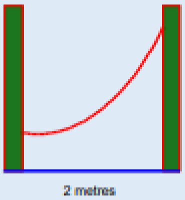
SEPTIEMBRE 2023 RESUELTOS

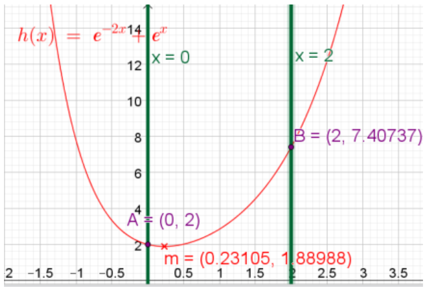
1 ggb **2**

Una cadena de metal está sujeta sobre dos muros que distan 2 metros entre ellos. La función altura es $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$, $0 \leq x \leq 2$, donde x es la distancia de un punto del suelo al muro de la izquierda.

a) Calculad a qué altura está colgada la cadena de cada muro.

b) Calculad cuál es la altura mínima de la cadena al suelo.





Solución

Construcción con geogebra

1. Introducimos en la barra de entrada la función $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$ correspondiente a la cadena.
2. Introducimos en la barra de entrada las funciones $x = 0$ y $x = 2$ de las dos paredes.
3. Para hallar la altura a que está colgada la cadena en cada muro, necesitamos la ordenada de los puntos de corte de la función h con las dos verticales. En la pared de la izquierda obtenemos 2 metros y en la de la derecha 7,40737 (teniendo en cuenta que estamos redondeando a 5 decimales).
4. Para hallar la altura mínima de la cadena al suelo, solo necesitamos la ordenada del mínimo de la función h en el intervalo [0,2]. En la barra de entrada introducimos Mínimo(h,0,2) y obtenemos el punto con ordenada 1,88988.

Resolución analítica

Para hallar la altura a la que está la cadena en las dos paredes basta sustituir x por 0 o por 2:

$$h(0) = e^{-2\cdot 0} + e^{0} = 1 + 1 = 2$$

$$h(2) = e^{-2\cdot 2} + e^{2} = \ e^{-4} + e^{2} \cong 7.40737$$

Para hallar la mínima distancia al suelo necesitamos derivar la función h e igualar a 0:

$$h'^{(x)} = -2e^{-2x} + e^{x} = 0 \ \rightarrow \ e^{x} = \frac{2}{e^{2x}} \ \rightarrow \ e^{3x} = 2 \ \rightarrow \ 3x = \ln 2 \ \rightarrow \ x = \frac{ln2}{3} \cong 0.23105$$

La altura será $h\left(\frac{ln2}{3}\right) = e^{-2\cdot\frac{ln2}{3}} + e^{\frac{ln2}{3}} \cong 1.88988$ metros.

4 5**

Unos padres y sus tres hijos plantaron árboles en el perímetro de un terreno pentagonal. Los lados miden 525 m, 240 m, 150 m, 360 m y 225 m. ¿Cuántos árboles, como mínimo, habrá plantado cada uno si la distancia entre árboles es la misma y todos plantaron la misma cantidad?

Solución

El número de árboles es el mismo y como buscamos el mínimo de árboles, esto implica la máxima separación entre ellos, por lo tanto tenemos que buscar el MCD de las distancias.

Por descomposición simultánea:

$$\begin{array}{ccccc|c} 525 & 240 & 150 & 225 & 360 & 5 \\ 105 & 48 & 30 & 45 & 72 & 3 \\ 35 & 16 & 10 & 15 & 24 & \end{array} \quad \rightarrow \text{MCD}=15$$

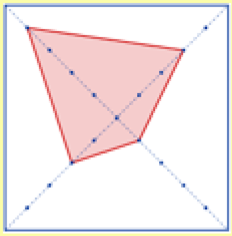
Número de árboles plantados en total = 35+16+10+15+24= 100

Número de personas =3+2 = 5

Número de árboles plantados por cada uno : 100:5= **20**

6 7**

En un cuadrado de 10 cm de lado se construye el trapezoide de la figura. Calcula la razón entre el área del trapezoide y el área del cuadrado.



Solución

El área del cuadrado es: $A_C = 10^2 = 100\ cm^2$

La diagonal del cuadrado mide: $d^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}\ cm$

La distancia entre dos puntos consecutivos de la diagonal mide: $\frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}\ cm$

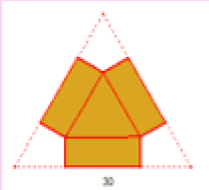
El área del cuadrilátero se puede calcular como la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos, como suma de áreas de dos triángulos con base una de las diagonales, o también, por ser las diagonales perpendiculares, como:

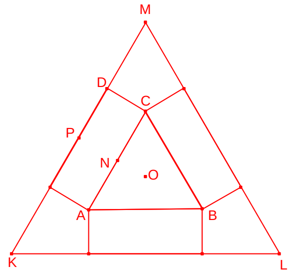
$$A_T = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25\ cm^2$$

La razón entre las áreas es: $\frac{A_T}{A_C} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

8*** **9**

Determina el volumen máximo de una caja sin tapa construida a partir de un triángulo equilátero de lado 30 cm.





Solución:

Sea $\overset{\Delta}{KLM}$ el triángulo equilátero de lado $\overline{KL} = 30$ de centro O.

La caja es un prisma regular triangular de base $\overset{\Delta}{ABC}$ y altura $\overline{CD}$

Sea $x = \overline{AC}$.

Sea P el punto medio del lado $\overline{KM}$

Sea N el punto medio del lado $\overline{AC}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{KPL}$

$$\overline{PL} = \frac{\sqrt{3}}{2} 30 = 15\sqrt{3}$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{PO} = \frac{1}{3}\overline{PL} = 5\sqrt{3}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{ANB}$

$$\overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{NO} = \frac{1}{3}\overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

La altura del prisma es:

$$\overline{CD} = \overline{PN} = \overline{PO} - \overline{NO} = \sqrt{3}\left(\frac{30 - x}{6}\right)$$

El área de la base del prisma es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

El volumen del prisma es:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\sqrt{3}\left(\frac{30 - x}{6}\right)$$

$V = \frac{1}{8}x^2(30-x), x \in [0,30]$

Para encontrar el máximo derivamos e igualamos en cero:

$V' = \frac{15}{2}x - \frac{3}{8}x^2 = 0 \;\rightarrow\; 60x - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; 3x(20-x) = 0 \;\rightarrow\; x = \begin{cases} 0 \\ 20 \end{cases}$

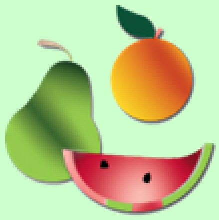
$V(0)=0$

$V(20) = \frac{1}{8}20^2(30-20) = 500$

El volumen máximo es $V_{max} = 500\ cm^3$.

11* 12

Cinco naranjas y un melón pesan lo mismo que doce peras. Cinco peras y dos naranjas pesan lo mismo que un melón. Teniendo esto en cuenta: ¿qué pesa más, una naranja o una pera?



Solución:

Sumando las dos pesadas obtendremos:

7 naranjas + 5 peras + 1 melón = 12 peras + 1 melón

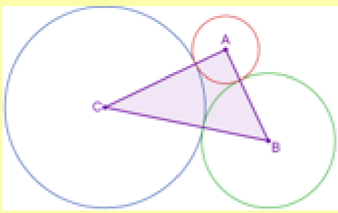
Si quitamos 5 peras y 1 melón de cada una de las igualdades tendremos:

7 naranjas = 7 peras

Por lo que una naranja pesa lo mismo que una pera.

13** 14

Se unen los centros de tres circunferencias tangentes de radios 1, 2 y 3 cm respectivamente, formando el triángulo ABC. Calcula su área.



Solución

La longitud de los lados del triángulo se obtiene sumando los radios de las circunferencias.

$a = 2+3 = 5\ cm \qquad b = 1+3 = 4\ cm \qquad c = 1+2 = 3\ cm$

Este triángulo es rectángulo, verifica el Teorema de Pitágoras: $3^2 + 4^2 = 5^2$

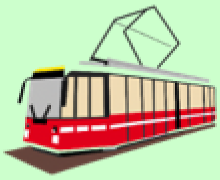
Por tanto, uno de los catetos es la base y otro de los catetos es la altura.

El área es:

$$A = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ cm^2$$

15* **16**

Nuestro grupo de amigos queremos viajar en el tranvía de Alicante a la playa de Sant Joan, somos doce entre chicas y chicos. Hay billetes de tarifa completa a 1,50 € y media tarifa a 0,75 €, Tenemos que comprar 3 billetes más de tarifa completa que de media tarifa y tenemos 17 €. ¿Cómo lo hacemos?



Solución

Es imposible.

Explicación 1:

Si separamos los tres billetes de más de tarifa completa que hemos de comprar, de los nueve restantes debemos tener la misma cantidad de tarifa completa que de media tarifa, y esto es imposible al ser 9 un número impar, de donde deducimos que el problema no tiene solución.

Explicación 2:

Si compramos un número par de billetes de tarifa completa el de los de media tarifa también tiene que ser par, porque el total ha de ser 12 billetes. De la misma manera si fuera impar la cantidad de billetes de media tarifa, los de tarifa completa también deberían ser una cantidad impar, porque la suma de los dos tipos de billetes debe ser 12.

Teniendo en cuenta lo dicho la diferencia entre estos dos números no puede ser tres. El problema no tiene solución.

18* **19**

Un tren de carga que tiene 400 metros de largo pasa por un túnel de 600 metros de largo.
Al mismo tiempo, en otra vía diferente, un tren de pasajeros 2 veces más rápido y 2 veces más corto pasa por otro túnel 3 veces más largo que el anterior.
¿Cuál de los dos trenes cruzará antes su túnel?

Solución:

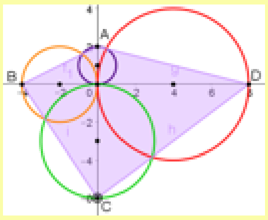
Primer tren: la distancia a franquear son 400 m + 600 m = 1000 m.

Segundo tren: 200 m + 1800 m = 2000 m.

Como la velocidad del segundo tren es el doble de la del primero, los dos trenes tardarán lo mismo en cruzar sus respectivos túneles.

20** 21

Se construyen cuatro circunferencias con los siguientes centros y radios: centro (0,1) y radio 1; centro (-2,0) y radio 2; centro (0,-3) y radio 3; centro (4,0) y radio 4. Calcula el área y el perímetro del trapezoide ABCD.



Solución

El área del trapezoide se puede calcular como la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos, como suma de áreas de dos triángulos con base una de las diagonales, o también, por ser las diagonales perpendiculares, como:

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{(2+6)\cdot(4+8)}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2} = 48\, cm^2$$

La longitud de cada lado del trapezoide la hipotenusa del triángulo rectángulo que determinan los dos extremos y el origen de coordenadas:

El perímetro es:

$$P = \sqrt{2^2+4^2} + \sqrt{4^2+6^2} + \sqrt{6^2+8^2} + \sqrt{8^2+2^2} = \sqrt{20} + \sqrt{52} + \sqrt{100} + \sqrt{68} =$$
$$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13} + 10 + 2\sqrt{17} \cong 29{,}93\ cm$$

22* 23

Un autobús de turistas visita la torre Eiffel en París. Un tercio de ellos suben por la escalera al primer piso. El resto cogen el ascensor, pero la cuarta parte de estos últimos se paran en el segundo piso a hacer fotos. Los 24 que quedan llegan al tercer y último piso.
Pasadas dos horas se encuentran todos en el autobús excepto un par que se irán por su cuenta al hotel. ¿Cuántos turistas hay ahora en el autobús?

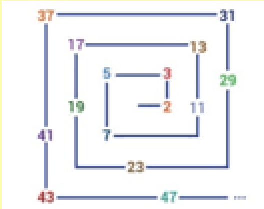
Solución:

Los 3 cuartos de 2 tercios que son la mitad llegan arriba, o sea, 24 por lo que son 48 turistas al llegar a la torre Eiffel, como dos se van por su cuenta al hotel, ahora mismo en el autobús son 46 turistas.

25**

26

Tres números son primos entre sí, y tales que el producto de los dos pequeños es 4819 y el producto de los dos grandes es 7663. ¿Cuánto suman?



Solución

Método 1

a·b=4819 y b·c=7663 → b es un divisor común de 4819 y 7663.

Los divisores comunes son divisores del MCD(4819,7663).

Calculemos el MCD con el algoritmo de Euclides:

Cocientes	1	1	1	2	3	1	2
7663	**4819**	2844	1975	869	237	158	79
Restos	2844	1975	869	237	158	79	0

De izquierda a derecha:

7663:4819 → q=1 y R=2844

4819:2844 → q= 1 y R=1975

2844:1975 → q=1 y R=869

1975: 869 → q=2 y R=237

869:237 → q=3 y R=158

237:158 → q=1 y R=79

158:79 → q=2 y R=0

MCD=79 que es primo. Luego b=79 ya que es el del medio.

a=4819:79= 61 i c=7663:79= 97

a+b+c=61+79+97= **237**

Método 2

Si dos números son primos entre sí, la fracción formada por ambos es irreducible.

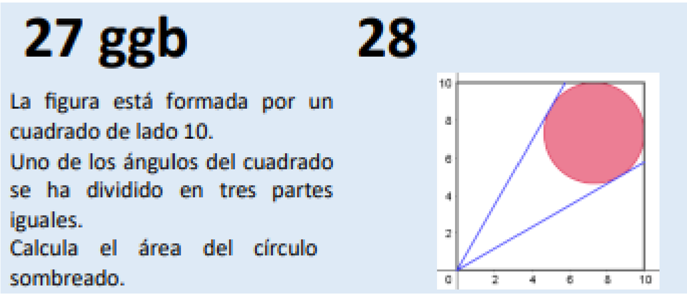
Llamemos a, b y c a los tres números ordenados de menor a mayor. Tendremos que

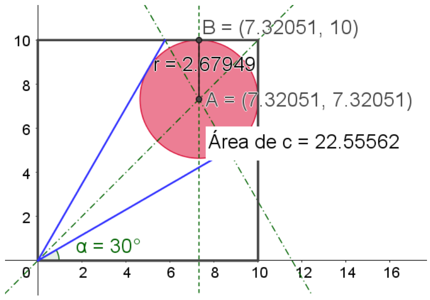
$$\begin{cases} a \cdot b = 4819 \\ b \cdot c = 7663 \end{cases}$$

La fracción $\frac{4819}{7663} = \frac{a \cdot b}{b \cdot c} = \frac{a}{c} = \frac{61}{97}$ (Simplificada con la calculadora) nos da el valor del menor y el mayor de los números buscados:

$$\begin{cases} a = 61 \\ c = 97 \end{cases} \quad como \quad a \cdot b = 4819 \quad \rightarrow \quad b = \frac{4819}{61} = 79$$

La suma será $a + b + c = 61 + 79 + 97 = 237$

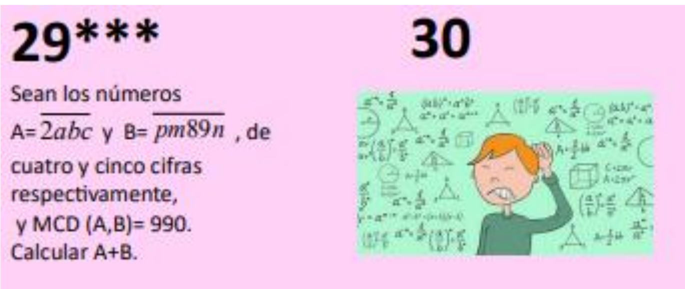




Solución

Construcción con geogebra

1. Empezamos con el cuadrado de lado 10.
2. Con la opción de definir ángulo, marcamos ángulos de 30° en el vértice inferior izquierdo.
3. Trazamos las rectas desde ese vértice y con los ángulos indicados. Con ellas conseguimos un cuadrilátero en el que está inscrita la circunferencia.
4. Para dibujar la circunferencia necesitamos el centro de esta. Se encuentra en el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del cuadrilátero.
5. Trazamos las bisectrices y hallamos el punto de intersección de ambas.
6. Por este punto trazamos una perpendicular a la base del cuadrado para conseguir el punto de la circunferencia que necesitamos para trazarla. Será la intersección de esta recta con el lado superior del cuadrado.
7. Dibujamos la circunferencia con el centro y el punto obtenidos.
8. Con la herramienta que nos permite calcular el área de la circunferencia obtendremos el resultado pedido.



Solución

$990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ → A y B son múltiplos de 9, 10 y 11

Por ser múltiplos de 10 → c=n=0

Por ser múltiplos de 9:

$\overline{2abc} = \overset{\circ}{9} \rightarrow$

2+a+b=9 $\rightarrow$ a+b=7 o bien

2+a+b=18 $\rightarrow$ a+b=16 o bien

2+a+b=27 $\rightarrow$ a+b=25 (Imposible ya que a y b son números de una cifra)

Aplicando el criterio de divisibilidad del 11:

$\overline{2abc} = \overset{\circ}{11} \rightarrow$

0+a-b-2=0 $\rightarrow$ a-b=2 o bien

0+a-b-2=11 $\rightarrow$ a-b=13 (Imposible)

Tenemos dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b &=& 7 \\ a-b &=& 2 \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{9}{2} \quad \text{(No válido)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b &=& 16 \\ a-b &=& 2 \end{array}\right\} \rightarrow a=9 \text{ y } b=7 \rightarrow A=2970$$

$\overline{pm890} = \overset{\circ}{9} \rightarrow$ Criterio de divisibilidad del 9:

p+m+8+9=9 $\rightarrow$ p+m=−8 (no válido) o bien

p+m+8+9=18 $\rightarrow$ p+m=1 o bien

p+m+8+9=27 $\rightarrow$ p+m=10 o bien

p+m+8+9=36 $\rightarrow$ p+m=19 (Imposible, recordad que p ,m son números de una cifra)

$\overline{pm890} = \overset{\circ}{11} \rightarrow$

0+8+p-9-m=0 $\rightarrow$ p-m=1

0+8+p-9-m=11 $\rightarrow$ p-m=12 (Imposible)

Tenemos dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{rcl} p+m &=& 1 \\ p-m &=& 1 \end{array}\right\} \quad p=1 \quad \text{i} \quad m=0$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p+m &=& 10 \\ p-m &=& 1 \end{array}\right\} \quad 2p=11 \quad \text{(Imposible)} \quad \rightarrow B=10890$$

A+B=2970+10890**= 13860**