar cinc números.

El total de números de dues xifres que podríem obtindre serà $32-5=27$.

9
10

Les operacions estan ben fetes. Lletres diferents representen xifres diferents. Trobeu el valor de cada lletra

A M O

A

+ A D A N

O N D A

A M O

A

+ H A D A

M I M O

AMO+A+ADAN=ONDA

Podem deduir que $\begin{cases} O = A + 1 \\ O + N = 10 \end{cases}$

O	N	A	
1	9	0	A no pot ser un 0
2	8	1	Al ser A=1, és necessari que D siga 8 o 9, però com a N és 8 l'única opció és D=9, d'on M=7. Si comprovem, és impossible.
3	7	2	
4	6	3	
5	5	4	O i N han de ser diferents
6	4	5	
7	3	6	
8	2	7	
9	1	8	

Els sis casos marcats en verd són possibles. La solució no és única.

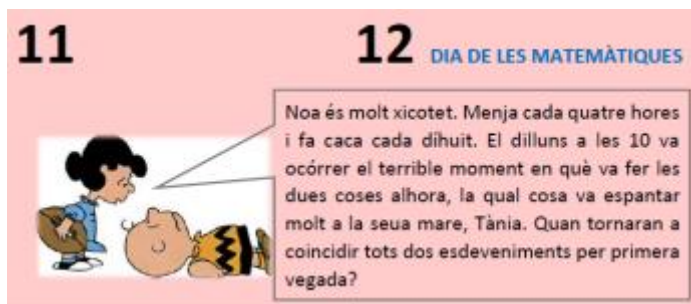
AMO+A+HADA=MIMO

Podem deduir que
$$\begin{cases} A + A = 10 \rightarrow A = 5 \\ M = 1 + H \\ D + 1 = 10 \rightarrow D = 9 \\ I = 1 \end{cases}$$

Com ara ja sabem el valor de $A=5$, podem triar l'única solució de les sis de la primera suma que el compleix, i tindriem:

$A=5$, $O=6$, $N=4$, $I=1$, $D=9$, $H=2$ i $M=3$.

Seria la solució buscada.



Si comencem a comptar des del dilluns a les deu com a hora zero, les hores en què farà cada cosa seran

Menja	4	8	12	16	20	24	28	32	36
Fa caca	18				36				

És a dir, el mínim comú múltiple de 4 i 18 és 36, que són les hores que han de passar perquè les dues coses tornen a coincidir.

Des del dilluns a les 10 fins que acabe el dilluns a les 24 hauran passat 14 hores. Falten 22 perquè hagen passat les 36, així que les dues coses tornaran a coincidir el dimarts a les 22 h.

D'una altra forma, 36 hores és un dia i mig, així que tornaran a coincidir el dimarts a les 10 de la nit (les 22 h).

13 Comencem amb els números: 1, 2 i 3.
El quart número és la suma dels tres
anteriors: 6 i el cinquè, la suma dels
tres anteriors: 11. Si seguim així quin
número ocuparà la posició vintena?



Escrivim els números:

Posició	Número
1	1
2	2
3	3
4	$1+2+3=6$
5	$2+3+6=11$
6	$3+6+11=20$
7	$6+11+20=37$
8	$11+20+37=68$
9	$20+37+68=125$
10	$37+68+125=230$
11	$68+125+230=423$
12	$125+230+423=778$
13	$230+423+778=1431$
14	$423+778+1431=2632$
15	$778+1431+2632=4841$
16	$1431+2632+4841=8904$
17	$2632+4841+8904=16377$
18	$4841+8904+16377=30122$
19	$8904+16377+30122=55403$
20	$16377+30122+55403=101902$

15

16



Dani juga amb els seus rellotges d'arena que tenen tots trenta minuts de duració. Dona la volta a un i cada huit minuts va donant la volta a un nou rellotge. Just quan porta quaranta-set minuts, quants rellotges tindran encara arena sense caure en la seua part superior?

	Hora de gir	Hora buidat
rellotge 1	0 minuts	30 minuts
rellotge 2	8 minuts	38 minuts
rellotge 3	16 minuts	46 minuts
rellotge 4	24 minuts	54 minuts
rellotge 5	32 minuts	
rellotge 6	40 minuts	
rellotge 7	48 minuts	

En la taula podem veure que quan hagen transcorregut 47 minuts, haurà donat la volta a sis rellotges, dels quals només tres estaran buits.

Quedaran tres rellotges amb arena en la seua part superior.

17

Quan Rafa va per autovia circula a 120 km/h i quan va per carretera nacional va a 90 km/h. Hui a recorregut 560 km en 5 h. Quant temps va per autovia?



Solució 1

Diem x al temps en hores que recorre per l'autovia e i al temps en hores que recorre per la nacional.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 120x + 90y = 560 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 12x + 9y = 56 \end{cases} \rightarrow 12x + 9(5 - x) = 56 \rightarrow 3x = 11 \rightarrow x = \frac{11}{3} \text{ hores}$$

Tenint en compte que la tercera part d'una hora són 20 minuts, els $11/3$ podem considerar-los com $\frac{11}{3} = \frac{9+2}{3} = 3 + \frac{2}{3}$, d'on el temps que ha viatjat per l'autovia seria 3 hores i 40 minuts.

Solució 2

Tenint en compte que els problemes d'aquest mes van dirigits a alumnes de primària, que no han de saber resoldre sistemes d'equacions, el mètode per a resoldre'l seria realitzar una taula en la qual anaren calculant segons el temps recorregut per cada tipus de carretera els quilòmetres recorreguts. Pot ser problemàtic el fet d'haver de fer la taula en fraccions de 20 minuts per ser massa llarga.

Cal tindre en compte que del total recorregut el temps és de 5 hores, o cosa que és el mateix, 300 minuts.

Temps per autovia (en min)	Recorregut per autovía (en km)	Temps per nacional (en min)	Recorregut per nacional (en km)	Recorregut total (en km)
20	40	280	420	460
40	80	260	390	470
60	120	240	360	480
80				
100				
120	240	180	270	510
140				
160				
180	360	120	180	540
200				
220				
240	480	60	90	570

Si observem les dues files marcades, una es queda en menys de 560 km i l'altra es passa. D'ací podem deduir que per l'autovia va més de 3 hores i menys de 4 h.

Com tenim calculat el que correspon a 20 minuts, podem mitjançant tanteig arribar a la solució de 3 hores i 40 minuts per l'autovia.

18 Quin és el menor número de 7 xifres que és múltiple de 73? I el major número de 7 xifres múltiple de 73?



Menor número de set xifres múltiple de 73

El menor número de set xifres és l'1 000 000. Comprovem amb una divisió si és múltiple de 73.

$$\begin{array}{r|l} 1\,000\,000 & 73 \\ \hline & 13698 \\ & 46/ \end{array}$$

Com la divisió no és exacta, $73 \cdot 13698$ no arriba a tindre 7 xifres, el número que busquem serà el múltiple següent: $73 \cdot 13699 = 1\,000\,027$.

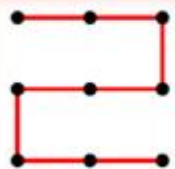
Mayor número de siete cifras múltiplo de 73

El major número de set xifres és el 9 999 999. Comprovem amb una divisió si és múltiple de 73.

$$\begin{array}{r|l} 9\,999\,999 & 73 \\ \hline & 136986 \\ & 21/ \end{array}$$

Com la divisió no és exacta, $73 \cdot 136986$ tindrà 7 xifres perquè és menor que 9 999 999, el número que busquem serà: $73 \cdot 136986 = 9\,999\,978$.

19 **20**



Aitana vol posar en el seu mòbil una clau de desbloqueig que complisca aquestes condicions: Ha de començar en el vèrtex superior de l'esquerra, ha de passar pels 9 punts sense creuar-se mai amb cap camí anterior i tots els traços han de ser horitzontals o verticals, però no valen oblics. Aci et mostrem una possible clau. Quantes claus diferents té Aitana per a triar?

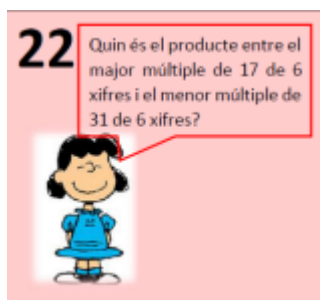
Assignem a cada punt el número del teclat del telèfon que li correspon:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Tots els recorreguts han de començar en el 1. Des d'ací només hi ha dues opcions, el 2 o el 4, però després hi ha més. Perquè es veja més clar farem una taula amb les opcions:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
1	2	3	6	5	4	7	8	9
				9	8	5	4	7
		5	4	7	8	9	6	3
				3	6	9	8	7
	4	7	8	5	2	3	6	9
				9	6	3	2	5
		5	2	3	6	9	8	7
				5	4	7	8	9

En total tindríem 8 maneres de fer-ho.



Diem N al major múltiple de 17 de sis xifres.

Diem M al menor múltiple de 31 de sis xifres.

El primer és saber que números són. Per a això tindrem en compte que el major número de 6 xifres és el 999 999 i el menor de sis xifres el 100 000.

Calculem N:

El primer és comprovar si 999 999 és múltiple de 17 fent la divisió:

$999\,999:17=58\,823,47\dots$. El múltiple més gran serà $17 \cdot 58\,823 = 999\,991 = N$

Calculem M:

El primer és comprovar si 100 000 és múltiple de 31 fent la divisió:

$100\,000:31=3225,806\dots$

Si multipliquem 31 per 3225, el número resultant no tindrà sis xifres ($31 \cdot 3225 = 99975$), però el següent si: $31 \cdot 3226 = 100\,006 = M$

El producte que ens demanen serà $N \cdot M = 999\,991 \cdot 100\,006 = 100\,005\,099\,946$

Si intentem fer la multiplicació amb la calculadora, a l'ésser els números tan grans, el resultat l'obtindrem en notació científica, la qual cosa representa una aproximació. Per a poder obtindre el resultat correcte amb la calculadora és necessari descompondre un dels dos factors:

$$999\,991 \cdot 100\,006 = 999\,991 \cdot (100\,000 + 6) = 999\,991 \cdot 100\,000 + 999\,991 \cdot 6 = \\ = 9\,999\,9100\,000 + 5\,999\,946 = 100\,005\,099\,946$$

23



24

Dani, Laia i Aitana juguen amb números de dues xifres. Cadascun escriu un parell d'ells i comunica només un dels dos. Dani comunica el 14, Laia el 20 i Aitana el 36. I el que són les casualitats els tres productes de cada parella donen el mateix resultat! Quins són els números no comunicats per Dani, Laia i Aitana?

Els números de Dani són el 14 i l'a.

Els números de Laia són el 20 i el b.

Els números d'Aitana són el 36 i el c.

Segons l'enunciat, $14 \cdot a = 20 \cdot b = 36 \cdot c$, o cosa que és el mateix $2 \cdot 7 \cdot a = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot c$

Perquè els tres productes siguin iguals, haurien de tindre els mateixos factors cosins. Si afegim en cada parella els que es veuen en els altres productes, obtindríem:

Dani	$2 \cdot 7 \cdot a$	$2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	$a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$	$14 \cdot 90 = 1260$
Laia	$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot b$	$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$	$b = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$	$20 \cdot 63 = 1260$
Aitana	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot c$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$c = 5 \cdot 7 = 35$	$36 \cdot 35 = 1260$

25



26

Laia i Aitana estan dissenyant una bandera amb cinc franges: dues verticals i tres horitzontals i poden utilitzar els colors verd, roig i blau. Si es prohibeix que dues franges que es toquen tinguin el mateix color, quantes banderes són possibles?

Nomenarem les cinc franges amb lletres per a poder nomenar-les amb facilitat.

B	A	D
		C
		E

La franja A toca a totes, així que el color que usem amb ella no pot usar-se en cap de les altres franges.

La C també està en contacte amb la D i l'E, per la qual cosa ha de tindre un color diferent del d'ambdues.

Vegem quantes opcions diferents podem tindre:

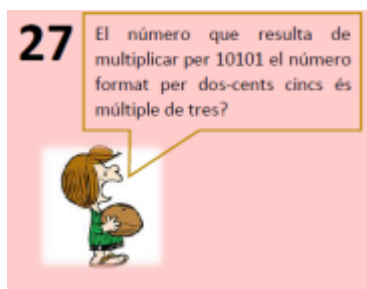
Pintem primer la franja A, per a la qual tenim 3 opcions (verd, roig i blau).

Passem a la franja B, per a la qual ens queden dues opcions possibles (els dos colors no utilitzats en A).

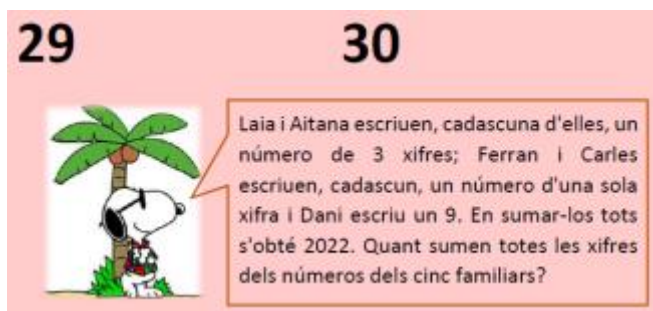
Després pintarem la C, per a la qual també tindrem les mateixes dues opcions que per a B (els dos colors no usats en A).

Finalment, D i E han de ser del mateix color ja que no poden coincidir amb A ni amb C, les dues han de ser de l'únic color no usat en A i C.

En total tindríem $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ opcions diferents per a pintar les banderes.



Si, ja que 10101 és múltiple de 3 ($1+0+1+0+1=3$), i el resultat de multiplicar-lo per qualsevol número sempre serà múltiple de 3.



Si tenim en compte els tres números d'una xifra escrits, el menor valor que podríem obtindre en sumar-los seria 9 ($0+0+9$) i el major 27 ($9+9+9$), ja que en cap moment s'anul·la el zero com a opció ni es diu que els números hagen de ser diferents.

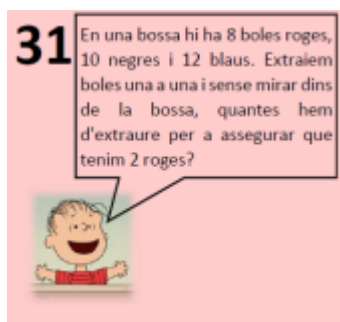
Si la suma dels cinc números és 2022, la suma dels dos números de tres xifres ha d'estar entre $2022-9=2013$ i $2022-27=1995$, però com els números de tres xifres més grans que podem sumar serien $999+999=1998$ es redueixen les opcions.

Vegem les possibilitats:

Laia	Aitana	Dani	L+A+D	Ferrán+Carles	Suma xifres
999	999	9	2007	15	$9 \cdot 7 + 15 = 78$
999	998	9	2006	16	$9 \cdot 6 + 8 + 16 = 78$
999	997	9	2005	17	$9 \cdot 6 + 7 + 17 = 78$
999	996	9	2004	18	$9 \cdot 6 + 6 + 18 = 78$
998	997	9	2004	18	$9 \cdot 5 + 8 + 7 + 18 = 78$
998	998	9	2005	17	$9 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 17 = 78$

No hi ha més opcions, ja que la suma dels números de Ferrán i Carles haurà de ser major que 18 i això és possible, ja que tots dos números són d'una xifra, per la qual cosa la major suma que podem obtenir és 18.

La suma de totes les xifres serà 78 en tots els casos.



El pitjor que ens pot passar és que traguem primer totes les negres i totes les blaves. Les següents, ja no podrien ser més que roges.

Entre negres i blaus hi ha $10 + 12 = 22$ boles. Per a estar segurs de tindre dues roges, necessitem traure dos més, és a dir, si traiem 24 boles, segur que dues seran roges.