

OCTUBRE 2023 RESOLTS

2*

3

A un torneig de tennis han assistit 60000 espectadors. Si entre el divendres i el dissabte van assistir 23434, entre el dimecres i el dijous 21300, entre el dissabte i el diumenge 28280 i entre el dijous i el divendres 19333, quants van ser cada dia?



Solució:

Usarem les inicials dels dies per indicar el nombre d'espectadors de cada dia. Les dades del problema quedaran com:

$$V+S = 23434$$

$$M+J = 21300$$

$$S+D = 28280$$

$$J+V = 19333$$

Si sumem les quatre quantitats, haurem comptat una vegada els espectadors del dimecres i del diumenge (M i D) i dues vegades els del dijous, divendres i dissabte.

També sabem que en total va haver-hi 60000 espectadors, és a dir, $M+J+V+S+D = 60000$

$$23434+21300+28280+19333=92347$$

D'estes dues quantitats deduïm que entre el dijous, el divendres i el dissabte el nombre d'espectadors va ser $92347-60000 = 32347 = J+V+S$

Calculem els de cada dia:

$$\begin{cases} J+V+S = 32347 \\ V+S = 23434 \end{cases} \rightarrow J = 8913$$

$$\begin{cases} J+V+S = 32347 \\ J+V = 19333 \end{cases} \rightarrow S = 13014$$

$$\begin{cases} M+J = 21300 \\ J = 8913 \end{cases} \rightarrow M = 12387$$

$$\begin{cases} J+V = 19333 \\ J = 8913 \end{cases} \rightarrow V = 10420$$

$$\begin{cases} S+D = 28280 \\ S = 13014 \end{cases} \rightarrow D = 15266$$

4*****5**

Si $A+B=15\,246$ i es verifica que $[MCM(A,B)]^2 = [MCD(A,B)]^3$ calcular la suma de les xifres del número més gran entre A i B.

**Solució:**

$$\text{Siga } MCD(A,B)=d \rightarrow \begin{cases} A = \alpha \cdot d \\ B = \beta \cdot d \end{cases} \rightarrow MCM(A,B)=\alpha \cdot \beta \cdot d \rightarrow$$

$$(\alpha \cdot \beta \cdot d)^2 = d^3 \rightarrow d = (\alpha \beta)^2$$

$$A+B = \alpha d + \beta d = (\alpha + \beta) (\alpha \beta)^2 \rightarrow$$

$$15246 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2 = (2 \cdot 7) (3 \cdot 11)^2 = (3+11) (3 \cdot 11)^2 \rightarrow \alpha = 3 \text{ y } \beta = 11 \rightarrow d = 33^2 = 1089$$

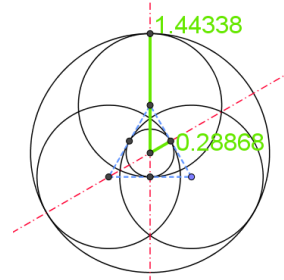
$$A = \alpha d = 3 \cdot 1089 = 3267$$

$$B = \beta d = 11 \cdot 1089 = 11.979 \rightarrow 1+1+9+7+9 = \mathbf{27}$$

6 ggb**7**

Siguen A, B i C tres punts equidistants. Amb centre en cadascun d'ells, es traça una circumferència que passa pel punt mitjà dels altres dos.

Si $d(A,B)=d(A,C)=d(B,C)=1$, calcula el radi de les circumferències interior i exterior, tangents a les tres anteriors.

**Solució amb geogebra:**

Com els punts A, B i C són equidistants i amb distància 1 entre cada dos, comencem dibuixant un triangle equilàter de costat 1.

El següent pas serà trobar el punt mitjà de cada costat.

Amb això, usant circumferència amb centre i punt podem traçar les tres.

En ser vèrtexs d'un triangle equilàter, el baricentre del triangle coincidirà amb el centre de les dues circumferències tangents. Ho trobem traçant les rectes per un vèrtex i el punt mitjà del costat oposat (les roges).

La intersecció de totes dues rectes serà el centre.

La intersecció de la recta vertical amb la circumferència superior ens dona un punt de la circumferència tangent exterior i, com ja tenim el centre, podem dibuixar-la.

La circumferència tangent interior la tracem usant el centre trobat i el punt mitjà d'un dels costats del triangle.

Per trobar la longitud dels radis, basta traçar els segments i veure el que mesuren (en verd en el dibuix).

Arredonint a cinc decimals, el radi menor mesura **0,28868** i el major **1,44338**.

Solució analítica:

El centre de la circumferència interior coincideix amb l'incentre del triangle equilàter ABC, que és igual al baricentre del triangle.

La longitud de la mitjana del triangle és:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \rightarrow h^2 + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

La distància del baricentre al punt mitjà del costat és igual a 1/3 de la longitud de la mitjana:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cong 0.28868 \text{ cm.}$$

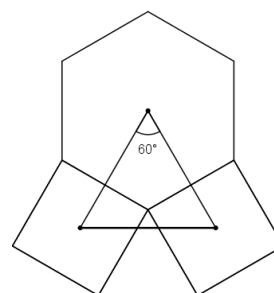
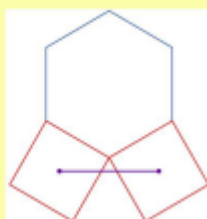
El radi de la circumferència circumscrita és igual a l'altura més 2/3 de la seua longitud:

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \cong 1,44338 \text{ cm.}$$

9**

10

Sobre dos costats consecutius d'un hexàgon d'1 cm de costat, es construeixen dos quadrats, com s'observa en la figura. Calcula la distància entre els centres dels dos quadrats, expressant-la amb arrels i fraccions.



Solució:

El triangle de vèrtexs el centre de l'hexàgon i els centres dels quadrats és equilàter. La distància entre els centres dels quadrats és igual a l'apotema de l'hexàgon més la meitat del costat del quadrat.

$$\text{Apotema de l'hexàgon: } a_p^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \rightarrow a_p^2 = \frac{3}{4} \rightarrow a_p = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

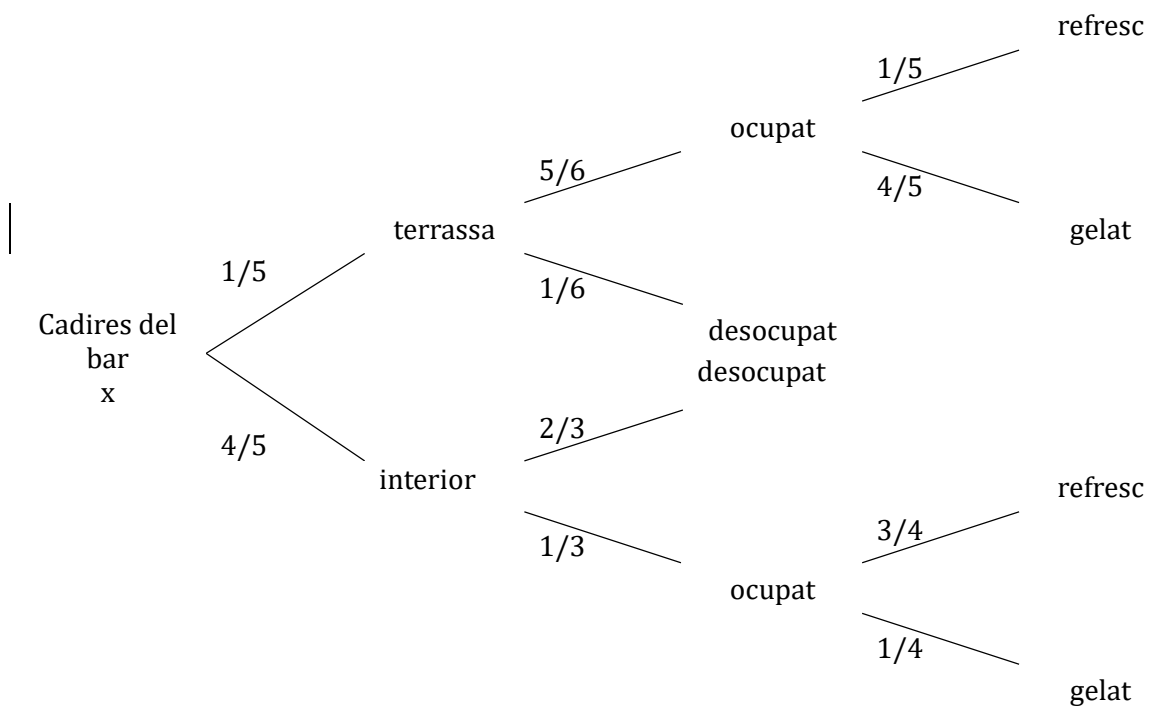
$$\text{Distància entre els centres: } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cong 1,366 \text{ cm.}$$

11****12**

El bar del meu oncle té totes les taules amb quatre cadires al voltant. La cinquena part són a la terrassa i la resta dins. Aquesta vesprada, s'han ocupat $\frac{5}{6}$ de les places de la terrassa i $\frac{1}{3}$ de les de l'interior. A la terrassa, $\frac{1}{5}$ dels clients prenen un refresc i la resta un gelat. Dins $\frac{1}{4}$ presa gelat i la resta refresque. Si en total es van servir 24 gelats, Quantes taules i cadires hi ha?

Solució:

Fem una diagrama d'arbre amb la informació que tenim:



Els gelats servits (24) es reparteixen entre la terrassa i l'interior, així que haurem de sumar:

$$\text{Cadires de la terrassa en les quals es va servir gelat: } x \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4x}{30} = \frac{2x}{15}$$

$$\text{Cadires de l'interior en les quals es va servir gelat: } x \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{x}{15}$$

$$\text{El total de gelats servits serà } \frac{2x}{15} + \frac{x}{15} = 24 \rightarrow 3x = 24 \cdot 15 \rightarrow x = 120$$

En total en el bar hi ha $x=120$ cadires, i, com cada taula tenia 4 cadires, hi ha 30 taules.

13*****14**

Es llança una moneda moltes vegades seguides. En el moment que isca Cara-Cara-Cruz guanya Ana. En el moment que isca Cara-Cruz-Cruz guanya Jordi. Qui té més probabilitat de guanyar? Per què?

**Solució:**

Si llances 3 monedes que isca la combinació Cara-Cara-Creu o que isca la combinació Cara-Creu-Creu és igual de probable: $1/8$. Però, aquest problema és lleugerament distint: la moneda es llança continuament fins que aparega la combinació guanyadora de algú dels dos. En aquest cas, la probabilitat que guanyi Ana és major que la de guanyar Jordi, encara que parega contraituitiu. De fet, Ana té el doble de probabilitat que Jordi. Arriba un moment que ix C (cara), després d'això hi ha quatre opcions:

- CCX (guanya Ana)
- CCC (guanya Ana, ja que tard o d'hora ixirà una Creu)
- CXC (guanya Jordi)
- CXX (tornem a començar de zero)

De fet, quina combinació de tres tirades triaries tu per guanyar?

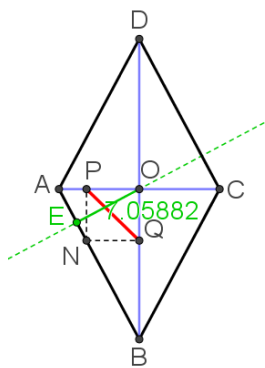
16 ggb**17**

Siga el rombe ABCD tal que $\overline{AC} = 16$, $\overline{BD} = 30$. Siga N un punt del costat $\overline{AB}$. Siguen P i Q les projeccions de N sobre les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ respectivament. Calcula la longitud mínima del segment $\overline{PQ}$.

**Solució amb geogebra:**

Volem que la distància $\overline{PQ}$ siga mínima, però, com és la diagonal d'un rectangle, és igual si minimitzem l'altra: $\overline{ON}$.

Tenint en compte que O és un vèrtex del triangle AOB, el punt de la base que es troba a distància mínima és la base de l'altura corresponent. La tracem i mesurem.



Obtenim que la distància mínima és 7,05882 (arredonint a cinc xifres decimals)

Solució analítica:

Siga O la intersecció de les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

$$\overline{OA} = 8, \overline{OB} = 15.$$

Siga $\overline{AP} = x$.

Els triangles rectangles $\triangle AOB$, $\triangle APN$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{8} = \frac{\overline{PN}}{15}.$$

$$\overline{PN} = \frac{15}{8}x.$$

$$\overline{OP} = 8 - x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OPQ$:

$$\overline{QP} = \sqrt{\left(\frac{15}{8}x\right)^2 + (8 - x)^2}$$

$$\overline{QP} = \frac{1}{8} \sqrt{289x^2 - 1024x + 4096}$$

Considerem la funció $f(x) = 289x^2 - 1024x + 4096$.

El valor mínim del segment $\overline{QP}$ s'obté en el mínim de la paràbola cònca

$$f(x) = 289x^2 - 1024x + 4096$$

$$\text{És a dir, quan } x = \frac{1024}{2 \cdot 289} = \frac{512}{289}.$$

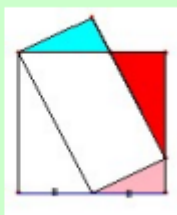
$$\text{La mesura del segment mínim és: } \overline{QP} = \sqrt{\left(\frac{15}{8} \cdot \frac{512}{289}\right)^2 + \left(8 - \frac{512}{289}\right)^2} = \frac{120}{17} \cong 7,05882.$$

18*

19

La figura està formada per un quadrat i un rectangle.

Prova que l'àrea del triangle roig és igual a la suma de les àrees del triangle morat i del triangle blau.



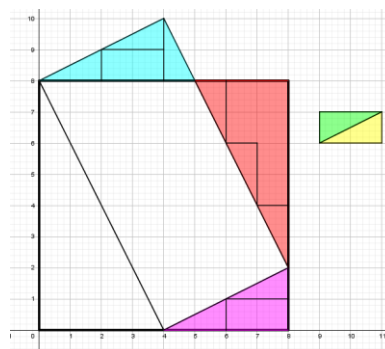
Solució quadriculant:

Si observem el dibuix, veurem que el triangle roig està format per 6 quadrats sencers i tres triangles, equivalents cadascun d'ells a un quadrat (com es pot veure en el rectangle groc i verd del lateral: dos quadrats descompostos en dos triangles), per la qual cosa en total ocupa 9 quadrats.

El blau ocupa dos quadrats complets i tres triangles equivalents a un quadrat, en total 5 quadrats.

El morat, dos quadrats complets i dos triangles, és a dir, dos quadrats més, que fan un total de quatre.

Si unim els triangles blau i morat, en total recobrirem 9 quadrats, igual que ho fa el triangle roig.



Solució analítica:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$

Els triangles rectangles $\triangle DAM$, $\triangle MBH$, $\triangle HCG$, $\triangle DFG$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{CH} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \overline{CG} = \frac{3}{4}$$

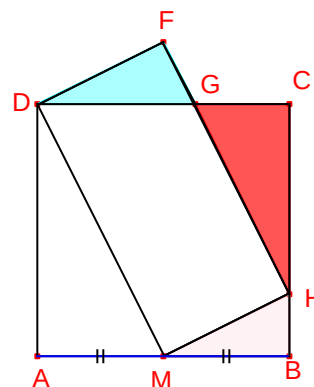
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MBH$:

$$\overline{MH} = \overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \overline{FG} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$S_{DFG} + S_{MBH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

$$S_{HCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Aleshores $S_{DFG} + S_{MBH} = S_{HCG}$



20****21**

- a) Quin és el menor cub perfecte que és divisible per 242, 7290 i 176?
- b) Quin és el menor número el triple del qual és divisible per 4, 15, 25 i 56?

**Solució:**

- a) Calculem el mcm (242, 7290, 176):

$$242 = 2 \cdot 11^2$$

$$7290 = 2 \cdot 3^6 \cdot 5$$

$$176 = 2^4 \cdot 11$$

$$\text{D'on el mcm} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 11^2$$

El número que busquem ha de ser múltiple d'aquest i a més un cub, per la qual cosa necessitem que tots els exponents siguin múltiples de 3.

Ens falten 2^2 , 5^2 y 11 →

$$\text{el número que busquem és } N = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 11^3 = 7762392000$$

- b) Calculem el mcm (4, 15, 25, 56)

$$4 = 2^2$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$25 = 5^2$$

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$N = \text{mcm}(4, 15, 25, 56) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4200$$

Este número és divisible pels quatre, però el problema ens demana el menor que el seu triple siga divisible, i com 4200 és múltiple de 3, el número buscat serà $4200:3 = 1400$.

23 ggb**24**

Per al viatge de fi de curs, els alumnes d'un institut han consultat a dues agències d'autobusos. L'agència A demana 50 € per dia i 1 € per km recorregut. L'agència B els demana 60 € per dia més 0,80 € per km recorregut. Si pensen estar tres dies de viatge, amb quina agència els interessa contractar el viatge en funció del número de km recorreguts? Hi ha alguna distància en la qual no importe l'agència?

Solució amb geogebra:

Direm x al nombre total de quilòmetres recorreguts en el viatge.

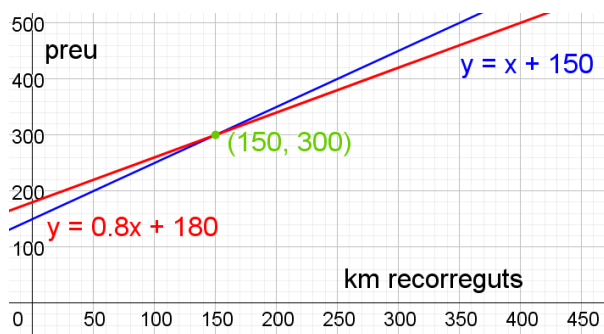
$$\text{L'agència A cobrarà } f(x) = 3 \cdot 50 + 1 \cdot x = 150 + x,$$

$$\text{mentre que l'agència B cobrarà } g(x) = 3 \cdot 60 + 0,80 \cdot x = 180 + 0,8x$$

Si introduïm directament en la barra d'entrada les dues funcions, ens trobarem que la vista gràfica no ha canviat. Això es deu al fet que les dues rectes que hem introduït amb les dues

funcions no *passen* per la finestra que tenim oberta. Cal canviar la grandària dels eixos per poder veure alguna cosa.

En blau tenim l'agència A i en roig la B. El punt d'intersecció de totes dues (150, 300) és el punt que ens indica quan és indiferent l'agència triada: amb 150 km recorreguts, ambdues ens cobren 300 €. Si el número de km recorreguts és menor que 150, l'agència A ens cobrarà menys, però si passem dels 150 km, és preferible l'agència B.



25 **

Si triem un número molt gran a l'atzar, Quina és la probabilitat que siga múltiple de 7?

26



Solució:

Posarem els nombres naturals un a un, posant en negreta els múltiples de 7:

1,2,3,4,5,6,**7**,8,9,10,11,12,13,**14**,15,16,17,18,19,20,**21**,22,23,24,...

Com es pot observar, de cada 7 nombres, hi ha sis que no estan en la tabla del 7 i hi ha uno que sí es múltiple de 7. Per tanto, la probabilitat és 1/7.

27*

28

El meu germà xicotet és un campió del desordre. És capaç de deixar la seua habitació feta un desastre en tot just 15 minuts. Però la meua mare, que ja té pràctica, aconsegueix deixar-la perfecta en 10 minuts. Hui, com ningú podia vigilar-ho mentre la meua mare recollia, ha hagut de quedar-se amb ella. Quan va començar a arreglar l'habitació eren les 12, però conforme la meua mare arreglava, el meu germà destrossava. A quina hora va quedar l'habitació ordenada?

Solució:

A les 12:30 h, ja que en mitja hora la meua mare és capaç d'arreglar tres habitacions, mentre que el meu germà només té temps per a desordenar dos.

30***31**

En el meu aniversari hi havia bastants botelles grans de refresc, i dues grandàries de gots. Amb una botella omplim 8 gots xicotets o 5 gots grans. Si hem usat 26 xicotets i 14 grans, quin és el menor nombre de botelles que hem obert?

**Solució:**

Si amb 8 gots xicotets buidem una botella, per a $26=3\cdot 8+2$ necessitarem 3 botelles completes i la quarta part d'una altra.

Amb 5 gots grans tindríem una botella, així que per a $14=2\cdot 5+4$ gots necessitem dues botelles completes i $4/5$ d'una altra.

Si unim les dues restes: $\frac{1}{4} + \frac{4}{5} = \frac{5+16}{20} = \frac{21}{20} = 1 + \frac{1}{20}$

En total, hem necessitat $3+2+1 + \frac{1}{20} = 6 + \frac{1}{20}$ botelles, és a dir, hem obert almenys 7 botelles.