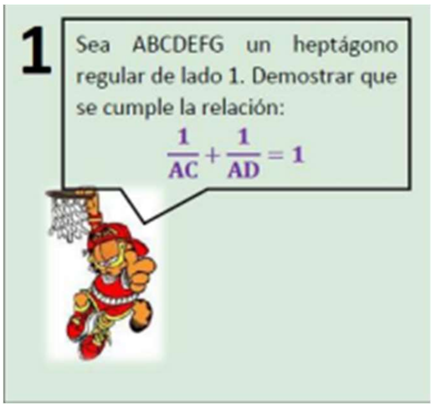
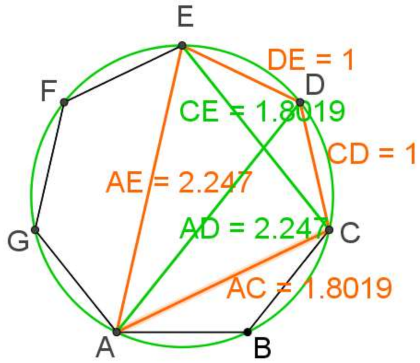
JUNIO 2023





Método 1

El cuadrilátero ACDE está inscrito en la circunferencia circunscrita al heptágono, luego el teorema de Ptolomeo nos asegura que

$$AC \cdot DE + CD \cdot AE = AD \cdot CE$$

Dado que $CD = DE = 1 \;\; y \;\; AE = AD \;\; y \;\; CE = AC$, esta igualdad se traduce en

$$AC + AD = AD \cdot AC$$

De dónde se sigue fácilmente la fórmula del enunciado dividiendo la igualdad entre $AD \cdot AC$.

Teorema de Ptolomeo

Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.

Método 2

Los ángulos interiores de un heptágono regular miden 128,57°

Como los lados del heptágono miden 1, aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC podemos obtener la longitud del lado AC:

$$AC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 128{,}57 \rightarrow AC = 1{,}8019$$

En ese triángulo, podemos calcular el ángulo en 1el vértice C usando el teorema del seno:

$$\frac{1}{sen\ C} = \frac{1{,}8019}{sen\ 128{,}57} \rightarrow sen\ C = 0{,}4339 \rightarrow C = 25{,}7154$$

Si ahora consideramos el triángulo ACD, el ángulo en C será: C=128,57 – 25,7154 = 102,8546°

Como conocemos la longitud AC y CD, aplicamos el teorema del coseno nuevamente para calcular la longitud de AD:

$$AD^2 = 1{,}8019^2 + 1^2 - 2 \cdot 1{,}8019 \cdot 1 \cdot \cos 102{,}8546 \rightarrow AD = 2{,}2469$$

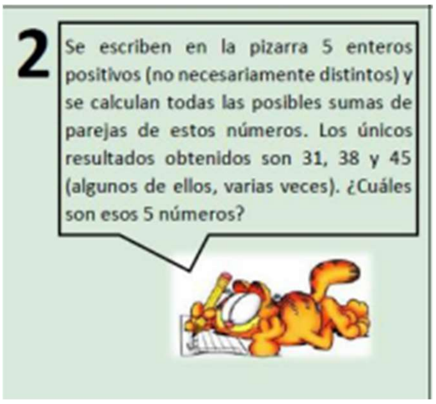
Comprobamos ahora la relación:

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{1{,}8019}+\frac{1}{2{,}2469}=1{,}000027$$

El error se debe a la pérdida de los decimales por el redondeo.

Método 3

Aunque no sea una demostración como tal, es fácil comprobar con geogebra que la relación es correcta.



Ordenemos los cinco números de menor a mayor como

$$x_1 < x_2 \leq x_3 \leq x_4 < x_5$$

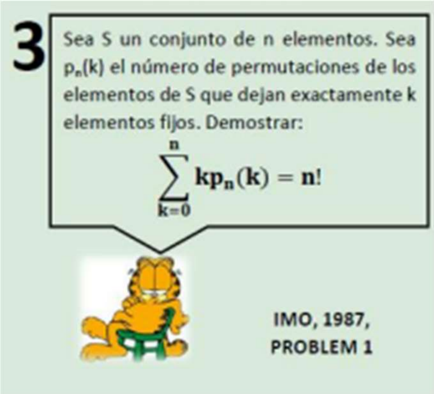
Está claro que $x_1 + x_2 = 31$ (es la menor suma) y $x_4 + x_5 = 45$ (es la mayor suman) dan números impares, luego necesariamente $x_1 \neq x_2$ y $x_4 \neq x_5$. Si $x_2 < x_3$, entonces $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_3 + x_5$ son cistintas, pero sólo hay tres resultados posibles, lo que nos cuatro sumas distintas, lo que nos dice que ha de ser $x_2 = x_3$. De la misma forma se prueba que $x_3 = x_4$ y el sistema de cinco ecuaciones

$x_1 + x_2 = 31$, $x_2 + x_3 = 38$, $x_2 + x_5 = 45$, $x_2 = x_3 = x_4$

tiene por solución única

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (12{,}19{,}19{,}19{,}26)$$

Como estos números cumplen la condición inicial, decimos que son los únicos.



La suma en cuestión simplemente cuenta el número total de puntos fijos en todas las permutaciones del conjunto. Pero para cualquier elemento k del conjunto, existen (n-1)! permutaciones que tienen k como punto fijo. Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$

Como se desea.

<u>Otra solución</u>:

Para cualquier k, si hay $\mathrm{p}_n(\mathrm{k})$ permutaciones que tienen k puntos fijos, sabemos que cada punto fijo se cuenta una vez en el producto $k \cdot \mathrm{p}_n(\mathrm{k})$

Por lo tanto, la suma dada es simplemente el número de puntos fijos entre todas las permutaciones de $\{1, \ldots\ldots, n\}$. Sin embargo, si tomamos cualquiera x tal que $1 \leq x \leq n$ y x sea un punto fijo, hay (n-1)! formas de ordenar los otros números del conjunto. Por lo tanto, nuestra suma deseada se convierte en $n \cdot (n-1)! = n!$, por lo que hemos terminado

Si α, β y γ son los tres ángulos de un triángulo, se cumple la igualdad $\alpha + \beta + \gamma = 180$ por tanto $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ por tanto:

$$tg(\gamma) = tg\big(180 - (\alpha + \beta)\big) = -tg(\alpha + \beta)$$

Utilizaremos la fórmula:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

Así desarrollamos un lado de la igualdad:

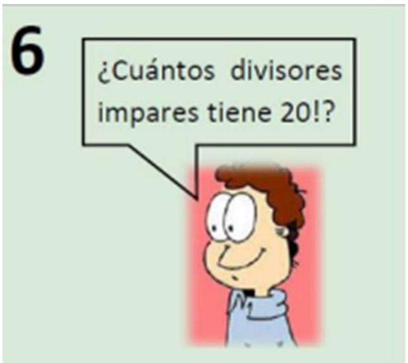
$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\big(180 - (\alpha + \beta)\big) = tg\,\alpha + tg\,\beta - tg(\alpha + \beta)$=

= $tg\,\alpha + tg\,\beta - \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{(tg\,\alpha + tg\,\beta)\cdot(1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta) - (tg\,\alpha + tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} =$

$= \frac{(tg\,\alpha + tg\,\beta) - t\ \ \alpha \cdot tg\,\beta \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta) - (tg\,\alpha + tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{-tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} =$

$$= tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot \frac{-(tg\,\alpha + tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot \big(-tg(\alpha + \beta)\big) = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma$$

Por tanto: $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma$



Vamos a calcular el número de divisores del número 20!

Descomponemos el número en factores primos:

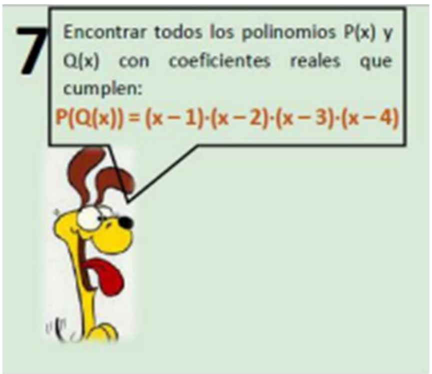
$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

El número de divisores será el producto de los exponentes de su descomposición factorial incrementados en una unidad, es decir: $19 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 16 = 41.040$

Como queremos saber cuáles son impares, de ellos tendremos que obtener todos los divisores del número:

$$3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Es decir, eliminamos aquellos divisores pares, con lo que el número de divisores impares será: $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 16 = 2160$



Observamos que el grado de P(Q(x)) es el producto de los grados de P(x) y Q(x). Llamando $R(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, como el grado de R(x) es 4, tenemos varias posibilidades:

- Si P(x) tiene grado 1, entonces $P(x) = ax + b$ para ciertos $a, b \in R\ con\ a \neq 0$ y por consiguiente $Q(x) = \frac{1}{a}(R(x) - b)$
- Si P(x) tiene grado 4, entonces Q(x) tiene grado 1, es decir , $Q(x) = ax + b$ para ciertos $a, b \in R\ con\ a \neq 0$ y por tanto, $P(x) = R\left(\frac{1}{a}x - b\right)$
- Si P(x) y Q(x) tienen ambos grado 2 y escribimos, Q(x) tiene grado 1, $P(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ para ciertos valores de $a \in R$ y $\alpha_1, \alpha_2 \epsilon C$, entonces tenemos que
$$P(Q(x)) = a(Q(x) - \alpha_1)(Q(x) - \alpha_2) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

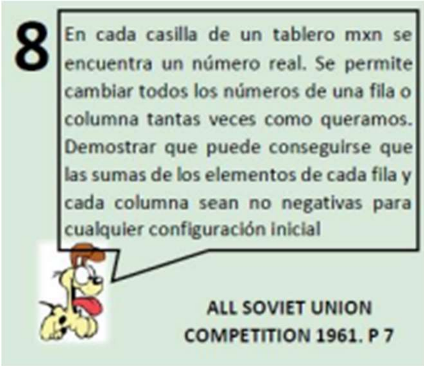
Sustituyendo x=1, 2, 3, 4 obtenemos que los números Q(1), Q(2), Q(3), Q(4) son i guales a α_1ó α_2. Como Q tiene grado 2, no puede tomar más de dos veces el mismo valor, luego dos de los números Q(1), Q(2), Q(3), Q(4) serán iguales a α_1 y dos a α_2. Para que ocurra esto, la parábola dada por Q (x) ha de tener su vértice en $x = \frac{5}{2}$, es decir $Q(x) = b\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + c$ para ciertos valores de $b, c \in R\ con\ b \neq 0$. Y además

$\alpha_1 = Q(1) = Q(4) = \frac{9}{4}b + c$ y $\alpha_2 = Q(2) = Q(3) = \frac{1}{4}b + c$

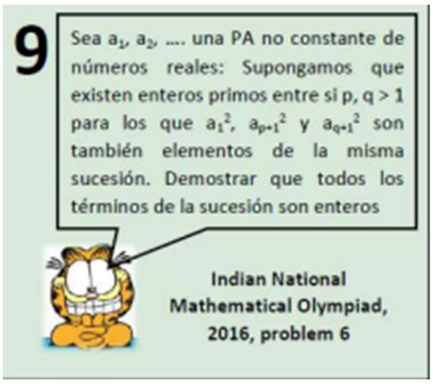
Finalmente, para que el coeficiente líder de $P(Q(x))$ sea igual a 1, tenemos que tomar $a = \frac{1}{b^2}$, con lo que queda:

$$P(x) = \frac{1}{b^2}\left(x - \frac{9}{4}b - c\right)\left(x - \frac{1}{4}b - c\right), Q(x) = b\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + c$$

$$para\ cualesquiera\ b, c \in R\ con\ b \neq 0$$



Sea S la suma total de los elementos de la tabla. Cada vez que nos encontremos una fila o columna con suma negativa la cambiamos de signo. Cada una de estas operaciones incrementa el valor de S y, como hay un número limitado de combinaciones de signos (es menor o igual que 2^{mn}, el número de elecciones de signo $\pm$ en los mn elementos de la tabla), este proceso no puede continuar indefinidamente, es decir, llegamos a un punto en el que todas las filas y columnas tienen suma positiva.



Escribamos los términos de la sucesión como $a_n = a_1$ +(n-1)d para cierto $d \in R$ no nulo (la sucesión no es constante). Probaremos que a_1 y d son enteros, lo que dará el resultado buscado. Para ello, si

$$a_{p+1}^2 = (a_1 + pd)^2 = a_1^2 + 2pa_1d + p^2d^2$$
$$a_{q+1}^2 = (a_1 + qd)^2 = a_1^2 + 2qa_1d + q^2d^2$$

Son elementos de la sucesión y a_1^2 también lo es, entonces $a_{p+1}^2 - a_1^2 = rd$ y $a_{q+1}^2 - a_1^2 = sd$ para ciertos enteros r y s. Desarrollando estas diferencias de cuadrados llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2pa_1 + p^2d = r \\ 2qa_1 + q^2d = s \end{cases}$$

Podemos resolver fácilmente este sistema de ecuaciones lineales con incógnitas a_1 y d, obteniendo que

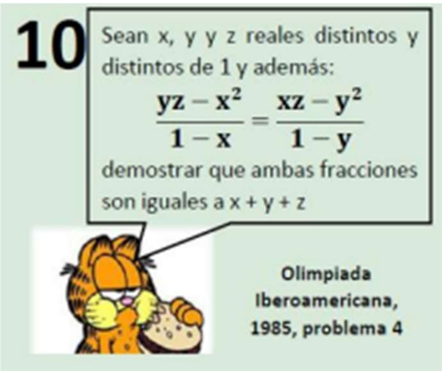
$$a_1 = \frac{p^2s - q^2r}{2pq(p-q)} \qquad d = \frac{qr-p}{pq(p-q)}$$

Es importante observar que el sistema es compatible determinado ya que los denominadores no se anulan por ser p y q primos entre si (y en particular, distintos). Esto prueba que a_1 y d son racionales, luego podemos escribir como fracciones irreducibles $a_1 = \frac{x}{y}$ y d= $\frac{z}{w}$. Probaremos que y≠±1 y w≠±1 y habremos terminado.

Como a_1^2 es un elemento de la sucesión, existirá $m \in N$ tal que $a_1^2 = a_1 + md$, luego $x^2w = xyw + my^2dz$. De aquí deducimos que y divide a x^2w luego también divide a w (ya que x e y no tienen factores comunes). Por otro lado, de la ecuación $2pa_1 + p^2d = r$ deducimos que $2pxw + p^2yz = ryw$, luego w divide a p^2y (ya que w no tiene factores comunes con z).

Análogamente, la ecuación $2qa_1 + q^2d = s$ nos dice que w divide a q^2y. Por consiguiente, w divide a y ya que, en caso contrario, w, p^2 y q^2 tendrían algún factor común, contradiciendo la hipótesis de que p y q son primos entre sí.

Hemos demostrado que y y w se dividen mutuamente, lo que asegura que w=±y. Entonces, la igualdad $x^2w = xyw + my^2dz$ que ha aparecido anteriormente se reescribe como $\pm x^2 = (\pm x + mdz)y$. Como x e y no tienen factores comunes, ha de ser y=±1 y, por lo tanto, w=±1 como queríamos probar.

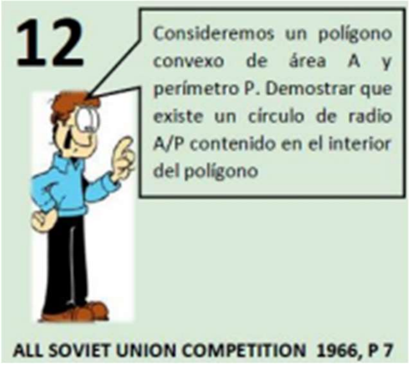


Restando $x + y + z$ de ambas expresiones, obtenemos la igualdad

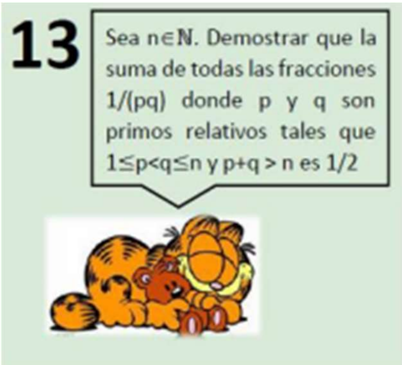
$$\frac{yz - x^2}{1 - x} - (x + y + z) = \frac{yz - x^2 - (1 - x)(x + y + z)}{1 - x} = \frac{yz + xz + xy - x - y - z}{1 - x}$$

$$\frac{xz - y^2}{1 - y} - (x + y + z) = \frac{xz - y^2 - (1 - y)(x + y + z)}{1 - y} = \frac{yz + xz + xy - x - y - z}{1 - y}$$

Como estas fracciones han de ser iguales pero los denominadores son distintos (y distintos de cero), el numerador común debe ser cero, luego las fracciones iniciales eran iguales a $x + y + z$, como queríamos probar



En cada lado del polígono dibujamos un rectángulo con base dicho lado y altura A/P hacia el interio del polígono. La suma de las áreas de todos los rectángulos será igual a $P \cdot \left(\frac{A}{P}\right) = A$, pero el área total que cubren es menor que A dado que los rectángulos se superponen unos con otros cerca de los vértices del polígono. En otras palabras, los rectángulos no cubren todo el polígono, luego existirá un punto p del interior del polígono no cubierto por ningún rectángulo. La distancia de p a cualquiera de los lados es mayor que A/P por no pertenecer a ningún rectángulo, luego el círculo de radio A/P centrado en p está contenido en el interior del polígono.



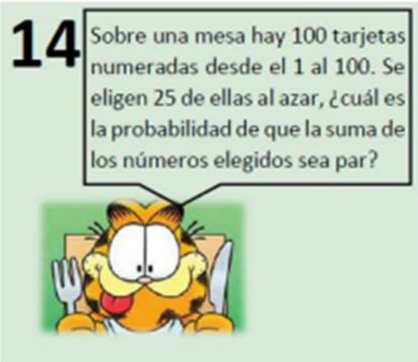
Llamaremos $S(n)$ a la suma de fracciones que nos dice el enunciado y veamos que $S(n) = \frac{1}{2}$ por inducción sobre n. En el caso inicial n=2, la única fracción que cumple esos requisitos es $\frac{1}{2}$ para p=1 y q=2, luego $S(2) = \frac{1}{2}$. Supongamos que $S(n) = \frac{1}{2}$ para cierto $n \geq 2$ y probemos que $S(n+1) = \frac{1}{2}$. Observemos quelas sumas $S(n)\ y\ S(n+1)$ contienen los mismos sumandos excepto los siguientes:

- Los sumandos que aparecen en $S(n)\ y\, no\, en\ S(n+1)$ son aquellos en que $p + q = n + 1$
- Los sumandos que aparecen en $S(n+1)\ y\, no\, en\ S(n)$ son aquellos en que $q = n + 1$

Ahora bien, cada par (p,q) de primos relativos con $p + q = n + 1$ se pueden poner en correspondencia con los pares de primos relativos $(p, n+1)\ y\ (q, n+1)$. El vaalor total de los sumandos no varía ya que

$$\frac{1}{p(n+1)}+\frac{1}{q(n+1)}=\frac{p+q}{pq(n+1)}=\frac{1}{pq}$$

Luego $S(n+1)=S(n)=\frac{1}{2}$ y el enunciado queda demostrado

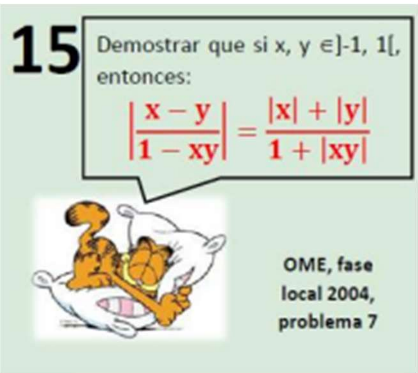


Para cada subconjunto S de $\{1,2,3,\ldots.,100\}$ podemos considerar el conjunto $S' = \{101-x : x \in S\}$ (formado por los números de la forma $101-x$ para cierto $x \in S$), que llamaremos el simétrico de S. Diremos que el conjunto S es simétrico cuando S´=S. Si S tiene 25 elementos, entonces S´≠S ya que, si S fuera simétrico entonces sería unión de pares de la forma $(x, 101-x)$ y S tendría un número par de elementos (no puede ocurrir que x=101-x ya que x es entero). Además, las sumas de los elementos de S y S´ tienen distinta paridad. Para probar esto, observemos que

$$\sum_{x\epsilon S'} x=\sum_{x\epsilon S}(101-x)=25\cdot 101-\sum_{x\epsilon S} x$$

Y, como $25\cdot 101$ es impar, las sumas tienen distinta paridad

La simetría que hemos definido establece una biyección entre subconjuntos de 25 elementos (si S´es el simétrico de S, entonces S es el simétrico de S´) e intercambia conjuntos de elementos de suma par y los de suma impar, como acabamos de probar. En consecuencia, hay el mismo número de subconjuntos de 25 elementos de suma par que de suma impar, luego la probabilidad que se pide es igual a $\frac{1}{2}$.



Si *x*, *y* tienen signos opuestos, se tiene $|x-y|=|x|+|y|, |1-xy|=1-xy=1+|xy|$.

Así pues, la desigualdad es, realmente, una igualdad.

Si la desigualdad se cumple para un par de números (*x, y*), se cumple para el par opuesto (*-x,-y*). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x, y \geq 0$.

Si la desigualdad se cumple para un par de números (*x, y*), se cumple para el par simétrico (*y, x*). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \leq y \leq x$.

En este caso, $x-y \geq 0, 1-xy > 0, x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 0,$ y la desigualdad que debemos probar queda

$$(x-y)(1+xy) \leq (x+y)(1-xy).$$

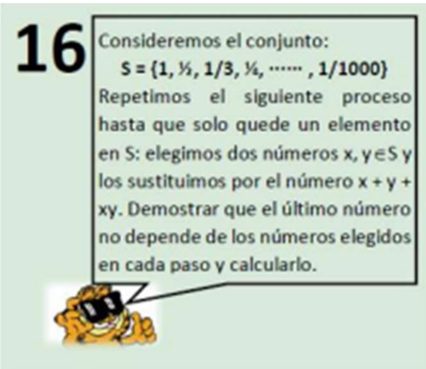
Si expandimos los términos, esta desigualdad es la misma que

$$x-y+x^2y-xy^2 \leq x+y-x^2y-xy^2$$

Si simplificamos, obtenemos la desigualdad equivalente

$$2x^2y \leq 2y$$

que, puesto que $x^2 \leq 1, y \geq 0$, es cierta.



Demostraremos por inducción completa sobre $n \geq 1$ que el elemento que resulta de combinar los elementos $x_1, \dots, x_n \in S$ está dado por

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)-1$$

Esta fórmula puede adivinarse fácilmente después de hacer iterar la operación dada en el enunciado varias veces (quizá la parte más difícil sea darse cuenta de la factorización).

Para n=1, está claro que $x_1=(1+x_1)-1$ es el número que se obtiene de combinar un solo elemento (no se ha hecho ninguna operación). Para n=2, también es cierto ya que $(1+x_1)(1+x_2)-1=x_1+x_2+x_1x_2$ es la operación aplicada a los elementos $x_1, x_2 \in S$.

Supongamos entonces que la propiedad es cierta para combinaciones de a lo sumo n-1 elementos y probémosla para una combinación de n elementos $x_1, \ldots, x_n \in S$. Reordenando los subíndices si es necesario, por hipótesis de inducción, el número final resultará de aplicar la operación a los números $P_1 - 1\ y\ P_2 - 1$, siendo

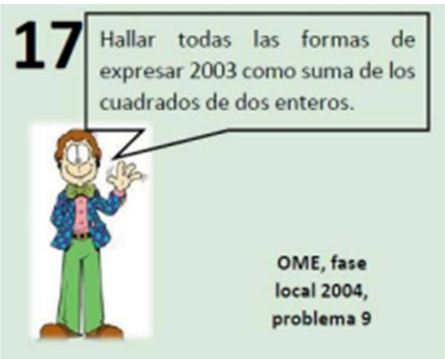
$$P_1 = (1 + x_1) \ldots (1 + x_k) \text{ y } P_2 = (1 + x_{k+1}) \ldots (1 + x_n) \text{ .}$$

Por tanto, el número final será

$$\begin{gathered}(P_1 - 1) + (P_2 - 1) + (P_1 - 1)(P_2 - 1) = P_1 - 1 + P_2 - 1 - P_1 - P_2 + P_1P_2 + 1 \\ = P_1P_2 - 1 = (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) - 1\end{gathered}$$

En particular, hemos demostrado que dicho número final no depende de las elecciones de los elementos que intervienen en el proceso. Además, podemos calcularlo usando la fórmula que hemos demostrado:

$$(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{1000}\right) = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3} \ldots \frac{1001}{1000} = 1001$$

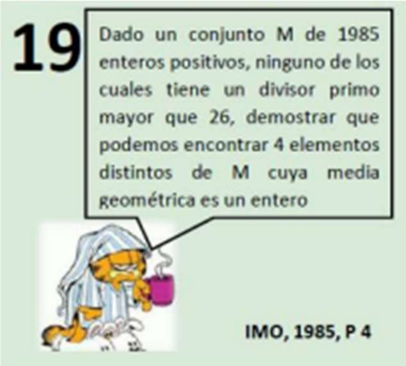


No es posible escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos:

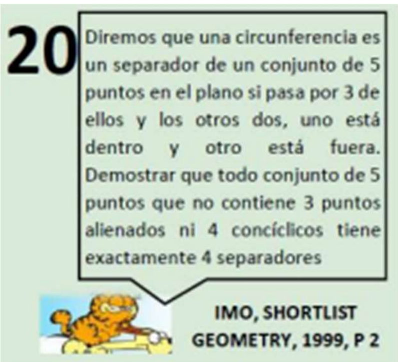
Tenemos que, si a es entero, $a^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} (\text{mod } 4)$. Luego si a y b son enteros,

$$a^2 + b^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 4 \end{cases} \ (\text{mod } 4).$$

Pero $2003 \equiv 3 \pmod{4}$.



Existen 9 números primos menores o iguales que 26 (esto son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23), por lo que cada número de M se expresará como $2^{e_1}3^{e_2}\dots 19^{e_8}23^{e_9}$, siendo $e_1,\dots,e_9$ no negativos. Si sólo atendemos a la paridad de estos exponentes, tenemos $2^9=512$ posibilidades, luego el principio del palomar nos dice que de entre los 1985 enteros podremos elegir dos de ellos cuyos exponentes tienen la misma paridad. De éntrelos 1983>512 restantes también podremos elegir dos cuyos exponentes tienen la misma paridad y repetir el proceso extrayendo parejas de números con esta propiedad mientras al menos queden 512 elementos restantes. Como $1985=513+2\cdot 736$, podemos obtener hasta 736 parejas. Consideremos el conjunto N formado por las 736 medias geométricas de tales parejas, que son números enteros con divisores primos menores o iguales que 26. Ahora bien, como $736>512$, podemos encontrar dos de estas medias cuyos exponentes tengan la misma paridad usando el mismo argumento del principio del palomar, luego hemos encontrado cuatro números $a,b,c,d\in M$ tales que$\sqrt{ab}\ y\ \sqrt{cd}$ son enteros cuyos exponentes tienen la misma paridad, esto es, $\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$ es un número entero.

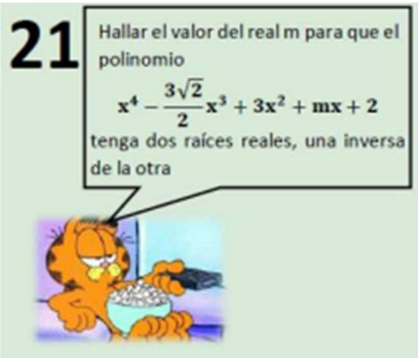


Si hacemos una inversión respecto de uno de los cinco puntos, éste se va a infinito y los otros cuatro se quedan en el plano. Llamémoslos A, B, C y D y que los separadores (dependiendo de si contienen o no el centro de la inversión) se corresponde con:

- Rectas que pasan por dos de los puntos A, B, C, D y dejan a los otros dos puntos en semiplanos distintos
- Circunferencias que pasan por tres de los puntos A, B, C, D y dejan al cuarto en su interior.

Por consiguiente, tendremos dos posibilidades. La primera de ellas es que los puntos A, B, C, D sean los vértices de un cuadrilátero convexo ABCD (podemos suponer que los vértices están en este orden renombrándolos si es necesario). En tal caso hay dos rectas que pasan por dos de ellos y dejan a los otros dos en semiplanos distintos (las diagonales AC y BD) y dos circunferencias que pasan por tres de ellos y dejan al cuarto en su interior (una de las circunferencias circunscrita a ABC ó ACD y una de las circunferencias circunscritas a BCD ó ABD). Por tanto, encontramos los cuatro separadores buscados.

La segunda posibilidad es que ABC forme un triángulo y D esté en su interior (después de renombrar los vértices si es necesario). En tal caso, hay tres rectas que pasan por dos de los puntos y dejan a los otros dos en semiplanos distintos (AD, BD y CD) y una sola circunferencia que pasa por tres de ellos y deja al cuarto en su interior (la circunscrita al triángulo ABC). En consecuencia, también hay sólo cuatro separadores en este segundo caso.



Si el polinomio tiene por raíces α y $\frac{1}{\alpha}$ entonces es divisible entre $(x-\alpha)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right) = x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1$, es decir, tiene un factor de la forma $x^2 + px + 1$ para cierto $p \in R$. Por lo tanto, podemos factorizar

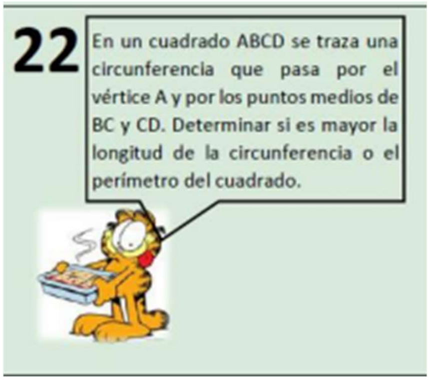
$$\frac{3\sqrt{2}}{2}x^3 + 3x^2 + mx + 2 = (x^2 + px + 1)(x^2 + ax + b)$$
$$= x^4 + (a+p)x^3 + (1 + b + ap)x^2 + (a + bp)x + b$$

Igualando los términos independientes tenemos que b=2 e igualando los coeficientes de x^2 y x^3 llegamos a que $ap = 0$ y $a + p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, de donde se deducen fácilmente los dos posibles valores del par (a, p).

- Si $a = 0$ y $p =$-$\frac{3\sqrt{2}}{2}$, entonces $m = a + 2p = -3\sqrt{2}$ y la factorización queda:
$$\left(x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 1\right)(x^2 + 2)$$
El primer factor tiene raíces (inversas) $\sqrt{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$, mientras que el segundo factor no tiene raíces reales.
- Si $a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ y $p = 0$, entonces $m = a + 2p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ y la factorización queda:
$$(x^2 + 1)\left(x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 2\right)$$

En este caso el primer factor no tiene raíces reales y el segundo tampoco, ya que su determinante es $\frac{-7}{2} < 0$

Deducimos que la única solución al problema es $m = -3\sqrt{2}$



Supongamos que el cuadrado tiene lado 1 sin perder generalidad. Sea O el centro de la circunferencia y sean M y N los puntos medios de BC y CD. Llamando P al punto medio de MN y usando el teorema de Pitágoras se calcula fácilmente $AM = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $MP = \frac{1}{2}$ y $MN = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Además, $AO = OM = R$, el radio de la circunferencia. Por lo tanto, el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos AMP y OMP nos dice que:

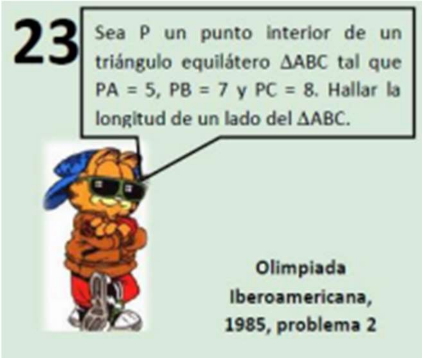
$\frac{5}{4} = \frac{1}{8} + (R + OP)^2$, $R^2 = OP^2 + \frac{1}{8}$

Este sistema de ecuaciones con incógnitas OP y R se resuelve fácilmente, obteniendo como únicas soluciones positivas: $OP = \frac{\sqrt{2}}{3}$, R= $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

Por lo tanto, la longitud de la circunferencia es $2\pi R = \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}$, mientras que el perímetro del cuadrado es 4. Como$\pi^2 < 10 < \frac{576}{50}$, tomando raíces cuadradas obtenemos que $\frac{5\sqrt{2}\pi}{6}$<4 , es decir, la longitud de la circunferencia es menor que el perímetro del cuadrado

Nota: El valor de R también se deduce de la fórmula para el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo AMN, es decir:

$R = \frac{MN \cdot AM \cdot AN}{\sqrt{p(p-MN)(p-AM)(p-AN)}}$ donde $p = \frac{1}{2}(AM + MN + AN)$ es el semiperímetro del triángulo.



Vamos a introducir coordenadas para resolver el problema. Para simplificar los cálculos, tenemos el origen de coordenadas en el vértice C y el eje de abscisas sobre el lado BC, de forma que los tres vértices tengan coordenadas:

$$A = \left(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right), \quad B = (l, 0), \quad C = (0,0)$$

Siendo l el lado del triángulo equilátero ABC. Si tomamos $P = (x, y)$, las condiciones dadas en el enunciado pueden reescribirse como:

$$d(A,P) = 5 \rightarrow \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 = 25$$

$$\mathrm{d}(B,P) = 7 \rightarrow (x-l)^2 + y^2 = 49$$

$$d(C,P) = 8 \rightarrow x^2 + y^2 = 64$$

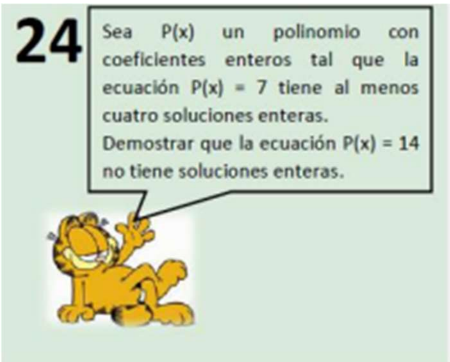
Usando la tercera ecuación para eliminar los cuadrados de x e y en las dos primeras, podemos despejar x e y en función de l como

$$x = \frac{l^2 + 15}{2l}, \quad y = \frac{l^2 + 63}{2\sqrt{3}l}$$

Imponiendo finalmente que $x^2 + y^2 = 64$, obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{l^2 + 15}{2l}\right)^2 + \left(\frac{l^2 + 63}{2\sqrt{3}l}\right)^2 = 64 \rightarrow l^4 - 138l^2 + 1161 = 0$$

Esta ecuación bicuadrada tiene como soluciones positivas $l = \sqrt{129}$ y $l = 3$, aunque ésta última debe descartarse ya que el punto P ha de ser interior al triángulo



Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existen $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, x_5\ \in R$ distintos tales que

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = 7\,, \quad P(\,x_5) = 14$$

El polinomio $Q(x) = P(\,x + x_5) - 7$ también tiene coeficientes enteros y cumple que

$$Q(y_1) = Q(y_2) = Q(y_3) = Q(y_4) = 0\,, \quad Q(0) = 7$$

siendo $y_k = x_k - x_5 \quad para\ k \in \{1,2,3,4\}$

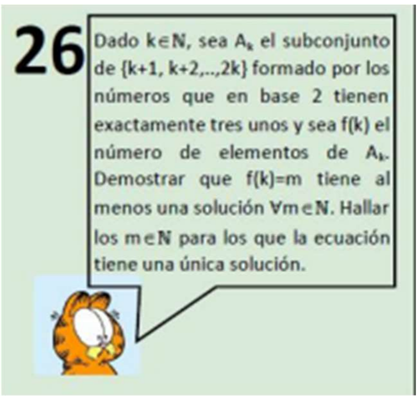
Ahora bien, usando la propiedad de que para cada y_k divide a $Q(y_k) - Q(0) = -7$ y que los números enteros $y_1\,, y_2\,, y_3\,, y_4$ son distintos, tenemos que han de ser los elementos del conjunto $\{1, -1, 7, -7\}$, es decir, $Q(1) = Q(-1) = Q(7) = Q(-7) = 0.$

Por tanto, el polinomio Q se escribe como

$$Q(x) = (x-1)(x+1)(x-7)(x+7)R(x)$$

Para cierto $R(x)$ con coeficientes enteros. Evaluando en $x = 0$, obtenemos que $Q(0) = -49R(0)$ es múltiplo de 49, contradiciendo que $Q(0) = -7$

Nota: Se puede razonar directamente sobre el polinomio P ya que el hecho de considerar Q simplemente es por simplificar la notación.



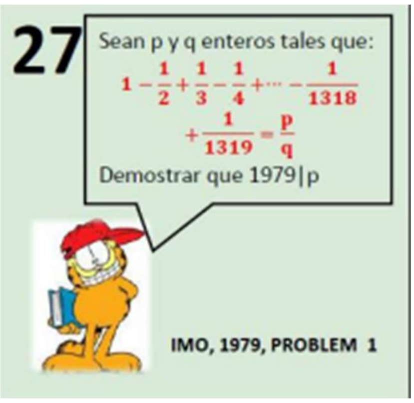
Observemos que

$$A_k = \{k+1, k+2, \dots, 2k\} \text{ y } A_{k+1} = \{k+2, k+3, \dots, 2k, 2k+1, 2k+2\}$$

tienen todos sus elementos en común salvo $\{k+1, 2k+1, 2k+2\}$. Las representaciones binarias de $2k+2$ y $k+1$ difieren en un cero, luego tienen el mismo número de unos. Por tanto, $f(k+1) = f(k)+1$ si la representación de $2k+1$ tiene tres unos (es decir, si la representación de k tiene dos unos) o bien $f(k+1) = f(k)$ en caso contrario.

En particular, la función $f(k)$ es creciente y, como existen infinitos valores de k con dos unos en binario y $f(1) = 0$, deducimos que $f(k)$ recorre todos los enteros no negativos, es decir, $f(k) = m$ tiene solución para todo$m \geq 0$.

Para que $f(k) = m$ tenga una única solución ha de cumplirse que $f(k+1) = f(k) + 1$ y $f(k) = f(k-1) + 1$, luego k y $k-1$ han de tener exactamente dos unos en representación binaria, es decir $k - 1 = 2^a + 2^b$ para ciertos enteros$0 \leq b < a$. El número $k = 2^a + 2^b + 1$ también ha de tener dos unos, lo que ocurre si, y sólo si, $b = 0$ y $a \geq 2$. De aquí deducimos que las soluciones al segundo apartado son los números de la forma $f(2^a + 1)$ para $a \geq 2$. Ahora bien, el conjunto $A_{2^a+1} = \{2^a+2, 2^a+3, \dots, 2^{a+1}+1\}$ contiene $\binom{a}{2}$ elementos con tres unos (ya que se corresponde con todas las posibilidades de elegir dos elementos de un conjunto de a elementos, las a primeras cifras del número), luego la solución son los números de la forma $m = \binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$ para $a \geq 2$



Podemos simplificar la expresión del enunciado de la siguiente forma:

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1319} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1318}\right) =$$

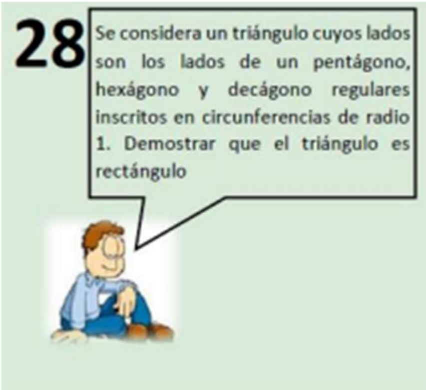
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1319} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{659}\right) = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \cdots + \frac{1}{1319}$$

Ahora bien, en esta última suma, basta emparejar el primer elemento con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente, con lo que llegamos a la siguiente igualdad

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right) =$$
$$= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} \dots + \frac{1979}{989 \cdot 990}$$

Como 1979 es un número primo y los denominadores anteriores tienen factores menores que 1979, deducimos que p es múltiplo de 1979, que es lo que queríamos probar.

Nota: Es interesante observar que p y q bien podrían tener factores comunes, pero hemos encontrado una fracción $\frac{p}{q}$ tal que p es múltiplo de 1979 y q no, luego el numerador de cualquier fracción equivalente a $\frac{p}{q}$ será múltiplo de 1979.



El lado de un polígono de n lados inscrito en una circunferencia de radio unidad viene dado por $2sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, luego el triángulo que estamos buscando tiene por lados $2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$,$2sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1\ y\ 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$. El triángulo existirá y será rectángulo cuando estos tres números cumplan el teorema de Pitágoras. Como $2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$ es mayor delos tres lados, tendrá que jugar el papel de la hipotenusa, es decir, el problema se reduce a demostrar que

$$4sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 + 4sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Hay muchas formas de demostrar esta identidad usando trigonometría. Aquí comenzamos calculando $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$ usando el pentágono regular $A_1A_2A_3A_4A_5$ de lado l y diagonal d . Como $< A_4A_1A_3 = \frac{\pi}{5}$, si tomamos M el punto medio del lado A_3A_4 , entonces $< A_4A_1M = \frac{\pi}{10}$ y el triángulo A_4A_1M tiene un ángulo recto en M, luego

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = 2\frac{A_1M}{A_1A_4} = \frac{l}{d}$$

Ahora bien, l y d satisfacen la relación $d^2 = l^2 + ld$ (véase la nota más abajo), luego $\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{l}{d} - 1 = 0$, es decir, $2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$ es solución de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$. Resolviendo eta ecuación y quedándonos con la solución positiva, tenemos que

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Usando ahora la fórmula del ángulo doble y la identidad $sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1$, podemos calcular

$$sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 4sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 4\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)\left(1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

Ahora podemos calcular explícitamente

$$4sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2} - 4\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1$$

Nota: Hay varias formas de probar la identidad $d^2 = l^2 + ld$. Dos de ellas son las siguientes:

- Si P denota la intersección $A_1A_3\ y\ A_2A_5$, entonces los triángulos regular $A_1A_4A_3\ y\ A_3PA_2$ son semejantes (tienen lados paralelos) y la relación $\frac{A_3A_4}{A_2P} = \frac{A_1A_4}{A_2A_3}$ se traduce en $\frac{l}{d-l} = \frac{d}{l}$, de donde $d^2 = l^2 + ld$
- Otra forma de probarla es aplicar el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. El producto de sus diagonales es d^2 y la suma de los productos de lados opuestos es $l^2 + ld$, de donde se deduce inmediatamente que $d^2 = l^2 + ld$

Otra solución:

Sea $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{10}$ un decágono regular inscrito en una circunferencia de lado l, luego $A_1A_3A_5A_7A_9$ es un pentágono

Regular inscrito en la misma circunferencia. Si llamamos l_5 y l_{10} a las longitudes de los lados del pentágono y el decágono, respectivamente, tendremos que demostrar que $l_5^2 = 1 + l_{10}^2$ (observemos que el hexágono regular inscrito en esta circunferencia tiene lado igual al radio igual a 1).

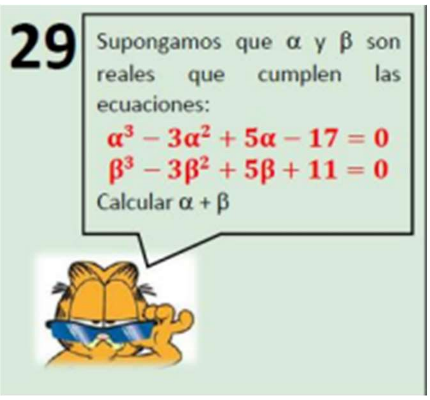
El teorema de Ptolomeo nos dice que en un cuadrilátero cíclico el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos. Por tanto

- Aplicándolo al cuadrilátero $A_1A_3A_5A_7$, obtenemos que $d^2 = l_5^2 - l_5d$, siendo d la diagonal del pentágono
- Aplicándolo al cuadrilátero $A_1A_5A_6A_7$, obtenemos que $l_5 = l_{10}d$, luego $d = \frac{l_5}{l_{10}}$

Sustituyendo $d = \frac{l_5}{l_{10}}$ en $d^2 = l_5^2 - l_5d$, tenemos que $\left(\frac{l_5}{l_{10}}\right)^2 = l_5^2 - \frac{{l_5}^2}{l_{10}} \leftrightarrow l_{10}^2 = 1 + l_{10}$

El teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $A_1A_6A_7$ nos dice que $d^2 + l_{10}^2 = 4$. Sustituyendo $d = \frac{l_5}{l_{10}}$ y usando repetidamente la relación $l_{10}^2 = 1 + l_{10}$, obtenemos finalmente que

$$l_5^2 = l_{10}^2(4 - l_{10}^2) = (1 + l_{10})(3 - l_{10}) = 3 + 2l_{10} - l_{10}^2 = 3 + 2(l_{10}^2 - 1) - l_{10}^2 = l_{10}^2 + 1$$



Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$. Esta función tiene por derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ y es fácil ver que la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene soluciones reales, lo que nos dice que la función f es estrictamente creciente. En particular, α y β son los únicos números reales tales que $f(\alpha) = 17$ y $f(\beta) = -11$. Vamos a probar que si $f(\alpha) = 17$, entonces $f(2 - \alpha) = -11$ cumple la segunda, lo que nos dirá que $2 - \alpha = \beta$, es decir, $\beta + \alpha = 2$ y habremos resuelto el problema.

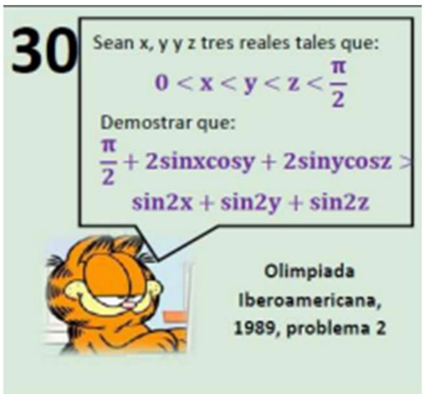
Evaluando $f(2 - \alpha)$ y usando que $f(\alpha) = 17$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(2-\alpha) &= (2-\alpha)^3 - 3(2-\alpha)^2 + 5(2-\alpha) \\ &= 8 - 12\alpha + 6\alpha^2 - \alpha^3 - 12 + 12\alpha - 3\alpha^2 + 10 - 5\alpha - \\ &= -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 5\alpha + 6 = -f(\alpha) + 6 = -17 + 6 = -11 \end{aligned}$$

Nota: En realidad, nos hemos sacado de la manga que la solución es 2 y esto puede parecer muy artificial. Una forma de llegar a que la solución es esta consiste en calcular $f(r - \alpha)$ para cierto $r \in R$, lo que nos lleva a la identidad

$$f(r - \alpha) = (r - 2)(3 - r + r^2 - 3r\alpha + 3\alpha^2) - 11$$

Ahora está claro que r=2 es la solución buscada.



Consideremos un cuarto de circunferencia donde hemos representado los valores de x, y, z como ángulos tal y como muestra la figura. Entonces, el área del rectángulo rojo está dada por

$$\cos(z)\, sen(z) = \frac{1}{2} sen(2z),$$

el área del rectángulo verde por

$$(\cos(\mathrm{y}) - \cos(z))sen(y) = \frac{1}{2}sen(2y) - sen(z)\cos(y)$$

y la del rectángulo azul por

$$(\cos(x) - \cos(y))sen(x) = \frac{1}{2}sen(2x) - sen(x)\cos(y).$$

Entre todas suman menos que el área del cuarto de círculo $\frac{\pi}{4}$, de donde claramente se deduce la desigualdad del enunciado.