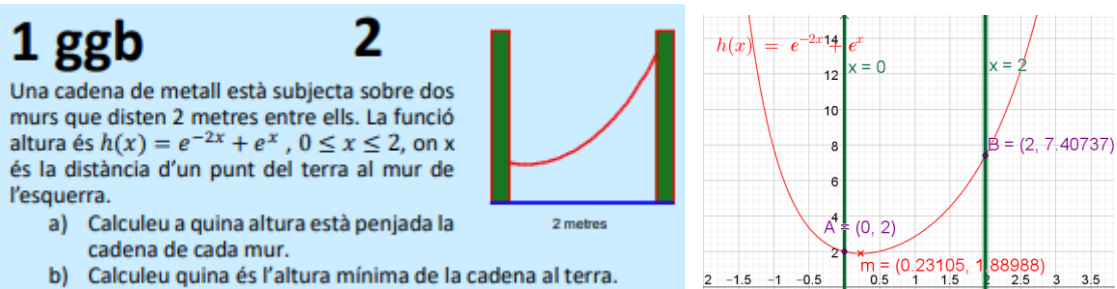


SETEMBRE 2023 RESOLTS



Solució

Construcció amb geogebra

1. Introduïm en la barra d'entrada la funció $h(x) = e^{-2x} + e^x$ corresponent a la cadena.
2. Introduïm en la barra d'entrada les funcions $x=0$ i $x=2$ de les dues parets.
3. Per a trobar l'altura a la qual està penjada la cadena en cada mur, necessitem l'ordenada dels punts de tall de la funció h amb les dues verticals. En la paret de l'esquerra obtenim 2 metres i en la de la dreta 7,40737 (tenint en compte que estem arrodonint a 5 decimals).
4. Per a trobar l'altura mínima de la cadena al sòl, només necessitem l'ordenada del mínim de la funció h en l'interval $[0,2]$. En la barra d'entrada introduïm Mínim($h,0,2$) i obtenim el punt amb ordenada 1,88988.

Resolució analítica

Per a trobar l'altura a la qual està la cadena en les dues parets prou substituir x per 0 o per 2:

$$h(0) = e^{-2 \cdot 0} + e^0 = 1 + 1 = 2$$

$$h(2) = e^{-2 \cdot 2} + e^2 = e^{-4} + e^2 \cong 7.40737$$

Per a trobar la mínima distància al sòl necessitem derivar la funció h i igualar a 0:

$$h'(x) = -2e^{-2x} + e^x = 0 \rightarrow e^x = \frac{2}{e^{2x}} \rightarrow e^{3x} = 2 \rightarrow 3x = \ln 2 \rightarrow x = \frac{\ln 2}{3} \cong 0.23105$$

$$\text{L'altura serà } h\left(\frac{\ln 2}{3}\right) = e^{-2 \cdot \frac{\ln 2}{3}} + e^{\frac{\ln 2}{3}} \cong 1.88988 \text{ metres.}$$

4****5**

Uns pares i els seus tres fills van plantar arbres en el perímetre d'un terreny pentagonal. Els costats mesuren 525 m, 240 m, 150 m, 360 m i 225 m. Quants arbres, com a mínim, haurà plantat cadascú si la distància entre arbres és la mateixa i tots van plantar la mateixa quantitat?



Solució:

El nombre d'arbres és el mateix i com busquem el mínim d'arbres això implica la màxima separació entre ells, per tant hem de buscar el MCD de les distàncies. Per descomposició simultània:

$$\begin{array}{r|l} 525 & 5 \\ 240 & 3 \\ 150 & 3 \\ 225 & 3 \\ 360 & 3 \\ \hline 105 & 3 \\ 48 & 3 \\ 30 & 3 \\ 45 & 3 \\ 72 & 3 \\ \hline 35 & 5 \\ 16 & 5 \\ 10 & 5 \\ 15 & 5 \\ 24 & 5 \end{array} \rightarrow \text{MCD}=15$$

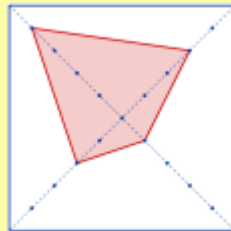
Nombre d'arbres plantats en total = $35+16+10+15+24=100$

Nombre de persones = $3+2=5$

Nombre d'arbres plantats per cadascú : $100:5=20$

6****7**

En un quadrat de 10 cm de costat es construeix el trapezoide de la figura. Calcula la raó entre l'àrea del trapezoide i l'àrea del quadrat.



Solució:

L'àrea del quadrat és: $A_C = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$

La diagonal del quadrat mesura: $d^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow d = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$

La distància entre dos punts consecutius de la diagonal mesura: $\frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2} \text{ cm}$

L'àrea del quadrilàter es pot calcular com la suma de les àrees dels quatre triangles rectangles, com a suma d'àrees de dos triangles amb base una de les diagonals, o també, per ser les diagonals perpendiculars, com:

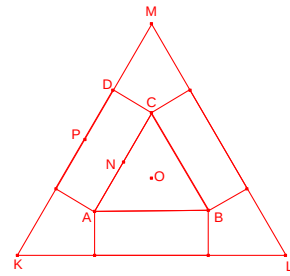
$$A_T = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

La raó entre les àrees és: $\frac{A_T}{A_C} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

8***

9

Determineu el volum màxim d'una caixa sense tapa construïda a partir d'un triangle equilàter de costat 30 cm.



Solució:

Siga $\triangle KLM$ el triangle equilàter de costat $\overline{KL} = 30$ de centre O .

La caixa és un prisma regular triangular de base $\triangle ABC$ i altura $\overline{CD}$

Siga $x = \overline{AC}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{KM}$

Siga N el punt mig del costat $\overline{AC}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KPL$

$$\overline{PL} = \frac{\sqrt{3}}{2} 30 = 15\sqrt{3}$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{PO} = \frac{1}{3} \overline{PL} = 5\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ANB$

$$\overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{NO} = \frac{1}{3} \overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{6} x$$

L'altura del prisma és:

$$\overline{CD} = \overline{PN} = \overline{PO} - \overline{NO} = \sqrt{3} \left(\frac{30 - x}{6} \right)$$

L'àrea de la base del prisma és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

El volum del prisma és:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \sqrt{3} \left(\frac{30 - x}{6} \right)$$

$$V = \frac{1}{8}x^2(30 - x), x \in [0, 30]$$

Per a trobar el màxim derivem i igualem a zero:

$$V' = \frac{15}{2}x - \frac{3}{8}x^2 = 0 \rightarrow 60x - 3x^2 = 0 \rightarrow 3x(20 - x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 20 \end{cases}$$

$$V(0) = 0$$

$$V(20) = \frac{1}{8}20^2(30 - 20) = 500$$

El volum màxim és $V_{\max} = 500 \text{ cm}^3$

11*

Cinc taronges i un meló pesen el mateix que dotze peres. Cinc peres i dues taronges pesen el mateix que un meló. Tenint això en compte: què pesa més, una taronja o una pera?

12



Solució:

Sumant les dues pesades obtindrem:

$$7 \text{ taronges} + 5 \text{ peres} + 1 \text{ meló} = 12 \text{ peres} + 1 \text{ meló}$$

Si llevem 5 peres i 1 meló de cadascuna de les igualtats tindrem:

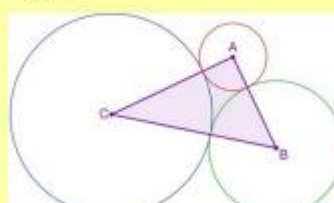
$$7 \text{ taronges} = 7 \text{ peres}$$

Pel que un taronja pes el mateix que una pera.

13**

S'uneixen els centres de tres circumferències tangents de radis 1, 2 i 3 cm respectivament, i formen el triangle ABC. Calcula la seua àrea.

14



Solució:

La longitud dels costats del triangle s'obté sumant els radis de les circumferències.

$$a = 2 + 3 = 5 \text{ cm}$$

$$b = 1 + 3 = 4 \text{ cm}$$

$$c = 1 + 2 = 3 \text{ cm}$$

Aquest triangle és rectangle, verifica el Teorema de Pitàgores:

Per tant, un dels catets és la base i un altre dels catets és l'altura.

$$\text{L'àrea és: } A = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

15*

16

La nostra colla d'amics volem viatjar en el tramvia d'Alacant a la platja de Sant Joan. En som dotze entre xiques i xics. Hi ha bitllets de tarifa completa a 1,50 € i mitja tarifa a 0,75 €. Hem de comprar 3 bitllets més de tarifa completa que de mitja tarifa i tenim 17 €. Com ho fem?



Solució

És impossible.

Explicació 1:

Si separem els tres bitllets de més de tarifa completa que hem de comprar, dels nou restants hem de tindre la mateixa quantitat de tarifa completa que de mitja tarifa, i això és impossible en ser 9 un nombre imparell, d'on deduïm que el problema no té solució.

Explicació 2:

Si comprem un nombre parell de bitllets de tarifa completa el dels de mitja tarifa també ha de ser parell, perquè el total ha de ser 12 bitllets. De la mateixa manera si fora imparella la quantitat de bitllets de mitja tarifa, els de tarifa completa també haurien de ser una quantitat imparella, perquè la suma dels dos tipus de bitllets ha de ser 12.

Tenint en compte el que s'ha dit la diferència entre aquests dos números no pot ser tres. El problema no té solució.

18*

19

Un tren de càrrega que té 400 metres de llargada passa per un túnel de 600 metres de llargada. Alhora, en una altra via diferent, un tren de passatgers 2 vegades més ràpid i 2 vegades més curt passa per un altre túnel 3 vegades més llarg que l'anterior. Quin dels dos trens travessarà abans el túnel?



Solució:

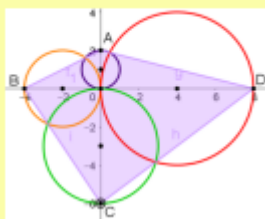
Primer tren: la distància a franquejar són $400 \text{ m} + 600 \text{ m} = 1000 \text{ m}$.

Segon tren: $200 \text{ m} + 1800 \text{ m} = 2000 \text{ m}$.

Com la velocitat del segon tren és el doble de la del primer, els dos trens tardaran el mateix a creuar els seus respectius túnels.

20**

Es construeixen quatre circumferències amb els centres i radis següents: centre (0,1) i radi 1; centre (-2,0) i radi 2; centre (0,-3) i radi 3; centre (4,0) i radi 4. Calcula l'àrea i el perímetre del trapezoide ABCD.

21**Solució:**

L'àrea del trapezoide es pot calcular com la suma de les àrees dels quatre triangles rectangles, com a suma d'àrees de dos triangles amb base una de les diagonals, o també, per ser les diagonals perpendiculars, com:

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{(2+6) \cdot (4+8)}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

La longitud de cada costat del trapezoide la hipotenusa del triangle rectangle que determinen els dos extrems i l'origen de coordenades:

El perímetre és:

$$P = \sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{4^2 + 6^2} + \sqrt{6^2 + 8^2} + \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{20} + \sqrt{52} + \sqrt{100} + \sqrt{68} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13} + 10 + 2\sqrt{17} \cong 29,93 \text{ cm}$$

22*

Un autobús de turistes visita la torre Eiffel a París. Un terç pugen per l'escala al primer pis. La resta agafen l'ascensor, però la quarta part d'aquests últims s'aturen al segon pis a fer fotos. Els 24 que queden arriben al tercer i darrer pis.

Passades dues hores es troben tots a l'autobús excepte un parell que aniran pel seu compte a l'hotel. Quants turistes hi ha ara a l'autobús?

23**Solució:**

Els 3 quarts de 2 terços que són la meitat arriben a dalt, és a dir, 24 pel que són 48 turistes en arribar a la torre Eiffel, com dues es van pel seu compte a l'hotel, ara mateix en l'autobús són 46 turistes.

25****26**

Tres nombres són primers entre si, i tals que el producte dels dos menuts és 4819 i el producte dels dos grans és 7663. Quant sumen?

**Solució:****Mètode 1**

$a \cdot b = 4819$ i $b \cdot c = 7663 \rightarrow b$ és un divisor comú de 4819 i 7663.

Els divisors comuns són divisors del MCD(4819,7663).

Calculem el MCD amb l'algoritme d'Euclides:

Quocients	1	1	1	2	3	1	2
7663	4819	2844	1975	869	237	158	79
Residus	2844	1975	869	237	158	79	0

D'esquerra a dreta:

$7663:4819 \rightarrow q=1$ i $R=2844$

$4819:2844 \rightarrow q=1$ i $R=1975$

$2844:1975 \rightarrow q=1$ i $R=869$

$1975:869 \rightarrow q=2$ i $R=237$

$869:237 \rightarrow q=3$ i $R=158$

$237:158 \rightarrow q=1$ i $R=79$

$158:79 \rightarrow q=2$ i $R=0$

MCD=79 que és primer. Luego $b=79$ ja que és el del mig

$a=4819:79=61$ i $c=7663:79=97$

$a+b+c=61+79+97=$ **237**

Mètode 2

Si dos números són primers entre si, la fracció formada per tots dos és irreductible.

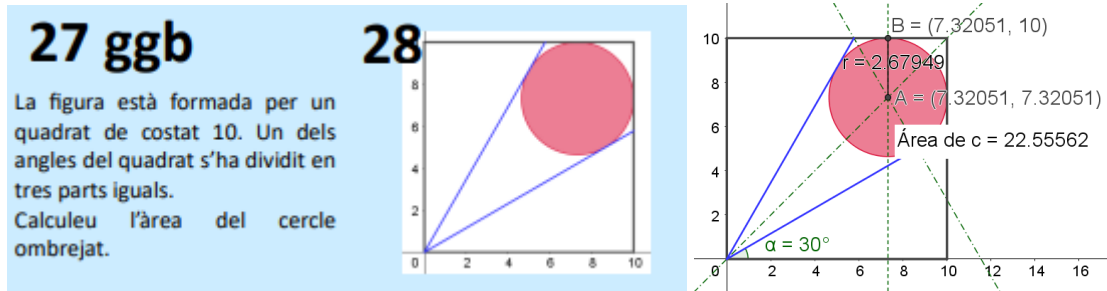
Anomenem a, b i c als tres números ordenats de menor a major.

Tindrem que
$$\begin{cases} a \cdot b = 4819 \\ b \cdot c = 7663 \end{cases}$$

La fracció $\frac{4819}{7663} = \frac{a \cdot b}{b \cdot c} = \frac{a}{c} = \frac{61}{97}$ (Simplificada amb la calculadora) ens dona el valor del menor i el major dels números buscats:

$$\begin{cases} a = 61 \\ c = 97 \end{cases} \text{ com } a \cdot b = 4819 \rightarrow b = \frac{4819}{61} = 79$$

La suma serà $a + b + c = 61 + 79 + 97 = 237$



Solució

Construcció amb geogebra

1. Comencem amb el quadrat de costat 10.
2. Amb l'opció de definir angle, marquem angles de 30° en el vèrtex inferior esquerre.
3. Tracem les rectes des d'aqueix vèrtex i amb els angles indicats. Amb elles aconseguim un quadrilàter en el qual està inscrita la circumferència.
4. Per a dibuixar la circumferència necessitem el centre d'aquesta. Es troba en el punt d'intersecció de les bisectrius dels angles del quadrilàter.
5. Tracem les bisectrius i trobem el punt d'intersecció d'ambdues.
6. Per aquest punt tracem una perpendicular a la base del quadrat per a aconseguir el punt de la circumferència que necessitem per a traçar-la. Serà la intersecció d'aquesta recta amb el costat superior del quadrat.
7. Dibuixem la circumferència amb el centre i el punt obtinguts.
8. Amb l'eina que ens permet calcular l'àrea de la circumferència obtindrem el resultat demanat.

29***

Siguen els nombres $A = \overline{2abc}$ i $B = \overline{pm89n}$, de quatre i cinc dígits respectivament, i tals que $\text{MCD}(A, B) = 990$.
Calculeu $A+B$.

30

Solució

$$990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \rightarrow A \text{ i } B \text{ són múltiples de } 9, 10 \text{ i } 11$$

$$\text{Per ser múltiples de } 10 \rightarrow c=n=0$$

Per ser múltiples de 9:

$$\overline{2abc}^{\circ} = 9 \rightarrow$$

$$2+a+b=9 \rightarrow a+b=7 \quad \text{o bé}$$

$$2+a+b=18 \rightarrow a+b=16 \quad \text{o bé}$$

$$2+a+b=27 \rightarrow a+b=25 \text{ (Impossible ja que a i b són nombres d'un dígit)}$$

Aplicant el Criteri divisibilitat del 11:

$$\overline{2abc}^{\circ} = 11 \rightarrow$$

$$0+a-b-2=0 \rightarrow a-b=2 \quad \text{o bé}$$

$$0+a-b-2=11 \rightarrow a-b=13 \text{ (Impossible)}$$

Tenim dos possibilitats:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 7 \\ a - b = 2 \end{array} \right\} \rightarrow a = \frac{9}{2} \text{ (No vàlid)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 16 \\ a - b = 2 \end{array} \right\} \rightarrow a=9 \text{ i } b=7 \rightarrow A=2970$$

$$\overline{pm890}^{\circ} = 9 \rightarrow \text{Criteri de divisibilitat del 9:}$$

$$p+m+8+9=9 \rightarrow p+m=-8 \text{ (no vàlid)} \quad \text{o bé}$$

$$p+m+8+9=18 \rightarrow p+m=1 \quad \text{o bé}$$

$$p+m+8+9=27 \rightarrow p+m=10 \quad \text{o bé}$$

$$p+m+8+9=36 \rightarrow p+m=19 \text{ (Impossible, recordar que p ,m són nombres d'un dígit)}$$

$$\overline{pm890}^{\circ} = 11 \rightarrow$$

$$0+8+p-9-m=0 \rightarrow p-m=1$$

$$0+8+p-9-m=11 \rightarrow p-m=12 \text{ (Impossible)}$$

Tenim dos possibilitats:

$$\left. \begin{array}{l} p + m = 1 \\ p - m = 1 \end{array} \right\} p=1 \text{ i } m=0$$

$$\left. \begin{array}{l} p + m = 10 \\ p - m = 1 \end{array} \right\} 2p=11 \quad \text{(Impossible)} \rightarrow B=10890$$

$$A+B=2970+10890=13860$$