Problemas octubre 2023 resueltos

2* **3**

A un torneo de tenis han asistido 60000 espectadores. Si entre el viernes y el sábado asistieron 23434, entre el miércoles y el jueves 21300, entre el sábado y el domingo 28280 y entre el jueves y el viernes 19333, ¿cuántos fueron cada día?

Solución:

Usaremos las iniciales de los días para indicar el número de espectadores de cada día. Los datos del problema quedarán como:

V+S = 23434

M+J = 21300

S+D = 28280

J+V = 19333

Si sumamos las cuatro cantidades, habremos contado una vez los espectadores del miércoles y del domingo (M y D) y dos veces los del jueves, viernes y sábado.

También sabemos que en total hubo 60000 espectadores, es decir, M+J+V+S+D = 60000

23434+21300+28280+19333=92347

De estas dos cantidades deducimos que entre el jueves, el viernes y el sábado el número de espectadores fue 92347−60000 = 32347 = J+V+S

Calculamos los de cada día:

$$\begin{cases} \mathrm{J+V+S} = 32347 \\ V+S = 23434 \end{cases} \rightarrow \quad J = 8913$$

$$\begin{cases} \mathrm{J+V+S} = 32347 \\ J+V = 19333 \end{cases} \rightarrow \quad S = 13014$$

$$\begin{cases} \mathrm{M+J} = 21300 \\ J = 8913 \end{cases} \rightarrow \quad M = 12387$$

$$\begin{cases} J+V = 19333 \\ J = 8913 \end{cases} \rightarrow \quad V = 10420$$

$$\begin{cases} S+D = 28280 \\ S = 13014 \end{cases} \rightarrow \quad D = 15266$$

4*** 5

Si A+B=15 246 y se verifica que $[MCM(A,B)]^2 = [MCD(A,B)]^3$ calcular la suma de las cifras del número más grande entre A y B.

Solución:

Sea MCD(A,B)= d $\rightarrow \begin{cases} A = \alpha \cdot d \\ B = \beta \cdot d \end{cases} \rightarrow$ MCM(A,B)= $\alpha \cdot \beta \cdot d$ $\rightarrow$

$(\alpha \cdot \beta \cdot d)^2 = d^3 \rightarrow d = (\alpha\beta)^2$

A+B = α d+ β d = $(\alpha + \beta)\,(\alpha\beta)^2 \rightarrow$

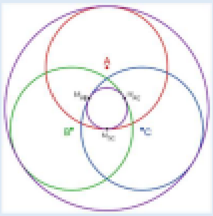
$15246 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2 = (2 \cdot 7)\,(3 \cdot 11)^2 = (3+11)\,(3 \cdot 11)^2 \rightarrow \alpha = 3$ y $\beta = 11 \rightarrow d = 33^2 = 1089$

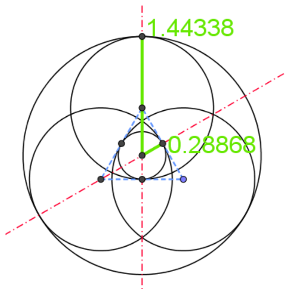
A= α d=3·1089=3267

B= β d=11·1089=11.979 $\rightarrow$ 1+1+9+7+9**= 27**

6 ggb 7

Sean A, B y C tres puntos equidistantes. Con centro en cada uno de ellos, se traza una circunferencia que pasa por el punto medio de los otros dos.
Si d(A,B)=d(A,C)=d(B,C)=1, calcula el radio de las circunferencias interior y exterior, tangentes a las tres anteriores.





Solución con geogebra:

Como los puntos A, B y C son equidistantes y con distancia 1 entre cada dos, empezamos dibujando un triángulo equilátero de lado 1.

El siguiente paso, será hallar el punto medio de cada lado.

Con esto, usando circunferencia con centro y punto podemos trazar las tres.

Al ser vértices de un triángulo equilátero, el baricentro del triángulo coincidirá con el centro de las dos circunferencias tangentes. Lo hallamos trazando las rectas por un vértice y el punto medio del lado opuesto (las rojas).

La intersección de ambas rectas será el centro.

La intersección de la recta vertical con la circunferencia superior nos da un punto de la circunferencia tangente exterior, y como ya tenemos el centro podemos dibujarla.

La circunferencia tangente interior la trazamos usando el centro hallado y el punto medio de uno de los lados del triángulo.

Para hallar la longitud de los radios, basta trazar los segmentos y ver lo que miden (en verde en el dibujo).

Redondeando a cinco decimales, el radio menor mide 0,28868 y el mayor 1,44338.

Solución analítica:

El centro de la circunferencia interior coincide con el incentro del triángulo equilátero ABC, que es igual al baricentro del triángulo.

La longitud de la mediana del triángulo es:

$$h^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2 \quad\rightarrow\quad h^2+\frac{1}{4}=1 \quad\rightarrow\quad h^2=\frac{3}{4} \quad\rightarrow\quad h=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$$

La distancia del baricentro al punto medio del lado es igual a 1/3 de la longitud de la mediana:

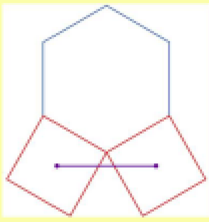
$r=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cong 0.28868$ cm.

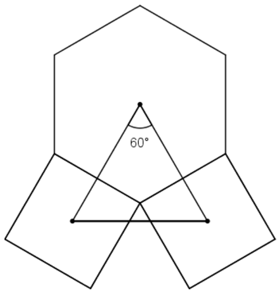
El radio de la circunferencia circunscrita es igual la altura más 2/3 de su longitud:

$R=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}\cong 1{,}44338$ cm.

9** **10**

Sobre dos lados consecutivos de un hexágono de 1 cm de lado, se construyen dos cuadrados, como se observa en la figura. Calcula la distancia entre los centros de los dos cuadrados, expresándola con raíces y fracciones.





Solución:

El triángulo de vértices el centro del hexágono y los centros de los cuadrados es equilátero. La distancia entre los centros de los cuadrados es igual a la apotema del hexágono más la mitad del lado del cuadrado.

Apotema del hexágono:

$$a_p{}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2 \quad\rightarrow\quad a_p{}^2=\frac{3}{4} \quad\rightarrow\quad a_p=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$$

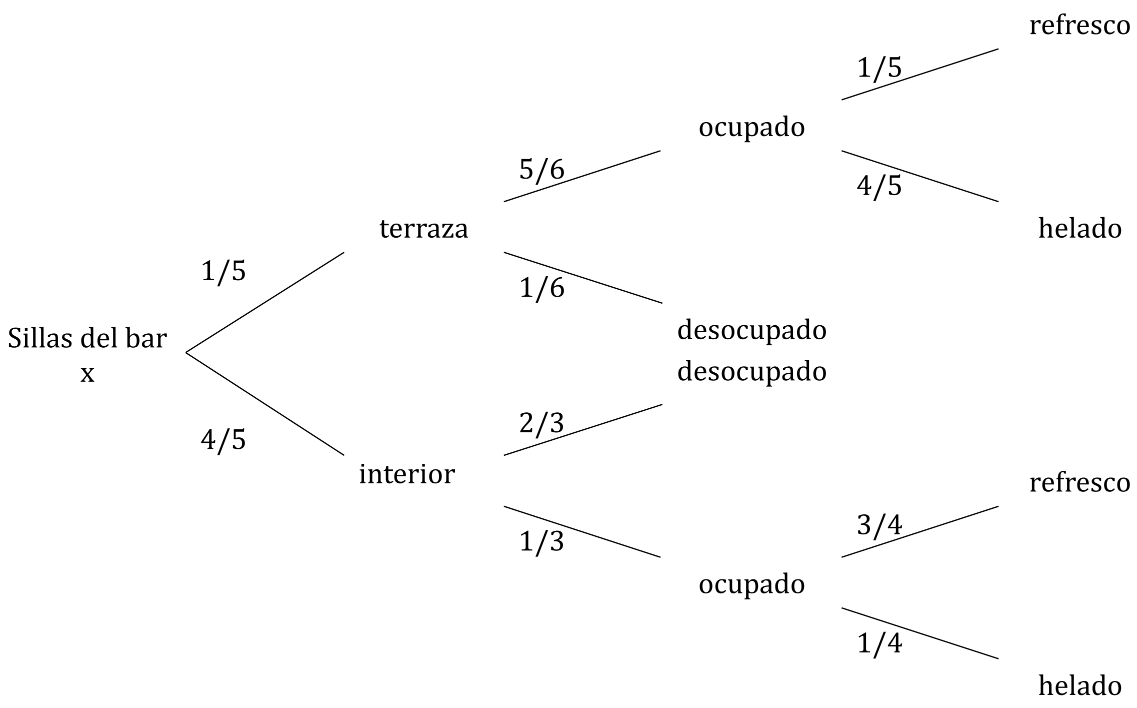
Distancia entre los centros: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cong 1{,}366$ cm.

11** 12

El bar de mi tío tiene todas las mesas con cuatro sillas alrededor. La quinta parte están en la terraza y el resto dentro. Esta tarde, se han ocupado 5/6 de las plazas de la terraza y 1/3 de las del interior. En la terraza, 1/5 de los clientes toman un refresco y el resto un helado. Dentro 1/4 toma helado y el resto refresco. Si en total se sirvieron 24 helados, ¿Cuántas mesas y sillas hay?

Solución:

Hagamos una diagrama de árbol con la información que tenemos:



Los helados servidos (24) se reparten entre la terraza y el interior, así que tendremos que sumar:

Sillas de la terraza en las que se sirvió helado: $x \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4x}{30} = \frac{2x}{15}$

Sillas del interior en las que se sirvió helado: $x \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{x}{15}$

El total de helados servidos será $\frac{2x}{15} + \frac{x}{15} = 24 \quad \rightarrow \quad 3x = 24 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad x = 120$

En total en el bar hay $x =$120 sillas , y como cada mesa tenía 4 sillas, hay 30 mesas.

13*** 14

Se lanza una moneda muchas veces seguidas. En el momento que salga Cara-Cara-Cruz gana Ana. En el momento que salga Cara-Cruz-Cruz gana Jordi. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar? ¿Por qué?

Solución:

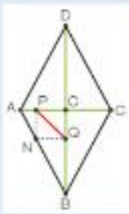
Si tiras 3 monedas que salga la combinación Cara-Cara-Cruz o que salga la combinación Cara-Cruz-Cruz es igual de probable: 1/8. Sin embargo, este problema es ligeramente distinto: la moneda se tira continuamente hasta que aparezca la combinación ganadora de alguno de los dos. En este caso, la probabilidad de que gane Ana es mayor que la de ganar Jordi, aunque parezca contraituitivo. De hecho, Ana tiene el doble de probabilidad que Jordi. Llega un momento en que sale C (cara), después de eso hay cuatro opciones:

- CCX (gana Ana)
- CCC (gana Ana, ya que tarde o temprano saldrá una Cruz)
- CXC (gana Jordi)
- CXX (volvemos a empezar de cero)

De hecho, ¿qué combinación de tres tiradas elegirías tú para ganar?

16 ggb 17

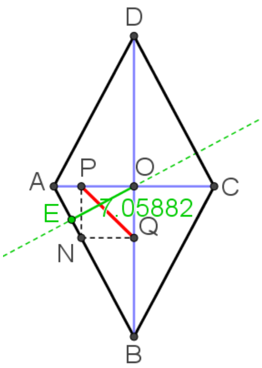
Sea el rombo ABCD tal que $\overline{AC} = 16$, $\overline{BD} = 30$. Sea N un punto del lado $\overline{AB}$. Sean P y Q las proyecciones de N sobre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Calcula la longitud mínima del segmento $\overline{PQ}$.



Solución con geogebra:

Queremos que la distancia $\overline{PQ}$ sea mínima, pero como es la diagonal de un rectángulo, da igual si minimizamos la otra: $\overline{ON}$.

Teniendo en cuenta que O es un vértice del triángulo AOB, el punto de la base que se encuentra a distancia mínima es la base de la altura correspondiente. La trazamos y medimos.



Obtenemos que la distancia mínima es 7,05882 (redondeando a cinco cifras decimales)

Solución analítica:

Sea O la intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

$\overline{OA} = 8$, $\overline{OB} = 15$.

Sea $\overline{AP} = x$.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AOB}$, $\overset{\Delta}{APN}$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$\frac{x}{8} = \frac{\overline{PN}}{15}$.

$\overline{PN} = \frac{15}{8} x$.

$\overline{OP} = 8 - x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\overline{QP} = \sqrt{\left(\frac{15}{8}x\right)^2 + (8 - x)^2}$$

$$\overline{QP} = \frac{1}{8}\sqrt{289x^2 - 1024x + 4096}$$

Consideremos la función $f(x) = 289x^2 - 1024x + 4096$.

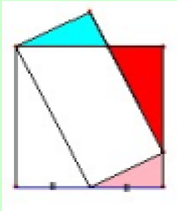
El valor mínimo del segmento $\overline{QP}$ se obtiene en el mínimo de la parábola cóncava $f(x) = 289x^2 - 1024x + 4096$

Es decir, cuando $x = \frac{1024}{2 \cdot 289} = \frac{512}{289}$.

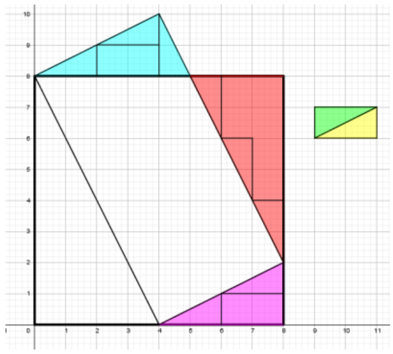
La medida del segmento mínimo es: $\overline{QP} = \sqrt{\left(\frac{15}{8} \cdot \frac{512}{289}\right)^2 + \left(8 - \frac{512}{289}\right)^2} = \frac{120}{17} \cong 7{,}05882.$

18* **19**

La figura está formada por un cuadrado y un rectángulo.
Prueba que el área del triángulo rojo es igual a la suma de las áreas del triángulo morado y del triángulo azul.



Solución cuadriculando:



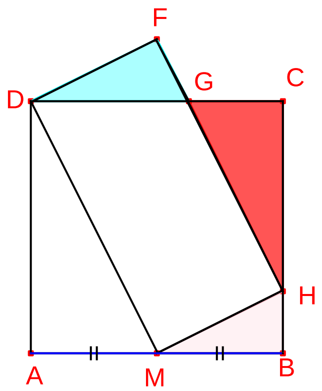
Si observamos el dibujo, veremos que el triángulo rojo está formado por 6 cuadrados enteros y tres triángulos, equivalentes cada uno de ellos a un cuadrado (como se puede ver en el rectángulo amarillo y verde del lateral: dos cuadrados descompuestos en dos triángulos), por lo que en total ocupa 9 cuadrados.
El azul ocupa dos cuadrados completos y tres triángulos equivalentes a un cuadrado, en total 5 cuadrados.
El morado dos cuadrados completos y dos triángulos, es decir, dos cuadrados más, que hacen un total de cuatro.
Si unimos los triángulos azul y morado, en total recubriremos 9 cuadrados igual que lo hace el triángulo rojo.

Solución analítica:

Sea el cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = 2$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{DAM}, \overset{\Delta}{MBH}, \overset{\Delta}{HCG}, \overset{\Delta}{DFG}$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:



$$\overline{BH} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{CH} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \overline{CG} = \frac{3}{4}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MBH}$:

$$\overline{MH} = \overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \overline{Fg} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$S_{DFG} + S_{MBH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

$$S_{HCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Entonces $S_{DFG} + S_{MBH} = S_{HCG}$

20 21**

a) ¿Cuál es el menor cubo perfecto que es divisible por 242, 7290 y 176?

b) ¿Cuál es el menor número el triple del cual es divisible por 4, 7, 25 y 56?

Solución:

a) Calculamos el mcm (242, 7290, 176):
$242=2\cdot 11^2$
$7290=2\cdot 3^6\cdot 5$
$176=2^4\cdot 11$
De donde el mcm$=2^4\cdot 3^6\cdot 5\cdot 11^2$
El número que buscamos debe ser múltiplo de este y además un cubo, para lo que necesitamos que todos los exponentes sean múltiplos de 3.
Nos faltan 2^2, 5^2 y 11 →
el número que buscamos es $N=2^4\cdot 3^6\cdot 5\cdot 11^2\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 11=2^6\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 11^3=7762392000$

b) Calculamos el mcm (4, 15, 25, 56)
$4=2^2$
$15=3\cdot 5$
$25=5^2$
$56=2^3\cdot 7$
$N=\text{mcm}(4, 15, 25, 56)= 2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7=4200$
Este número es divisible por los cuatro, pero el problema nos pide el menor cuyo triple sea divisible, y como 4200 es múltiplo de 3, el número buscado será 4200:3=1400.

23 ggb 24

Para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto han consultado a dos agencias de autobuses. La agencia A les pide 50 € por día y 1 € por km recorrido. La agencia B les pide 60 € por día más 0,80 € por km recorrido. Si piensan estar tres días de viaje, ¿con qué agencia les interesa contratar el viaje en función del número de km recorridos? ¿Hay alguna distancia en la que no importe la agencia?

Solución con geogebra:

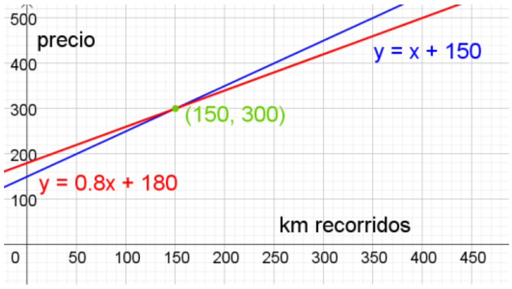
Llamaremos x al número total de kilómetros recorridos en el viaje.

La agencia A les cobrará $f(x) = 3\cdot 50 + 1\cdot x = 150 + x$,

mientras que la agencia B cobrará $g(x) = 3\cdot 60 + 0{,}80\cdot x = 180 + 0{,}8x$

Si introducimos directamente en la barra de entrada las dos funciones, nos encontraremos con que la vista gráficas no ha cambiado. Esto se debe a que las dos rectas que hemos introducido con las dos funciones no “pasan” por la ventana que tenemos abierta. Hay que cambiar el tamaño de los ejes para poder ver algo.

En azul tenemos la agencia A y en rojo la B.
El punto de intersección de ambas (150, 300) es el punto que nos indica cuando es indiferente la agencia elegida: con 150 km recorridos, ambas nos cobran 300 €.
Si el número de km recorridos es menor que 150, la agencia A nos cobrará menos, pero si pasamos de los 150 km, es preferible la agencia B.



25 ** 26

Si elegimos un número muy grande al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 7?

Solución:

Vamos a poner los números naturales uno a uno, poniendo en negrita los múltiplos de 7:

1,2,3,4,5,6,**7**,8,9,10,11,12,13,**14**,15,16,17,18,19,20,**21**,22,23,24,...

Como se puede observar, de cada 7 números, hay seis que no están en la tabla del 7 y hay uno que sí es múltiplo de 7. Por tanto, la probabilidad es 1/7.

27* 28

Mi hermano pequeño es un campeón del desorden. Es capaz de dejar su habitación hecha un desastre en apenas 15 minutos. Pero mi madre, que ya tiene práctica, consigue dejarla perfecta en 10 minutos. Hoy, como nadie podía vigilarlo mientras mi madre recogía, ha tenido que quedarse con ella. Cuando empezó a arreglar la habitación eran las 12, pero conforme mi madre arreglaba, mi hermano destrozaba. ¿A qué hora quedó la habitación ordenada?

Solución:

A las 12:30, ya que en media hora mi madre es capaz de arreglar tres habitaciones, mientras que mi hermano sólo tiene tiempo para desordenar dos.

30* **31**

En mi cumpleaños había bastantes botellas grandes de refresco, y dos tamaños de vasos. Con una botella llenamos 8 vasos pequeños o 5 vasos grandes. Si hemos usado 26 pequeños y 14 grandes, ¿cuál es el menor número de botellas que hemos abierto?

Solución:

Si con 8 vasos pequeños vaciamos una botella, para 26=3·8+2 necesitaremos 3 botellas completas y la cuarta parte de otra.

Con 5 vasos grandes tendríamos una botella, así que para 14=2·5+4 vasos necesitamos dos botellas completas y 4/5 de otra.

Si unimos los dos restos: $\frac{1}{4}+\frac{4}{5}=\frac{5+16}{20}=\frac{21}{20}=1+\frac{1}{20}$

En total, hemos necesitado 3+2+1 $+\frac{1}{20}$ =6+$\frac{1}{20}$ botellas, es decir, hemos abierto al menos 7 botellas.