

JUNY 2023

1 Siga ABCDEFG un heptàgon regular de costat 1. Demostreu que es compleix la relació:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$$


Mètode 1

El quadrilàter ACDE està inscrit a la circumferència circumscrita a l'heptagon, per la qual cosa el teorema de Ptolemeu ens assegura que

$$AC \cdot DE + CD \cdot AE = AD \cdot CE$$

Donat que $CD = DE = 1$ i $AE = AD$ i $CE = AC$, aquesta igualtat es tradueix en

$$AC + AD = AD \cdot AC$$

d'on es dedueix fàcilment la fórmula de l'enunciat.

Teorema de Ptolemeu

Si un quadrilàter està inscrit en una circumferència, la suma dels productes dels parells de costats oposats és igual al producte de les diagonals.

Mètode 2

Els angles interiors d'un heptàgon regular mesuren $128,57^\circ$

Com els costats de l'heptàgon mesuren 1, aplicant el teorema del cosinus al triangle ABC podem obtenir la longitud del costat AC:

$$AC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 128,57 \rightarrow AC = 1,8019$$

En aqueix triangle podem calcular l'angle en el vèrtex C usant el teorema del sinus:

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{1,8019}{\sin 128,57} \rightarrow \sin C = 0,4339 \rightarrow C = 25,7154$$

Si ara considerem el triangle ACD, l'angle a C serà: $C = 128,57 - 25,7154 = 102,8546^\circ$

Com coneixem les longituds AC i CD, apliquem el teorema del cosinus novament per calcular la longitud d'AD:

$$AD^2 = 1,8019^2 + 1^2 - 2 \cdot 1,8019 \cdot 1 \cdot \cos 102,8546 \rightarrow AD = 2,2469$$

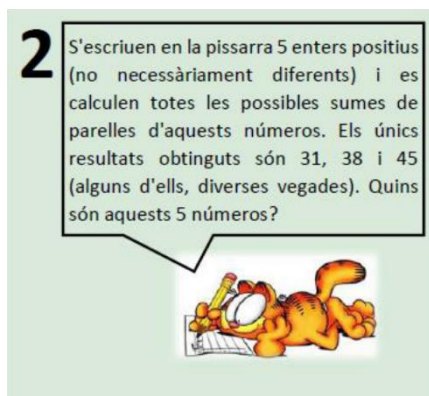
Comprovem ara la relació:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{1,8019} + \frac{1}{2,2469} = 1,000027$$

L'error es deu a la pèrdua dels decimals.

Mètode 3

Encara que no siga una demostració com a tal, és fàcil comprovar amb GeoGebra que la relació és correcta.



Ordenem els cinc nombres de menor a major:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$$

És clar que $x_1 + x_2 = 31$ (la suma menor) i $x_4 + x_5 = 45$ (la suma major) són nombres imparells, per la qual cosa necessàriament $x_1 \neq x_2$ i $x_4 \neq x_5$. Si $x_2 < x_3$, aleshores $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_3 + x_5$ serien quatre sumes distintes, però com sols hi ha tres resultats possibles, ha de ser $x_2 = x_3$. De la mateixa manera es prova que $x_3 = x_4$ i el sistema de cinc equacions:

$$x_1 + x_2 = 31, \quad x_2 + x_3 = 38, \quad x_2 + x_5 = 45, \quad x_2 = x_3 = x_4$$

té solució única:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (12, 19, 19, 19, 26)$$

Aquests nombres compleixen la condició inicial i són els únics.

3 Siga S un conjunt de n elements. Siga $p_n(k)$ el nombre de permutacions dels elements de S que deixen exactament k elements fixos. Demostreu:

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$


IMO, 1987,
PROBLEM 1

La suma en qüestió simplement compta el nombre total de punts fixos a totes les permutacions del conjunt. Però per a qualsevol element k del conjunt, hi ha $(n-1)!$ permutacions que tenen k com a punt fix. Per tant:

$$\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$$

Una altra solució:

Per a qualsevol k , si hi ha $p_n(k)$ permutacions que tenen k punts fixos, sabem que cada punt fix es compta una vegada en el producte $k \cdot p_n(k)$

Per tant, la suma donada és simplement el nombre de punts fixos entre totes les permutacions de $\{1, \dots, n\}$. Però si prenem qualsevol x tal que $1 \leq x \leq n$ i x siga un punt fix, hi ha $(n-1)!$ formes d'ordenar els altres nombres del conjunt. Per tant, la suma desitjada es converteix en $n \cdot (n-1)! = n!$, i ja hem acabat.

5 Si α, β i $\gamma \in \mathbb{R}$ són els angles d'un triangle no rectangle, demostreu que:

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)$$


Si α, β i γ són els tres angles d'un triangle, es compleix la igualtat $\alpha + \beta + \gamma = 180$, amb la qual cosa $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ i, per tant:

$$\tan(\gamma) = \tan(180 - (\alpha + \beta)) = -\tan(\alpha + \beta)$$

Utilitzarem la fórmula:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Així desenvolupem un costat de la igualtat:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(180 - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \\
 &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\
 &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\
 &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{-(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot (-\operatorname{tg}(\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma
 \end{aligned}$$

Per tant: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$



Calculem el nombre de divisors del nombre 20!

Descomponem el nombre en factors primers:

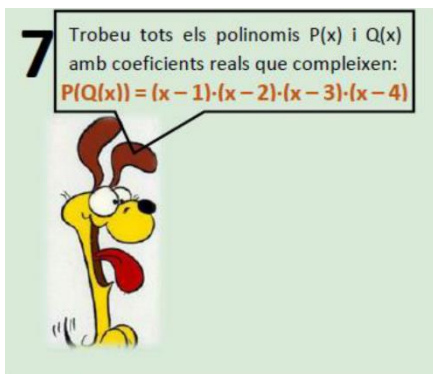
$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

La quantitat de divisors seria el producte dels exponents de la descomposició factorial incrementats en una unitat, és a dir: $19 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 16 = 41\,040$

Però com volem saber quants són imparells, eliminem els divisors parells i calculem els divisors del nombre:

$$3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Per tant la quantitat de divisors imparells serà: $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 16 = 2\,160$



Observem que el grau de $P(Q(x))$ és el producte dels graus de $P(x)$ i $Q(x)$. Si anomenem $R(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, com el grau de $R(x)$ és 4, tenim diverses possibilitats:

- Si $P(x)$ té grau 1, aleshores $P(x) = ax + b$ per a certs $a, b \in R$ amb $a \neq 0$ i, per tant, $Q(x) = \frac{1}{a}(R(x) - b)$
- Si $P(x)$ té grau 4, aleshores $Q(x)$ té grau 1, és a dir, $Q(x) = ax + b$ per a certs $a, b \in R$ amb $a \neq 0$ i, per tant, $P(x) = R\left(\frac{1}{a}x - b\right)$
- Si $P(x)$ i $Q(x)$ tenen ambdós grau 2 i escrivim, $Q(x)$ té grau 1, $P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ per a certs valors de $a \in R$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in C$, aleshores tenim que $P(Q(x)) = a(Q(x) - \alpha_1)(Q(x) - \alpha_2) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

Substituint $x=1, 2, 3, 4$ obtenim que els nombres $Q(1), Q(2), Q(3), Q(4)$ són iguals a α_1 o α_2 . Com Q té grau 2, no pot prendre més de dues vegades el mateix valor, aleshores dos dels nombres $Q(1), Q(2), Q(3), Q(4)$ seran iguals a α_1 i dos a α_2 . Perquè passe açò, la paràbola donada per $Q(x)$ ha de tindre el vèrtex en $x = \frac{5}{2}$, és a dir, $Q(x) = b\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + c$ per a certs valors de $b, c \in R$ amb $b \neq 0$. I, a més,

$$\alpha_1 = Q(1) = Q(4) = \frac{9}{4}b + c \text{ i } \alpha_2 = Q(2) = Q(3) = \frac{1}{4}b + c$$

Finalment, perquè el coeficient principal de $P(Q(x))$ siga igual a 1, hem d'agafar $a = \frac{1}{b^2}$, amb la qual cosa queda:

$$P(x) = \frac{1}{b^2}\left(x - \frac{9}{4}b - c\right)\left(x - \frac{1}{4}b - c\right), Q(x) = b\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + c$$

per a qualsevols $b, c \in R$ amb $b \neq 0$

8

En cada casella d'un tauler $m \times n$ es troba un nombre real. Es permet canviar tots els números d'una fila o columna tantes vegades com vulguem. Demostreu que pot aconseguir-se que les sumes dels elements de cada fila i cada columna siguin no negatives per a qualsevol configuració inicial



ALL SOVIET UNION
COMPETITION 1961. P 7

Siga S la suma total dels elements de la taula. Cada vegada que ens trobem una fila o columna amb suma negativa la canviem de signe. Cadascuna d'aquestes operacions incrementa el valor de S i, com que hi ha un nombre limitat de combinacions de signes (és menor o igual que 2^{mn} , el nombre d'eleccions de signe $\pm$ en els mn elements de la taula), aquest procés no pot continuar indefinidament, és a dir, arribem a un punt on totes les files i columnes tenen suma positiva.

9

Siga $a_1, a_2, \dots$ una PA no constant de nombres reals: Suposem que existeixen enters primers entre si $p, q > 1$ per a els que a_1^2, a_{p+1}^2 i a_{q+1}^2 són també elements de la mateixa successió. Demostreu que tots els termes de la successió són enters



Indian National
Mathematical Olympiad,
2016, problem 6

Escrivim els termes de la successió com $a_n = a_1 + (n-1)d$ per a cert $d \in \mathbb{R}$ no nul (la successió no és constant). Provarem que a_1 i d són enters, la qual cosa ens donarà el resultat que busquem. Per a això, si

$$\begin{aligned} a_{p+1}^2 &= (a_1 + pd)^2 = a_1^2 + 2pa_1d + p^2d^2 \\ a_{q+1}^2 &= (a_1 + qd)^2 = a_1^2 + 2qa_1d + q^2d^2 \end{aligned}$$

són elements de la successió i a_1^2 també ho és, aleshores $a_{p+1}^2 - a_1^2 = rd$ i $a_{q+1}^2 - a_1^2 = sd$ per a certs enters r i s . Desenvolupant aquestes diferències de quadrats arribem a les equacions:

$$\begin{cases} 2pa_1 + p^2d = r \\ 2qa_1 + q^2d = s \end{cases}$$

Podem resoldre fàcilment aquest sistema d'equacions lineals amb incògnites a_1 i d , obtenint que

$$a_1 = \frac{p^2s - q^2r}{2pq(p-q)} \quad d = \frac{qr - ps}{pq(p-q)}$$

És important observar que el sistema és compatible determinat ja que els denominadors no s'anul·len per ser p i q primers entre si (i en particular, diferents). Això prova que a_1 i d són

racionals, aleshores podem escriure com a fraccions irreductibles $a_1 = \frac{x}{y}$ i $d = \frac{z}{w}$. Provarem que $y \neq \pm 1$ i $w \neq \pm 1$ i haurem acabat.

Com a_1^2 és un element de la successió, existirà $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_1^2 = a_1 + md$, aleshores $x^2w = xyw + my^2dz$. D'ací deduïm que y divideix a x^2w i, per tant, també divideix a w (ja que x i y no tenen factors comuns). Per una altra banda, de l'equació $2pa_1 + p^2d = r$ deduïm que $2pxw + p^2yz = ryw$, aleshores w divideix a p^2y (ja que w no té factors comuns amb z).

Anàlogament, l'equació $2qa_1 + q^2d = s$ ens diu que w divideix q^2y . Per tant, w divideix a y ja que, en cas contrari, w , p^2 i q^2 tindrien algun factor comú, contradient la hipòtesi que p i q són primers entre si.

Hem demostrat que y i w es divideixen mútuament, cosa que assegura que $w = \pm y$. Aleshores, la igualtat $x^2w = xyw + my^2dz$ que ha aparegut anteriorment es reescriu com a $\pm x^2 = (\pm x + mdz)y$. Com que x i y no tenen factors comuns, ha de ser $y = \pm 1$ i, per tant, $w = \pm 1$, com volíem provar.

10 Siguen x , y i z reals distints i distints d'1 i a més:

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

demostru que les dues fraccions són iguals a $x + y + z$



Olimpiada Iberoamericana, 1985, problema 4

Restant $x + y + z$ d'ambdues expressions, obtenim la igualtat

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} - (x + y + z) = \frac{yz - x^2 - (1 - x)(x + y + z)}{1 - x} = \frac{yz + xz + xy - x - y - z}{1 - x}$$

$$\frac{xz - y^2}{1 - y} - (x + y + z) = \frac{xz - y^2 - (1 - y)(x + y + z)}{1 - y} = \frac{yz + xz + xy - x - y - z}{1 - y}$$

Com aquestes fraccions han de ser iguals però els denominadors són diferents (i diferents de zero), el numerador comú ha de ser zero, aleshores les fraccions inicials eren iguals a $x + y + z$, com volíem provar.

12

Considerem un polígon convex d'àrea A i perímetre P . Demostrar que existeix un cercle de radi A/P contingut a l'interior del polígon



ALL SOVIET UNION COMPETITION 1966, P 7

En cada costat del polígon dibuixem un rectangle amb base aquest costat i altura A/P cap a l'interior del polígon. La suma de les àrees de tots els rectangles serà igual a $P \cdot \left(\frac{A}{P}\right) = A$, però l'àrea total que cobreixen és menor que A atès que els rectangles se superposen els uns amb els altres prop dels vèrtexs del polígon. En altres paraules, els rectangles no cobreixen tot el polígon, per tant hi haurà un punt p de l'interior del polígon no cobert per cap rectangle. La distància de p a qualsevol dels costats és més gran que A/P per no pertànyer a cap rectangle i, per tant, el cercle de radi A/P centrat en p està contingut en l'interior del polígon.

13

Siga $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que la suma de totes les fraccions $1/(pq)$ on p i q són primers relatius tals que $1 \leq p < q \leq n$ i $p+q > n$ és $1/2$



Anomenarem $S(n)$ a la suma de fraccions que ens diu l'enunciat i veurem que $S(n) = \frac{1}{2}$ per inducció sobre n . En el cas inicial $n=2$, l'única fracció que compleix aquests requisits és $\frac{1}{2}$ per a $p=1$ i $q=2$, aleshores $S(2) = \frac{1}{2}$. Suposem que $S(n) = \frac{1}{2}$ per a cert $n \geq 2$ i provem que $S(n+1) = \frac{1}{2}$. Observem que les sumes $S(n)$ i $S(n+1)$ contenen els mateixos sumands excepte els següents:

Els sumands que apareixen a $S(n)$ i no a $S(n+1)$ són aquells en què $p+q = n+1$

Els sumands que apareixen a $S(n+1)$ i no a $S(n)$ són aquells en què $q = n+1$

Ara bé, cada parell (p,q) de primers relatius amb $p+q = n+1$ es poden posar en correspondència amb els parells de primers relatius $(p, n+1)$ i $(q, n+1)$. El valor total dels sumands no varia ja que

$$\frac{1}{p(n+1)} + \frac{1}{q(n+1)} = \frac{p+q}{pq(n+1)} = \frac{1}{pq}$$

Aleshores $S(n+1) = S(n) = \frac{1}{2}$ i l'enunciat queda demostrat

14 Sobre una taula hi ha 100 targetes numerades des de l'1 al 100. Es trien 25 d'elles a l'atzar, quina és la probabilitat que la suma dels números triats siga parell?



Per a cada subconjunt S de $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ podem considerar el conjunt $S' = \{101 - x : x \in S\}$ (format pels nombres de la forma $101 - x$ per a cert $x \in S$), que anomenarem el simètric de S . Direm que el conjunt S es simètric quan $S' = S$. Si S té 25 elements, aleshores $S' \neq S$ ja que, si S fora simètric, aleshores seria unió de parelles de la forma $(x, 101 - x)$ i S tindria un nombre parell d'elements (no pot passar que $x = 101 - x$ ja que x és enter). A més, les sumes dels elements de S i S' tenen distinta paritat. Per a provar açò, observem que

$$\sum_{x \in S'} x = \sum_{x \in S} (101 - x) = 25 \cdot 101 - \sum_{x \in S} x$$

I, com $25 \cdot 101$ és imparell, les sumes tenen distinta paritat.

La simetria que hem definit estableix una bijecció entre subconjunts de 25 elements (si S' és el simètric de S , llavors S és el simètric de S') i intercanvia conjunts d'elements de suma parell i els de suma imparell, com acabem de provar. En conseqüència, hi ha el mateix nombre de subconjunts de 25 elements de suma parell que de suma imparell i, per tant, la probabilitat que es demana és igual a $\frac{1}{2}$.

15 Demostreu que si $x, y \in]-1, 1[$, aleshores:

$$\frac{|x - y|}{|1 - xy|} = \frac{|x| + |y|}{1 + |xy|}$$


OME, fase local 2004, problema 7

Si x, y tenen signes oposats, tenim $|x - y| = |x| + |y|$, $|1 - xy| = 1 - xy = 1 + |xy|$.

Així, doncs, la desigualtat és, realment, una igualtat.

Si la desigualtat es compleix per a una parella de nombres (x, y) , es compleix per a la parella oposada $(-x, -y)$. Per tant, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $x, y \geq 0$.

Si la desigualtat es compleix per a una parella de nombres (x, y) , es compleix per a la parella simètrica (y, x) . Per tant, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $0 \leq y \leq x$.

En aquest cas, $x - y \geq 0$, $1 - xy > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $xy \geq 0$, i la desigualtat que hem de provar queda

$$(x - y)(1 + xy) \leq (x + y)(1 - xy).$$

Si expandim els termes, aquesta desigualtat és la mateixa que

$$x - y + x^2y - xy^2 \leq x + y - x^2y - xy^2$$

Si simplifiquem, obtenim la desigualtat equivalent

$$2x^2y \leq 2y$$

que, com que $x^2 \leq 1$, $y \geq 0$, és certa.

16 Considerem el conjunt:
 $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{1000}\}$
 Repetim el següent procés fins que
 sols quede un element en S : elegim
 dos números $x, y \in S$ i els substituïm
 pel número $x + y + xy$. Demostreu
 que el últim número no depèn dels
 números elegits en cada pas i
 calcular-lo.



Demostrarem per inducció completa sobre $n \geq 1$ que l'element que resulta de combinar els elements $x_1, \dots, x_n \in S$ està donat per

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) - 1$$

Aquesta fórmula es pot endevinar fàcilment després de fer iterar l'operació donada a l'enunciat diverses vegades (potser la part més difícil és adonar-se de la factorització).

Per a $n=1$, està clar que $x_1 = (1 + x_1) - 1$ és el nombre que s'obté de combinar un sol element (no s'ha fet cap operació). Per a $n=2$ també és cert ja que $(1 + x_1)(1 + x_2) - 1 = x_1 + x_2 + x_1x_2$ és l'operació aplicada als elements $x_1, x_2 \in S$. Aleshores suposem que la propietat és certa per a combinacions de, com a màxim, $n-1$ elements, y provem-la per a una combinació de n elements $x_1, \dots, x_n \in S$. Reordenant els subíndexs si

cal, per hipòtesi d'inducció, el nombre final resultarà d'aplicar l'operació als nombres $P_1 - 1$ i $P_2 - 1$, sent

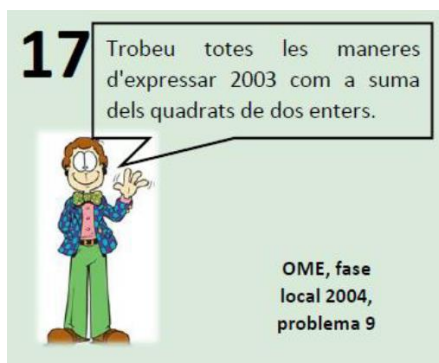
$$P_1 = (1 + x_1) \dots (1 + x_k) \text{ y } P_2 = (1 + x_{k+1}) \dots (1 + x_n).$$

Per tant, el nombre final serà

$$\begin{aligned} (P_1 - 1) + (P_2 - 1) + (P_1 - 1)(P_2 - 1) &= P_1 - 1 + P_2 - 1 - P_1 - P_2 + P_1 P_2 + 1 \\ &= P_1 P_2 - 1 = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) - 1 \end{aligned}$$

En particular, hem demostrat que aquest nombre final no depèn de les eleccions dels elements que intervenen en el procés. A més, podem calcular-ho usant la fórmula que hem demostrat:

$$(1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{1000}\right) = \frac{2}{1} \frac{3}{2} \frac{4}{3} \dots \frac{1001}{1000} = 1001$$



No és possible escriure 2003 com a suma de dos quadrats de nombres enters positius:

Tenim que, si a és enter, $a^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \pmod{4}$. Aleshores si a i b són enters,

$$a^2 + b^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 4 \end{cases} \pmod{4}.$$

Però $2003 \equiv 3 \pmod{4}$.

19 Donat un conjunt M de 1985 enters positius, cap dels quals té un divisor primer major que 26, demostreu que podem trobar 4 elements diferents de M la mitjana geomètrica dels quals és un enter



IMO, 1985, P 4

Hi ha 9 nombres primers menors o iguals que 26 (això és: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23), per la qual cosa cada nombre de M s'expressarà com a $2^{e_1} 3^{e_2} \dots 19^{e_8} 23^{e_9}$, sent $e_1, \dots, e_9$ no negatius. Si només atenem a la paritat d'aquests exponents, tenim $2^9 = 512$ possibilitats i, per tant, el principi del colomer ens diu que d'entre els 1985 enters en podem triar dos, els exponents dels quals tenen la mateixa paritat. D'entre els $1985 > 512$ restants també podem triar dos els exponents dels quals tenen la mateixa paritat, i repetir el procés extraient parelles de nombres amb aquesta propietat mentre almenys queden 512 elements restants. Com que $1985 = 513 + 2 \cdot 736$, podem obtenir fins a 736 parelles. Considerem el conjunt N format per les 736 mitjanes geomètriques d'aqueixes parelles, que són nombres enters amb divisors primers menors o iguals que 26. Ara bé, com $736 > 512$, podem trobar dues d'aquestes mitjanes els exponents de les quals tinguen la mateixa paritat usant el mateix argument del principi del colomer, aleshores hem trobat quatre nombres $a, b, c, d \in M$ tals que $\sqrt{ab}$ y $\sqrt{cd}$ són enters els exponents dels quals tenen la mateixa paritat, és a dir, $\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$ és un nombre enter.

20 Direm que una circumferència és un separador d'un conjunt de 5 punts en el pla si passa per 3 d'ells i els altres dos, un està dins i un altre està fora. Demostreu que tot conjunt de 5 punts que no conté 3 punts alienats ni 4 concíclics té exactament 4 separadors



IMO, SHORTLIST
GEOMETRY, 1999, P 2

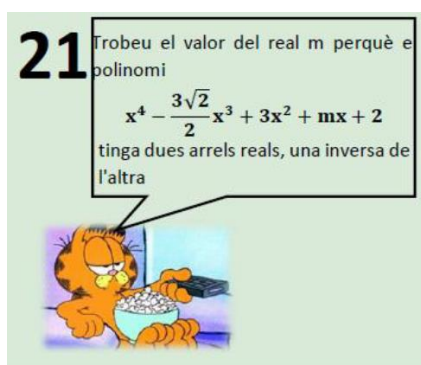
Si fem una inversió respecte d'un dels cinc punts, aquest se'n va a infinit i els altres quatre es queden al pla. Anomenem-los A, B, C i D i que els separadors (depenent de si contenen o no el centre de la inversió) es correspon amb:

- Rectes que passen per dos dels punts A, B, C, D i deixen els altres dos punts en semiplans diferents.
- Circumferències que passen per tres dels punts A, B, C, D i deixen el quart al seu interior.

Per tant, tindrem dues possibilitats. La primera és que els punts A, B, C, D siguin els vèrtexs d'un quadrilàter convex $ABCD$ (podem suposar que els vèrtexs estan en aquest ordre reanomenant-

los si cal). En aquest cas hi ha dues rectes que passen per dos d'ells i deixen els altres dos en semiplans diferents (les diagonals AC i BD) i dues circumferències que passen per tres i deixen el quart a l'interior (una de les circumferències circumscrita a ABC o ACD i una de les circumferències circumscrites a BCD o ABD). Per tant, trobem els quatre separadors buscats.

La segona possibilitat és que ABC formi un triangle i D estiga dins (després de reanomenar els vèrtexs si cal). En aquest cas, hi ha tres rectes que passen per dos dels punts i deixen els altres dos en semiplans diferents (AD, BD i CD) i una sola circumferència que passa per tres i deixa el quart a l'interior (la circumscrita al triangle ABC). En conseqüència, també hi ha només quatre separadors en aquest segon cas.



Si el polinomi té per arrels α i $\frac{1}{\alpha}$, aleshores és divisible entre $(x - \alpha)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right) = x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1$, és a dir, té un factor de la forma $x^2 + px + 1$ per a cert $p \in \mathbb{R}$. Per tant, podem factoritzar

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}}{2}x^3 + 3x^2 + mx + 2 &= (x^2 + px + 1)(x^2 + ax + b) \\ &= x^4 + (a + p)x^3 + (1 + b + ap)x^2 + (a + bp)x + b \end{aligned}$$

Igualant els termes independents tenim que $b=2$ i, igualant els coeficients de x^2 i x^3 , arribem a que $ap = 0$ i $a + p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, d'on es dedueixen fàcilment els dos possibles valors del parell (a, p) .

- Si $a = 0$ i $p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, aleshores $m = a + 2p = -3\sqrt{2}$ i la factorització queda:

$$\left(x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 1\right)(x^2 + 2)$$

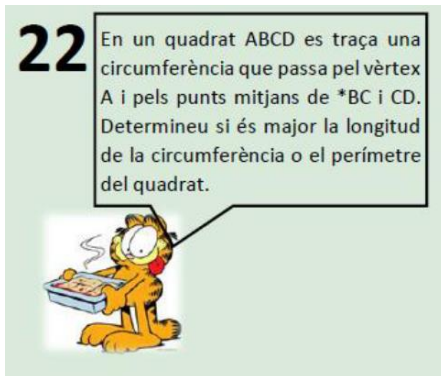
El primer factor té arrels (inverses) $\sqrt{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$, mentre que el segon factor no té arrels reals.

- Si $a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ i $p = 0$, aleshores $m = a + 2p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ i la factorització queda:

$$(x^2 + 1)\left(x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 2\right)$$

En aquest cas el primer factor no té arrels reals i el segon tampoc, ja que el determinant és $\frac{-7}{2} < 0$

Deduïm que la única solució al problema és $m = -3\sqrt{2}$



Suposem que el quadrat té costat 1 sense perdre generalitat. Sigui O el centre de la circumferència i siguin M i N els punts mitjans de BC i CD. Anomenant P al punt mitjà de MN i usant el teorema de Pitàgores es calcula fàcilment $AM = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $MP = \frac{1}{2}$ i $MN = \frac{\sqrt{2}}{4}$

A més, $AO = OM = R$, el radi de la circumferència. Per tant, el teorema de Pitàgores en els triangles rectangles AMP i OMP ens diu que:

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{8} + (R + OP)^2, \quad R^2 = OP^2 + \frac{1}{8}$$

Aquest sistema d'equacions amb incògnites OP i R es resol fàcilment, i s'obtenen com a úniques solucions positives: $OP = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $R = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

Per tant, la longitud de la circumferència és $2\pi R = \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}$, mentre que el perímetre del quadrat és 4. Com $\pi^2 < 10 < \frac{576}{50}$, calculant les arrels quadrades obtenim que $\frac{5\sqrt{2}\pi}{6} < 4$, és a dir, la longitud de la circumferència és menor que el perímetre del quadrat.

Nota: El valor de R també es dedueix de la fórmula per al radi de la circumferència circumscrita al triangle AMN, és a dir:

$$R = \frac{MN \cdot AM \cdot AN}{\sqrt{p(p-MN)(p-AM)(p-AN)}} \quad \text{on } p = \frac{1}{2}(AM + MN + AN) \text{ és el semiperímetre del triangle.}$$

23

Siga P un punt interior d'un triangle equilàter $\triangle ABC$ tal que $PA = 5$, $PB = 7$ i $PC = 8$. Trobeu la longitud d'un costat del $\triangle ABC$.



Olimpíada
Iberoamericana,
1985, problema 2

Introduïrem coordenades per resoldre el problema. Per simplificar els càlculs, tenim l'origen de coordenades en el vèrtex C i l'eix d'abscisses sobre el costat BC, de manera que els tres vèrtexs tinguin coordenades:

$$A = \left(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right), \quad B = (l, 0), \quad C = (0, 0)$$

Sent l el costat del triangle equilàter ABC. Si agafem $P = (x, y)$, les condicions donades en l'enunciat poden reescriure's com:

$$d(A, P) = 5 \rightarrow \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 = 25$$

$$d(B, P) = 7 \rightarrow (x - l)^2 + y^2 = 49$$

$$d(C, P) = 8 \rightarrow x^2 + y^2 = 64$$

Usant la tercera equació per a eliminar els quadrats de x i y en les dues primeres, podem aïllar x i y en funció de l com

$$x = \frac{l^2 + 15}{2l}, \quad y = \frac{l^2 + 63}{2\sqrt{3}l}$$

Imposant finalment que $x^2 + y^2 = 64$, obtenim l'equació

$$\left(\frac{l^2 + 15}{2l}\right)^2 + \left(\frac{l^2 + 63}{2\sqrt{3}l}\right)^2 = 64 \rightarrow l^4 - 138l^2 + 1161 = 0$$

Aquesta equació biquadrada té com a solucions positives $l = \sqrt{129}$ i $l = 3$, encara que aquesta última ha de rebutjar-se ja que el punt P ha de ser interior al triangle.

24

Siga $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters tal que l'equació $P(x) = 7$ té almenys quatre solucions enters. Demostreu que l'equació $P(x) = 14$ no té solucions enters.



Raonarem per reducció a l'absurd suposant que existeixen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ distints tals que

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = 7, \quad P(x_5) = 14$$

El polinomi $Q(x) = P(x + x_5) - 7$ també té coeficients enters i compleix que

$$Q(y_1) = Q(y_2) = Q(y_3) = Q(y_4) = 0, \quad Q(0) = 7$$

$$\text{sent } y_k = x_k - x_5 \text{ per a } k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Ara bé, usant la propietat que per a cada y_k divideix a $Q(y_k) - Q(0) = -7$ i que els nombres enters y_1, y_2, y_3, y_4 són distints, tenim que han de ser els elements del conjunt $\{1, -1, 7, -7\}$, és a dir, $Q(1) = Q(-1) = Q(7) = Q(-7) = 0$.

Per tant, el polinomi Q s'escriu com

$$Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 7)(x + 7)R(x)$$

per a cert $R(x)$ amb coeficients enters. Evaluant en $x = 0$, obtenim que $Q(0) = -49R(0)$ és múltiple de 49, la qual cosa contradueix que $Q(0) = -7$

Nota: Es pot raonar directament sobre el polinomi P ja que el fet de considerar Q simplement és per simplificar la notació.

26

Donat $k \in \mathbb{N}$, siga A_k el subconjunt de $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ format per els números que en base 2 tenen exactament tres uns i siga $f(k)$ el nombre d'elements de A_k . Demostreu que $f(k) = m$ té al menys una solució $\forall m \in \mathbb{N}$. Trobeu els $m \in \mathbb{N}$ per a els que l'equació té una única solució.



Observem que

$$A_k = \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\} \text{ i } A_{k+1} = \{k + 2, k + 3, \dots, 2k, 2k + 1, 2k + 2\}$$

tenen tots els elements en comú excepte $\{k+1, 2k+1, 2k+2\}$. Les representacions binàries de $2k+2$ i $k+1$ difereixen en un zero, aleshores tenen la mateixa quantitat d'uns. Per tant, $f(k+1) = f(k) + 1$ si la representació de $2k+1$ té tres uns (és a dir, si la representació de k té dos uns) o bé $f(k+1) = f(k)$ en cas contrari.

En particular, la funció $f(k)$ és creixent i, com existeixen infinits valors de k amb dos uns en binari i $f(1) = 0$, deduïm que $f(k)$ recorre tots els enters no negatius, és a dir, $f(k) = m$ té solució per a tot $m \geq 0$.

Perquè $f(k) = m$ tinga una única solució ha de complir-se que $f(k+1) = f(k) + 1$ i $f(k) = f(k-1) + 1$, aleshores k i $k-1$ han de tindre exactament dos uns en representació binària, és a dir $k-1 = 2^a + 2^b$ per a certs enters $0 \leq b < a$. El nombre $k = 2^a + 2^b + 1$ també ha de tindre dos uns, cosa que passa si, i sols si, $b = 0$ i $a \geq 2$. D'ací deduïm que les solucions al segon apartat són els nombres de la forma $f(2^a + 1)$ per a $a \geq 2$. Ara bé, el conjunt $A_{2^a+1} = \{2^a + 2, 2^a + 3, \dots, 2^{a+1} + 1\}$ conté $\binom{a}{2}$ elements amb tres uns (ja que es correspon amb totes les possibilitats de triar dos elements d'un conjunt de a elements, les a primeres xifres del nombre), aleshores la solució són els nombres de la forma $m = \binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$ per a $a \geq 2$

27

Siguen p i q enters tals que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}$$

Demostreu que $1979 \mid p$



IMO, 1979, PROBLEM 1

Podem simplificar l'expressió de l'enunciat de la manera següent:

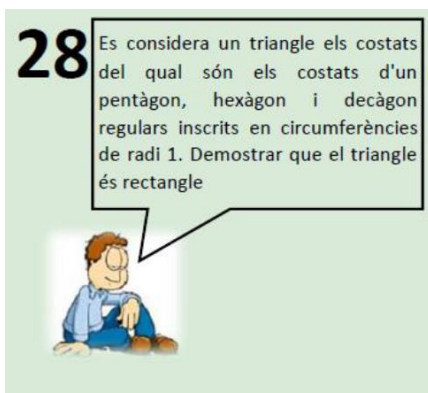
$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1319} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1319} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{659} \right) = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319} \end{aligned}$$

Ara bé, en aquesta última suma, només cal aparellar el primer element amb l'últim, el segon amb el penúltim i així successivament, de manera que arribem a la igualtat següent:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319} \right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318} \right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990} \right) = \\ &= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} \dots + \frac{1979}{989 \cdot 990} \end{aligned}$$

Com que 1979 és un nombre primer i els denominadors anteriors tenen factors menors que 1979, deduïm que p és múltiple de 1979, que és el que volíem provar.

Nota: És interessant observar que p i q bé podrien tenir factors comuns, però hem trobat una fracció $\frac{p}{q}$ tal que p és múltiple de 1979 i q no, aleshores el numerador de qualsevol fracció equivalent a $\frac{p}{q}$ serà múltiple de 1979.



El costat d'un polígon de n costats inscrit en una circumferència de ràdio unitat ve donat per $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, després el triangle que estem buscant té per costats $2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ y $2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. El triangle existirà i serà rectangle quan aquests tres números compleixin el teorema de Pitàgores. Com $2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ és més gran dels tres costats, haurà de jugar el paper de la hipotenusa, és a dir, el problema es redueix a demostrar que

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Hi ha moltes maneres de demostrar aquesta identitat usant trigonometria. Aquí comencem calculant $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ usant el pentàgon regular $A_1A_2A_3A_4A_5$ de costat l i diagonal d . Com $\angle A_4A_1A_3 = \frac{\pi}{5}$, si agafem M el punt mitjà del costat A_3A_4 , aleshores $\angle A_4A_1M = \frac{\pi}{10}$ i el triangle A_4A_1M té un angle recte en M, aleshores

$$2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = 2\frac{A_1M}{A_1A_4} = \frac{l}{d}$$

Ara bé, l i d satisfan la relació $d^2 = l^2 + ld$ (veure la nota més avall), aleshores $\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{l}{d} - 1 = 0$, és a dir, $2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ és solució de l'equació $x^2 + x - 1 = 0$. Resolent aquesta equació i quedant-nos amb la solució positiva, tenim que

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Usant ara la fórmula de l'angle doble i la identitat $\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1$, podem calcular

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 4\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)\left(1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

Ara podem calcular explícitament

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} - 4\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

Nota: Hi ha diverses formes de provar la identitat $d^2 = l^2 + ld$. Dues d'elles són les següents:

- Si P és la intersecció A_1A_3 i A_2A_5 , aleshores els triangles $A_1A_4A_3$ i A_3PA_2 són semblants (tenen costats paral·lels) i la relació $\frac{A_3A_4}{A_2P} = \frac{A_1A_4}{A_2A_3}$ es tradueix en $\frac{l}{d-l} = \frac{d}{l}$, d'on $d^2 = l^2 + ld$
- Una altra forma de provar-la és aplicar el teorema de Ptolemeu al quadrilàter $A_1A_2A_3A_4$. El producte de les diagonals és d^2 i la suma dels productes de costats oposats és $l^2 + ld$, d'on es dedueix immediatament que $d^2 = l^2 + ld$

Una altra solució:

Siga $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{10}$ un decàgon regular inscrit en una circumferència de costat l , aleshores $A_1A_3A_5A_7A_9$ és un pentàgon regular inscrit en la mateixa circumferència. Si anomenem l_5 i l_{10} a les longituds dels costats del pentàgon i el decàgon, respectivament, haurem de demostrar que $l_5^2 = 1 + l_{10}^2$ (observem que l'hexàgon regular inscrit en aquesta circumferència té costat igual al radi, igual a 1).

El teorema de Ptolemeu ens diu que en un quadrilàter cíclic el producte de les diagonals és igual a la suma dels productes dels costats oposats. Per tant

- Aplicant-lo al quadrilàter $A_1A_3A_5A_7$, obtenim que $d^2 = l_5^2 - l_5d$, on d és la diagonal del pentàgon
- Aplicant-lo al quadrilàter $A_1A_5A_6A_7$, obtenim que $l_5 = l_{10}d$, aleshores $d = \frac{l_5}{l_{10}}$

Substituint $d = \frac{l_5}{l_{10}}$ en $d^2 = l_5^2 - l_5d$, tenim que $\left(\frac{l_5}{l_{10}}\right)^2 = l_5^2 - \frac{l_5^2}{l_{10}} \Leftrightarrow l_{10}^2 = 1 + l_{10}$

El teorema de Pitàgores aplicat al triangle rectangle $A_1A_6A_7$ ens diu que $d^2 + l_{10}^2 = 4$. Substituint $d = \frac{l_5}{l_{10}}$ i usant repetidament la relació $l_{10}^2 = 1 + l_{10}$, obtenim finalment que

$$l_5^2 = l_{10}^2(4 - l_{10}^2) = (1 + l_{10})(3 - l_{10}) = 3 + 2l_{10} - l_{10}^2 = 3 + 2(l_{10}^2 - 1) - l_{10}^2 = l_{10}^2 + 1$$

29 Suposem que α i β són reals que compleixen les equacions:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0$$

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$$

Calculeu $\alpha + \beta$



Considerem la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$. Aquesta funció té per derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ i és fàcil veure que l'equació $f'(x) = 0$ no té solucions reals, la qual cosa ens indica que la funció f és estrictament creixent. En particular, α i β són els únics nombres reals tals que $f(\alpha) = 17$ i $f(\beta) = -11$. Provarem que, si $f(\alpha) = 17$, aleshores $f(2 - \alpha) = -11$ compleix la segona, la qual cosa ens indicarà que $2 - \alpha = \beta$, és a dir, $\beta + \alpha = 2$, i haurèm resolt el problema.

Evaluant $f(2 - \alpha)$ i usant que $f(\alpha) = 17$ tenim que

$$\begin{aligned} f(2 - \alpha) &= (2 - \alpha)^3 - 3(2 - \alpha)^2 + 5(2 - \alpha) \\ &= 8 - 12\alpha + 6\alpha^2 - \alpha^3 - 12 + 12\alpha - 3\alpha^2 + 10 - 5\alpha - \\ &= -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 5\alpha + 6 = -f(\alpha) + 6 = -17 + 6 = -11 \end{aligned}$$

Nota: En realitat, hem suposat que la solució és 2 i açò pot semblar molt artificial. Una forma d'arribar a aquesta solució consisteix a calcular $f(r - \alpha)$ per a cert $r \in \mathbb{R}$, la qual cosa ens porta a la identitat

$$f(r - \alpha) = (r - 2)(3 - r + r^2 - 3r\alpha + 3\alpha^2) - 11$$

Ara està clar que $r=2$ és la solució buscada.

30 Siguen x, y i z tres reals tals que:

$$0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$$

Demostreu que:

$$\frac{\pi}{2} + 2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z > \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$$


Olimpíada Iberoamericana, 1989, problema 2

Considerem un quart de circumferència on hem representat els valors de x, y, z com a angles com es mostra a la figura. Aleshores l'àrea del rectangle roig ve donada per

$$\cos(z) \sin(z) = \frac{1}{2} \sin(2z),$$

l'àrea del rectangle verd per

$$(\cos(y) - \cos(z))\sin(y) = \frac{1}{2}\sin(2y) - \sin(z)\cos(y)$$

i la del rectangle blau per

$$(\cos(x) - \cos(y))\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \sin(x)\cos(y).$$

Entre totes sumen menys que l'àrea del quart de cercle $\frac{\pi}{4}$, d'on clarament es dedueix la desigualtat de l'enunciat.

