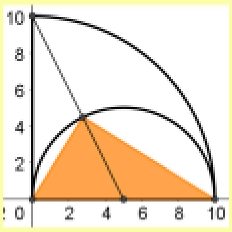
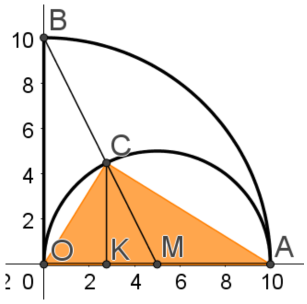
SOLUCIONES NOVIEMBRE 2023

1** **2**

La figura está formada por un cuadrante de radio 10 cm y una semicircunferencia sobre el radio. Calcula el área del triángulo sombreado.





Solución:

Sabemos que OB=10, OM=5

Como el triángulo OBM es rectángulo, podemos calcular $BM = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

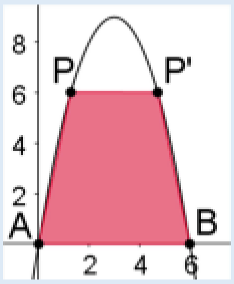
Los triángulos OBM y KCM son semejantes. Conociendo que CM=5 (por ser el radio de la semicircunferencia) podemos calcular la altura del triángulo KC:

$$\frac{KC}{OB} = \frac{CM}{BM} \rightarrow \frac{KC}{10} = \frac{5}{5\sqrt{5}} \rightarrow KC = 2\sqrt{5}$$

$$Área = \frac{10 \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10\sqrt{5}\ cm^2$$

3 ggb **4**

Sea la parábola $y = -x^2 + 6x$, y sean A y B los puntos en que corta al eje de abscisas. Sea P un punto de la parábola que pertenezca al primer cuadrante. Calcula el área máxima del trapecio ABP'P, siendo P' un punto de la parábola.



Solución con geogebra:

El punto P, al pertenecer a la parábola, tiene como coordenadas P($x, -x^2 + 6x$), y el punto P'($6 - x, -x^2 + 6x$).

La base mayor del trapecio mide x(B)-x(A)= 6.

La menor $x(P') - x(P) = 6 - x - x = 6 - 2x$.

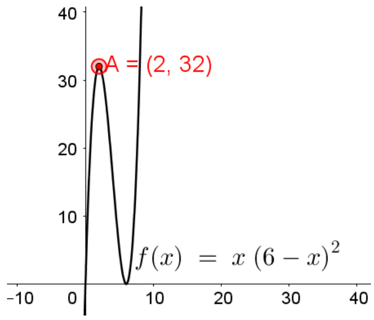
La altura del trapecio será h(x)=$y(P) = -x^2 + 6x$.

El área del trapecio para el punto P será

A(x)=$\frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{6+6-2x}{2} \cdot (-x^2 + 6x) = (6 - x)(-x^2 + 6x) = x(6 - x)^2$

Introducimos la función en geogebra para hallar el máximo. (En la barra de entrada Máximo(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)

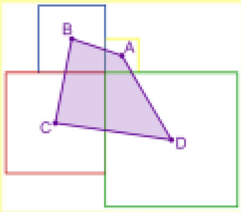
En nuestro caso Máximo (f, 0, 6) (Al empezar a escribir Max, aparece un desplegable de donde se puede seleccionar).



La función que nos da el área del trapecio alcanza en el intervalo que nos interesa el máximo cuando x=2, y el área será de 32 unidades cuadradas.

6** **7**

Se tienen cuatro cuadrados con un lado en cada uno de los ejes y de longitudes 2, 4, 6 y 8 cm respectivamente. Se construye un trapezoide ABCD uniendo los centros de dichos cuadrados. Calcula su área y su perímetro



Solución:

La distancia de cada punto al origen de coordenadas, O, es:

$$d(A,O)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\ cm \qquad d(B,O)=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ cm$$

$$d(C,O)=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\ cm$$

$$d(D,O)=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\ cm$$

Las diagonales del trapezoide miden:

$$d_1=d(A,O)+d(C,O)=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}\ cm$$

$$d_2=d(B,O)+d(D,O)=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=6\sqrt{2}\ cm$$

El área del cuadrilátero se puede calcular como la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos, como suma de áreas de dos triángulos con base una de las diagonales, o también, por ser las diagonales perpendiculares, como:

$$A=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2}=\frac{24\cdot 2}{2}=24\ cm^2$$

La longitud de los lados:

$$d(A,B)=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}\ cm \qquad d(C,D)=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\ cm$$

$$d(B,C)=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}\ cm \qquad\qquad d(D,A)=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}\ cm$$

El perímetro es:

$$P=\sqrt{10}+\sqrt{26}+5\sqrt{2}+\sqrt{34}\cong 21{,}16\ cm$$

8* **9**

Halla el valor del número n (natural) para que el MCD de los números $M=40500\cdot(240)^n$ y $N=10^6\cdot 30^{n+1}$ tenga 576 divisores positivos.

Solución:

$M= 40500\cdot(240)^n=2^2\cdot3^4\cdot5^3\cdot(2^4\cdot3\cdot5)^n = 2^{2+4n}\cdot3^{4+n}\cdot5^{3+n}$

$N= 10^6\cdot(30)^{n+1}=(2\cdot5)^6\cdot(2\cdot3\cdot5)^{n+1}= 2^{n+7}\cdot3^{n+1}\cdot5^{n+7}$

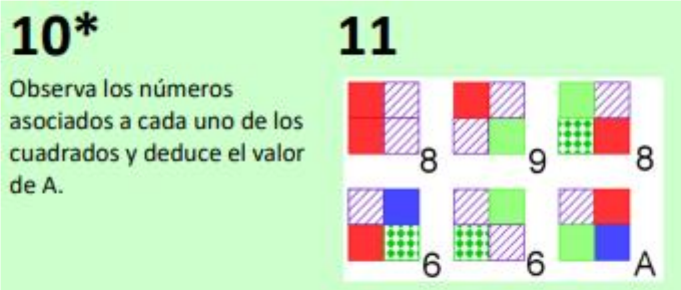
Como que tanto N como M tienen varios ceros ==> n>1 ===> por los naturales más grandes que 1, se verifica la desigualdad: $7+n< 2+4n$

El MCD es el producto de los factores comunes (para ser los factores comunes no hace falta la *coletilla al menor exponente, puesto que si son comunes obviamente son al exponente más pequeño)

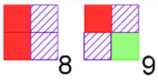
MCD (M,N) = $2^{7+n}\cdot5^{3+n}\cdot3^{1+n}$

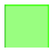
número de divisores del MCD=$(8+n)(4+n)(2+n)= 576$

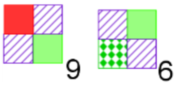
Resolvemos por tanteo, dando valores a n $\rightarrow$ **n=4**

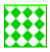


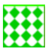
Solución:

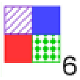
Comparando 

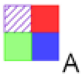
deducimos que  =  + 1

Comparando 

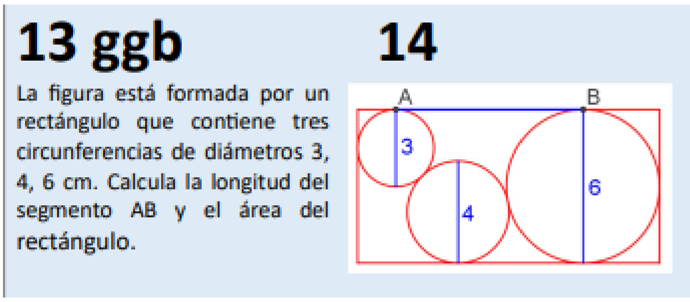
deducimos que  =  + 3

De donde  =  +4

Y si tenemos en cuenta que la diferencia entre 

y 

está en los verdes, el valor de A será 6+4=10.



Solución con geogebra:

Para hacer el dibujo con geogebra, empezaremos por la circunferencia mayor, dibujándola con centro en el (0,0) y radio 3. Con esto, podemos trazar los dos lados horizontales del rectángulo con las rectas $y = 3$ e $y = -3$ y el vertical de la derecha con la recta x=3.

El siguiente paso será la circunferencia central. Como su radio es 2, estará sobre la recta horizontal $y = -1$.

Al ser tangente a la que ya tenemos, si unimos los dos centros, tendremos un segmento que medirá 3+2=5. Si trazamos una circunferencia centrada en el (0,0) de radio 5, también contendrá al centro de la circunferencia de diámetro 4.

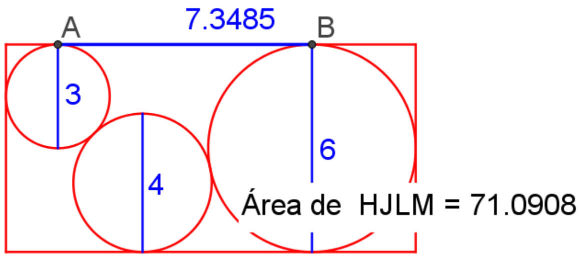
La intersección de la horizontal y la circunferencia nos da el centro. La podemos trazar ya con centro en ese punto y radio 2.

Para la circunferencia que falta, seguiremos un procedimiento similar: su centro está en la intersección de la recta $y = 1.5$ y la circunferencia centrada en el mismo punto que la de 4 de diámetro y radio 2+1.5=3. La trazamos.

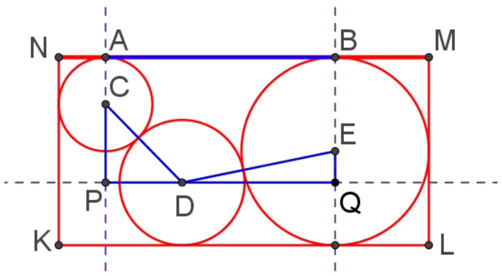
Para el lado vertical que nos falta en el triángulo, necesitamos el punto en el que es tangente a esta última circunferencia. Para hallarlo, trazamos una recta paralela al eje de abscisas que pase por el centro de la circunferencia de diámetro 3. El punto de corte será el que buscamos. Con la recta tangente a la circunferencia en dicho punto tendremos ya los límites del rectángulo. Para trazarlo, nos faltan los vértices, que hallaremos con la intersección de las rectas. Al dibujar el rectángulo, obtendremos el área.

Para la longitud del segmento AB tenemos dos opciones:

1. Medir el segmento de la base del rectángulo y restarle 1.5+3=4.5.
2. Hallar los puntos A y B como intersección de las perpendiculares a la base del rectángulo que pasan por los centros de las dos circunferencias y después ver la longitud del segmento que los une.



Solución analítica:



Conocemos las longitudes de varios segmentos:

$DE = 5 \;\; y \;\; EQ = 1 \;\; \rightarrow \;\; DQ = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$

$CD = 3{,}5 \;\; y \;\; CP = 2{,}5 \;\; \rightarrow \;\; PD = \sqrt{3{,}5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{6}$

Como AB mide lo mismo que PQ:

$AB = PD + DQ = 2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

Para el área del rectángulo:

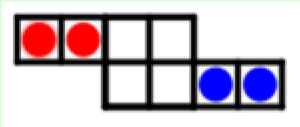
$LM = 6$

$KL = 1{,}5 + AB + 3 = 4{,}5 + 3\sqrt{6}$

$\acute{A}REA = LM \cdot KL = 6\left(4{,}5 + 3\sqrt{6}\right) = 27 + 18\sqrt{6}$

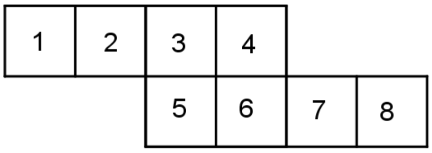
15*   16

Intercambia las posiciones de las fichas rojas con las azules en el menor número de movimientos, siendo un movimiento desplazar a una casilla contigua vacía una de las fichas



Solución:

Lo primero que haremos será numerar las casillas para indicar los movimientos necesarios.



Movimientos	Número de movimientos
$2 \to 3 \to 4$	2
$7 \to 6 \to 5 \to 3$	3
$8 \to 7 \to 6 \to 5$	3
$4 \to 6 \to 7 \to 8$	3
$1 \to 2$	1
$3 \to 4$	1
$2 \to 3$	1
$5 \to 6$	1
$3 \to 5$	1
$4 \to 3 \to 2 \to 1$	3
$6 \to 4 \to 3 \to 2$	3
$5 \to 6 \to 7$	2
	Total: 24

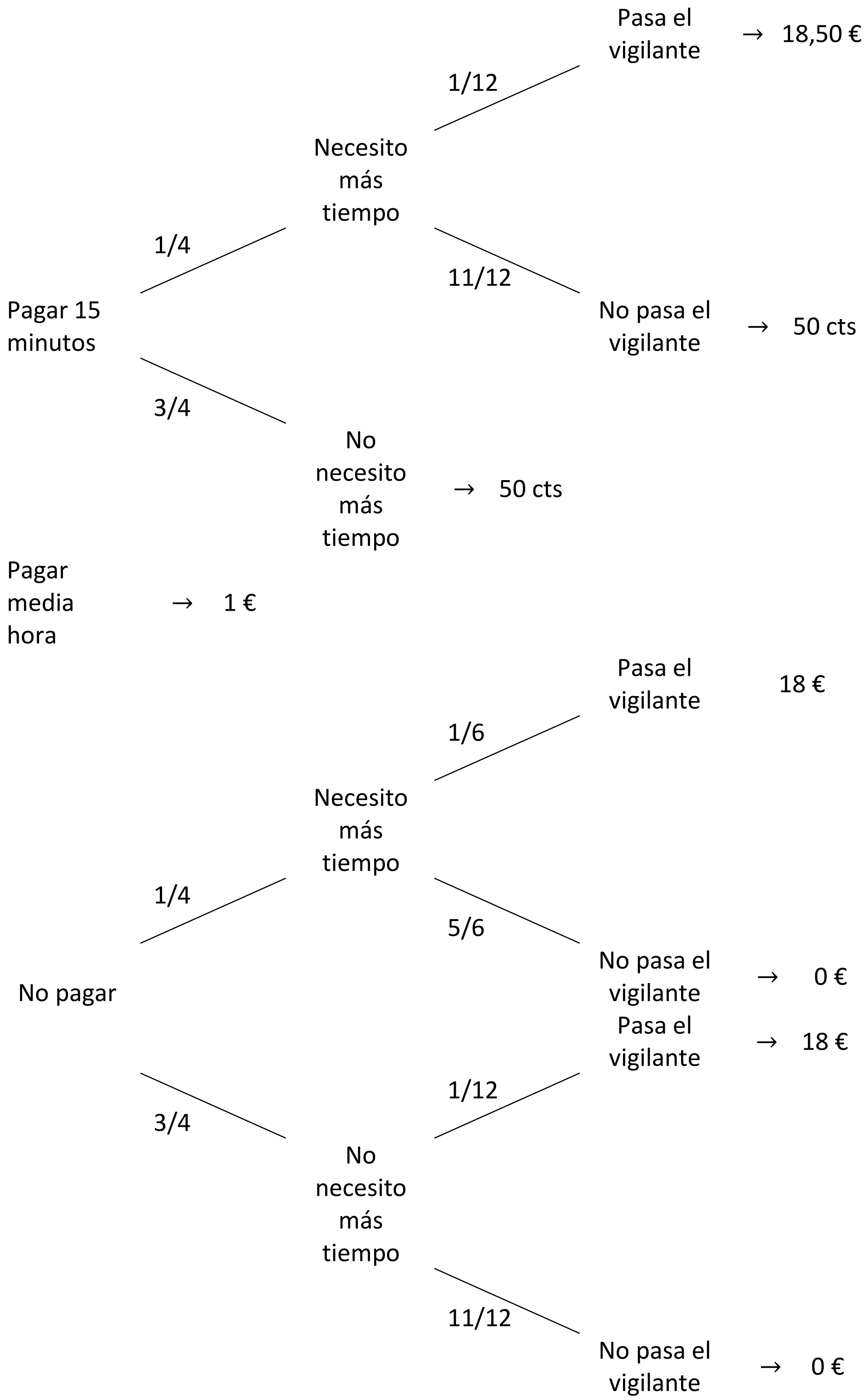
La solución no es única.

17***   18

Vas a dejar el coche aparcado en la zona azul para 10 minutos, pero hay una posibilidad entre 4 de que necesites 15 minutos más. Por cada cuarto de hora se paga 50 cts. Necesitas 5 minutos para pagar. Además, cada 3 h pasa un vigilante poniendo multas de 18 € a quienes no estén en regla.
¿Te interesa pagar 15 minutos, media hora o no pagar nada?

Solución:

Para decidir cuál de las tres opciones es la que nos interesa, vamos a hacer un árbol en el que analizaremos cuánto esperamos tener que pagar en cada opción teniendo en cuenta la probabilidad de que ocurra cada cosa.



Calculamos lo que esperamos pagar en cada una de las opciones:

a) Pago 15 minutos:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}\cdot 18{,}50+\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{12}\cdot 0{,}50+\frac{3}{4}\cdot 0{,}50=0{,}875\ €$$

b) Pago media hora: 1€

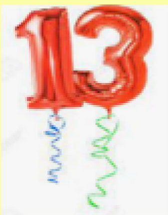
c) No pago:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot 18+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot 0+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{12}\cdot 18+\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{12}\cdot 0=1{,}875\ €$$

De donde deducimos que nos interesa pagar 15 minutos, ya que es el caso más ventajoso de los tres.

20 ** **21**

Ana escribe los 2023 primeros números naturales. ¿Cuántas agrupaciones de la forma 13 o de la forma 31 ha escrito? (Consideramos que el número 131 tiene dos agrupaciones: 13 y 31).



Solución:

1 a 99	13, 31	2
100 a 199	113, 130, 131,132,133, 134, 135, 136, 137,138, 139	12
300 a 399	310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 331	12
Resto de tres cifras	N13, N31 por centena	14

Entre los de cuatro cifras, tendremos todos los 13ab, desde 1300 hasta 1399 son 100 en total, pero algunos tienen más de una agrupación: 1310 (2), 1311 (2), 1312 (2), 1313 (3), 1314 (2), 1315 (2) , 1316 (2) , 1317(2) , 1318(2) , 1319(2) ,1331 (2), lo que hace un total de 112 entre los 13ab.

Entre los 11ab tendríamos los mismos 12 casos que entre los 1ab.

En el resto de los 1abc, tendremos dos por centena, los 1a13 y 1a31, lo que hace un total de 2·8=16 casos.

Del 2000 al 2023 sólo tendremos el 2013, lo que añade 1.

En total Ana habrá escrito 13 o 31 un total de 2+12+12+14+112+12+16+1=181 veces

22 **

Encontrar el número entero más grande de forma que cuando dividimos 989, 2093 y 4209 por aquel, deja el mismo resto.

23

Solución:

Sea D el número buscado. Se cumplen las siguientes igualdades:

$989=Dq_1+r$

$2093=Dq_2+r$

$4209=Dq_3+r$

Restándolas dos a dos:

$4209-2093=2116 \implies 2116=D(q_3-q_2)$

$4209-989=3220 \implies 3220=D(q_3-q_1)$

$2093-989=1104 \implies 1104=D(q_2-q_1)$

Es obvio que $q_3>q_2>q_1$

Para encontrar el valor de D más grande tenemos que calcular el MCD de estas diferencias

$2116=2^2\cdot 23^2$

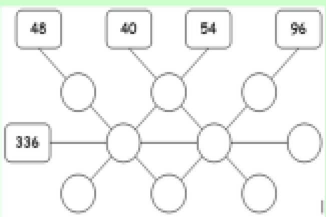
$3220=2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 23 \quad \implies \quad \text{MCD}(2116,3220,1104)=2^2\cdot 23=$ **92**

$1104=2^4\cdot 3\cdot 23$

24*

Coloca los números del 1 al 9, sin repetir ninguno, en los círculos en blanco, de manera que el producto de cualesquiera tres números conectados en línea recta sea igual al número situado en el recuadro de la misma línea.

25

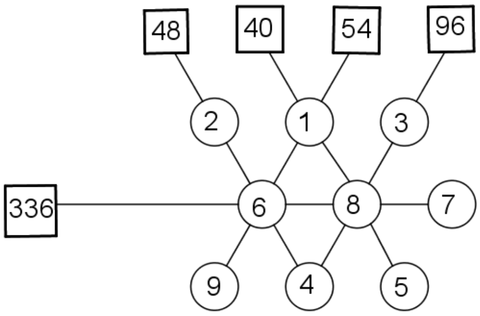


Solución:

Empezamos por factorizar los cinco números:

$$48=2^4\cdot 3\,;\;\; 40=2^3\cdot 5\,;\;\; 54=2\cdot 3^3\,;\;\; 96=2^5\cdot 3\,;\;\; 336=\;2^4\cdot 3\cdot 7$$

El 5 y el 7 sólo aparecen en un número cada uno, por lo que su posición está clara. Falta repartir los demás ajustando los productos.



27* **28**

Sabemos que Ana tiene el doble de años que Blas y el triple que Carlos. Si entre los tres tienen 88 años, ¿Cuántos años tiene cada uno?

Solución:

Si la edad de Ana es el triple de un número y el doble de otro, su edad debe poder dividirse tanto por 3 como por 2 de donde debe ser un múltiplo de 6, es decir, podemos poner que es 6n.

Como Ana tiene el doble que Blas, Blas tendrá 6n:2=3n.

Para la edad de Carlos, tendremos que dividir por 3 la de Ana, será 6n:3=2n.

Sumando las tres edades tenemos 6n+3n+5n=11n=88, así que n=8.

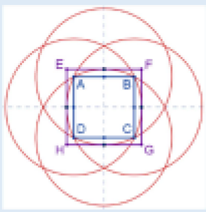
Las edades serán: Ana 6·8=48 años

Blas 3·8=24 años

Carlos 2·8=16 años

29 ggb **30**

Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrado. Con centro en los puntos medios de cada lado, se traza una circunferencia que pasa por los dos vértices del lado opuesto.
Si el lado del cuadrado ABCD es igual a 1 cm, calcula el área del cuadrado EFGH.



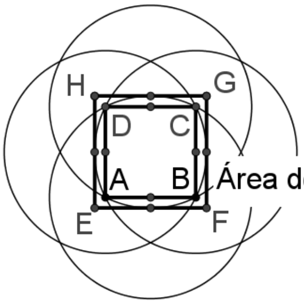
Solución con geogebra:

Empezamos por trazar un cuadrado de lado 1 (el ABCD).

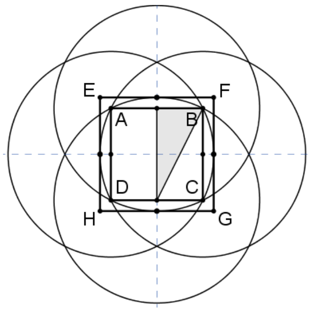
Para las circunferencias necesitamos los puntos medios de todos los lados. Después, con circunferencia por centro y punto (usando como punto uno de los vértices del cuadrado por los que tiene que pasar), trazamos la cuatro circunferencias.

Trazamos las rectas que pasan por los puntos medios de un lado y su opuesto. Usamos intersección para hallar los puntos medios de los lados del cuadrado EFGH.

Trazamos las paralelas por esos puntos medios a los lados correspondientes del cuadrado ABCD. En las intersecciones estarán los vértices del cuadrado EFGH. Lo trazamos y calculamos su área.



Solución analítica:



El radio de la circunferencia es:

$$r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ cm$$

La distancia entre los puntos medios de los lados de los cuadrados es:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\ cm$$

El lado del cuadrado EFGH es igual a:

$$l = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) + 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) = \sqrt{5} - 1 \cong 1{,}24\ cm$$

El área del cuadrado EFGH es:

$$A = (\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 \cong 1{,}53\ cm^2$$