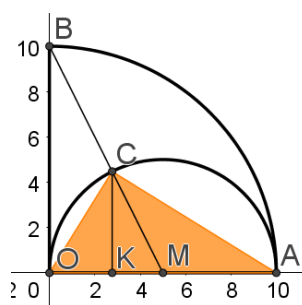
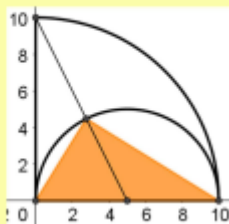


SOLUCIONS NOVEMBRE

1**

2

La figura està formada per un quadrant de radi 10 cm i una semicircumferència sobre el radi. Calcula l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

Sabem que $OB=10$, $OM=5$

Com el triangle OBM és rectangle, podem calcular $BM = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Els triangles OBM i KCM són semblants. Sabent que $CM=5$ (per ser el radi de la semicircumferència), podem calcular l'altura del triangle KC :

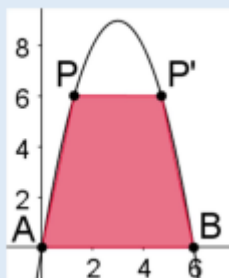
$$\frac{KC}{OB} = \frac{CM}{BM} \rightarrow \frac{KC}{10} = \frac{5}{5\sqrt{5}} \rightarrow KC = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Àrea} = \frac{10 \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

3 ggb

4

Siga la paràbola $y = -x^2 + 6x$, i siguin A i B els punts en què talla a l'eix d'abscisses. Siga P un punt de la paràbola que pertanga al primer quadrant. Calcula l'àrea màxima del trapezi $ABP'P$, sent P' un punt de la paràbola.



Solució amb geogebra:

El punt P pertany a la paràbola, per la qual cosa té coordenades $P(x, -x^2 + 6x)$,

i el punt $P'(6 - x, -x^2 + 6x)$.

La base major del trapezi mesura $x(B) - x(A) = 6$.

La menor $x(P') - x(P) = 6 - x - x = 6 - 2x$.

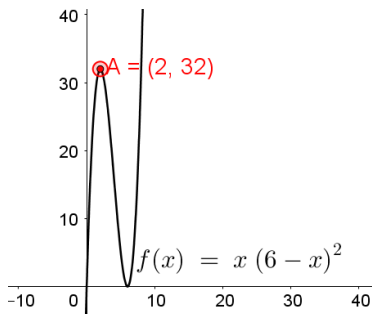
L'altura del trapezi serà $h(x) = y(P) = -x^2 + 6x$.

L'àrea del trapezi per al punt P serà

$$A(x) = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{6+6-2x}{2} \cdot (-x^2 + 6x) = (6-x)(-x^2 + 6x) = x(6-x)^2$$

Introduïm la funció en geogebra per trobar el màxim. (En la barra d'entrada Màxim(<Funció>, <Extrem inferior de l'interval>, <Extrem superior de l'interval>)

En el nostre cas Màxim (f, 0, 6) (En començar a escriure Max, apareix un desplegable d'on es pot seleccionar).



La funció que ens dona l'àrea del trapezi aconseguim en l'interval que ens interessa el màxim quan $x=2$, i l'àrea serà de 32 unitats quadrades.

6**

Es tenen quatre quadrats amb un costat en cadascun dels eixos i de longituds 2, 4, 6 i 8 cm respectivament. Es construeix un trapezoide ABCD unint els centres d'aquests quadrats. Calcula la seua àrea i el seu perímetre.

7

Solució

La distància de cada punt a l'origen de coordenades, O, és:

$$d(A, O) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$d(B, O) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$d(C, O) = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$d(D, O) = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Les diagonals del trapezoide mesuren:

$$d_1 = d(A, O) + d(C, O) = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$d_2 = d(B, O) + d(D, O) = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

L'àrea del quadrilàter es pot calcular com la suma de les àrees dels quatre triangles rectangles, com a suma d'àrees de dos triangles amb base una de les diagonals, o també, per ser les diagonals perpendiculars, com:

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = \frac{24 \cdot 2}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

La longitud dels costats:

$$d(A, B) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ cm}$$

$$d(C, D) = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$d(B, C) = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \text{ cm}$$

$$d(D, A) = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \text{ cm}$$

El perímetre és: $P = \sqrt{10} + \sqrt{26} + 5\sqrt{2} + \sqrt{34} \cong 21,16 \text{ cm}$

8***

Troba el valor del número n (natural) perquè l'MCD dels números $M=40500 \cdot (240)^n$ y $N=10^6 \cdot 30^{n+1}$ tinga 576 divisors positius.

9



Solució:

$$M = 40500 \cdot (240)^n = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot (2^4 \cdot 3 \cdot 5)^n = 2^{2+4n} \cdot 3^{4+n} \cdot 5^{3+n}$$

$$N = 10^6 \cdot (30)^{n+1} = (2 \cdot 5)^6 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^{n+1} = 2^{n+7} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+7}$$

Com que tant N com M tenen diversos zeros $\rightarrow n > 1 \rightarrow$ per als naturals més grans que 1, es verifica la desigualtat : $7+n < 2+4n$

El MCD és el producte dels factors comuns (per ser els factors comuns no fa falta l'afegitó "al menor exponent", ja que, si són comuns, òbviament són al exponent més menut).

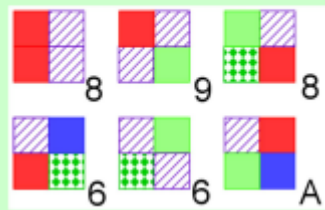
$$\text{MCD}(M, N) = 2^{7+n} \cdot 5^{3+n} \cdot 3^{1+n}$$

$$\text{nombre de divisors del MCD} = (8+n)(4+n)(2+n) = 576$$

Resolem per tempteig, donant valors a $n \rightarrow n=4$

10*

Observa els números associats a cadascun dels quadrats i dedueix el valor de A.

11**Solució:**

Comparant  8  9 deduïm que  =  + 1

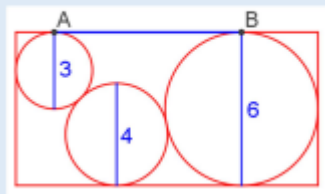
Comparant  9  6 deduïm que  =  + 3

D'on  =  + 4

I, si tenim en compte que la diferència entre  6 i  A està en els verds, el valor d'A serà $6+4=10$.

13 ggb

La figura està formada per un rectangle que conté tres circumferències de diàmetres 3, 4, 6 cm. Calcula la longitud del segment AB i l'àrea del rectangle. segmento AB y el área del rectángulo.

14**Solució amb geogebra:**

Per a fer el dibuix amb geogebra, començarem per la circumferència major, dibuixant-la amb centre en el (0,0) i radi 3. Amb això, podem traçar els dos costats horitzontals del rectangle amb les rectes $y = 3$ i $y = -3$ i el vertical de la dreta amb la recta $x=3$.

El següent pas serà la circumferència central. Com el seu radi és 2, estarà sobre la recta horitzontal $y=-1$.

Com és tangent a la que ja tenim, si unim els dos centres tindrem un segment que mesurarà $3+2=5$. Si tracem una circumferència centrada en el (0,0) de radi 5, també contindrà el centre de la circumferència de diàmetre 4.

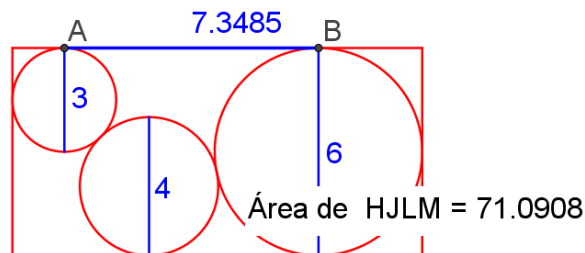
La intersecció de l'horitzontal i la circumferència ens dona el centre. La podem traçar ja amb centre en eixe punt i radi 2.

Per a la circumferència que falta, seguirem un procediment similar: el centre està en la intersecció de la recta $y=1.5$ i la circumferència centrada en el mateix punt que la de 4 de diàmetre i radi $2+1.5=3$. La tracem.

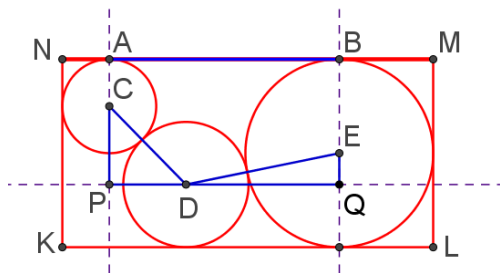
Per al costat vertical que ens falta en el triangle, necessitem el punt en el qual és tangent a esta última circumferència. Per a trobar-ho, tracem una recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passe pel centre de la circumferència de diàmetre 3. El punt de tall serà el que busquem. Amb la recta tangent a la circumferència en aquest punt tindrem ja els límits del rectangle. Per a traçar-ho, ens falten els vèrtexs, que trobarem amb la intersecció de les rectes. En dibuixar el rectangle, obtindrem l'àrea.

Per a la longitud del segment AB tenim dues opcions:

1. Mesurar el segment de la base del rectangle i restar-li $1.5+3=4.5$.
2. Trobar els punts A i B com a intersecció de les perpendiculars a la base del rectangle que passen pels centres de les dues circumferències i després veure la longitud del segment que els uneix.



Solució analítica:



Coneixem les longituds de diversos segments:

$$DE = 5 \text{ i } EQ = 1 \rightarrow DQ = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

$$CD = 3,5 \text{ i } CP = 2,5 \rightarrow PD = \sqrt{3,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{6}$$

Com AB mesura el mateix que PQ:

$$AB = PD + DQ = 2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

Per a l'àrea del rectangle:

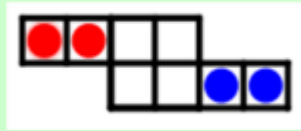
$$LM = 6$$

$$KL = 1,5 + AB + 3 = 4,5 + 3\sqrt{6}$$

$$\text{ÀREA} = LM \cdot KL = 6(4,5 + 3\sqrt{6}) = 27 + 18\sqrt{6}$$

15***16**

Intercanvia les posicions de les fitxes roges amb les blaves en el menor nombre de moviments, sent un moviment desplaçar a una casella contigua buida una de les fitxes.

**Solució:**

El primer que farem serà numerar les caselles per indicar els moviments necessaris.



Moviments	Nombre de moviments
2 → 3 → 4	2
7 → 6 → 5 → 3	3
8 → 7 → 6 → 5	3
4 → 6 → 7 → 8	3
1 → 2	1
3 → 4	1
2 → 3	1
5 → 6	1
3 → 5	1
4 → 3 → 2 → 1	3
6 → 4 → 3 → 2	3
5 → 6 → 7	2
Total: 24	

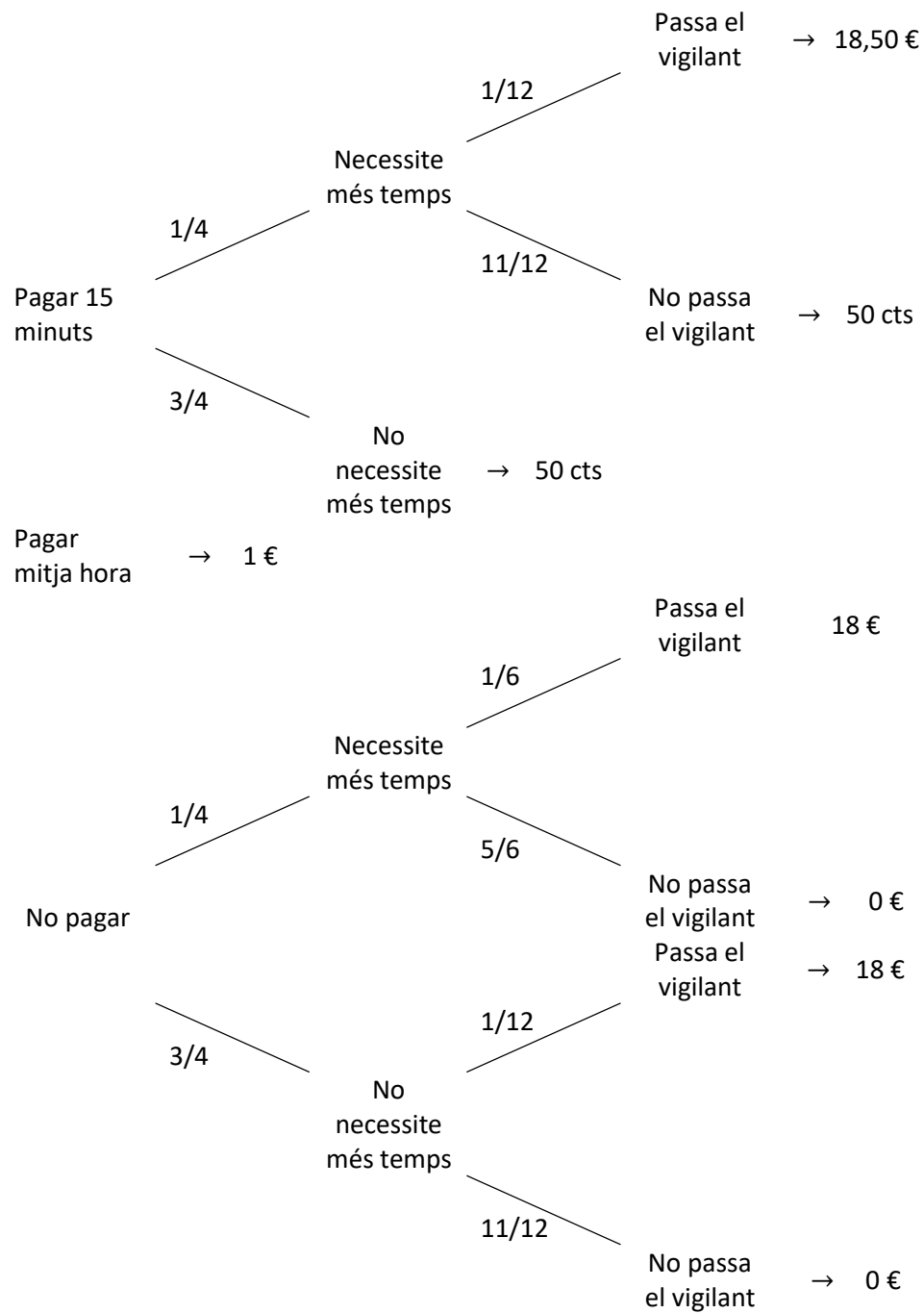
La solució no és única.

17*****18**

Deixaràs el cotxe aparcant en la zona blava per a 10 minuts, però hi ha una possibilitat entre 4 que necessites 15 minuts més. Per cada quart d'hora es paga 50 cts. Necessites 5 minuts per a pagar. A més, cada 3 h passa un vigilant posant multes de 18 € als qui no estiguen en regla. T'interessa pagar 15 minuts, mitja hora o no pagar res?

Solució:

Per decidir quina de les tres opcions és la que ens interessa, farem un arbre en el qual analitzarem quant esperem haver de pagar en cada opció tenint en compte la probabilitat que ocorregi cada cosa.



Calculem el que esperem pagar en cadascuna de les opcions:

a) Pague 15 minuts:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 18,50 + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{12} \cdot 0,50 + \frac{3}{4} \cdot 0,50 = 0,875 \text{ €}$$

b) Pague mitja hora: 1€

c) No pague:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot 18 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 18 + \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{12} \cdot 0 = 1,875 \text{ €}$$

D'on deduïm que ens **interessa pagar 15 minuts**, ja que és el cas més avantatjós dels tres.

20 **

21

Ana escriu els 2023 primers nombres naturals. Quantes agrupacions de la forma 13 o de la forma 31 ha escrit? (Considerem que el número 131 té dues agrupacions: 13 i 31).



Solució:

1 a 99	13, 31	2
100 a 199	113, 130, 131 , 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139	12
300 a 399	310, 311, 312, 313 , 314, 315, 316, 317, 318, 319, 331	12
Resta de tres xifres	N13, N31 per centena	14

Entre els de quatre xifres, tindrem tots els 13ab, des de 1300 fins a 1399. Són 100 en total, però alguns tenen més d'una agrupació: 1310 (2), 1311 (2), 1312 (2), 1313 (3), 1314 (2), 1315 (2), 1316 (2), 1317(2), 1318(2), 1319(2), 1331 (2), la qual cosa fa un total de **112** entre els 13ab.

Entre els 11ab tindríem els mateixos **12** casos que entre els 1ab.

En la resta dels 1abc, tindrem dos per centena, els 1a13 i 1a31, el que fa un total de $2 \cdot 8 = 16$ casos.

Del 2000 al 2023 només tindrem el 2013, la qual cosa afeg **1** cas.

En total Ana haurà escrit 13 o 31 un total de $2+12+12+14+112+12+16+1=181$ vegades

22 **

23

Trobar el nombre enter més gran de manera que quan dividim 989, 2093 i 4209 per aquell, deixa la mateixa resta.



Solució:

Siga D el nombre buscat. Es compleixen les igualtats següents:

$$989 = Dq_1 + r$$

$$2093 = Dq_2 + r$$

$$4209 = Dq_3 + r$$

Restant-les dos a dos:

$$4209 - 2093 = 2116 \rightarrow 2116 = D(q_3 - q_2)$$

$$4209 - 989 = 3220 \rightarrow 3220 = D(q_3 - q_1)$$

$$2093 - 989 = 1104 \rightarrow 1104 = D(q_2 - q_1)$$

És obvi que $q_3 > q_2 > q_1$

Per trobar el valor de D més gran hem de calcular el MCD d'aquestes diferències

$$2116 = 2^2 \cdot 23^2$$

$$3220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \rightarrow \text{MCD}(2116, 3220, 1104) = 2^2 \cdot 23 = \mathbf{92}$$

$$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$$

24*

Col·loca els números de l'1 al 9, sense repetir cap, en els cercles en blanc, de manera que el producte de qualssevol tres números connectats en línia recta siga igual al número situat en el requadre de la mateixa línia.

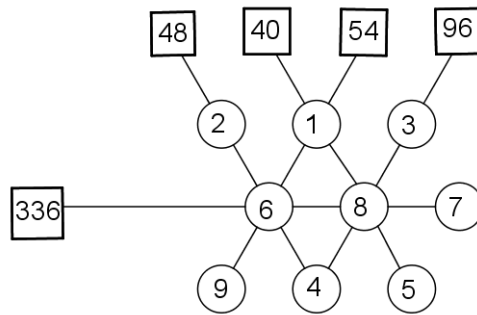
25

Solució:

Comencem per factoritzar els cinc números:

$$48 = 2^4 \cdot 3; \quad 40 = 2^3 \cdot 5; \quad 54 = 2 \cdot 3^3; \quad 96 = 2^5 \cdot 3; \quad 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$$

El 5 i el 7 només apareixen en un número cadascun, per la qual cosa la seua posició és clara. Falta repartir els altres ajustant els productes.



27*

28

Sabem que Anna té el doble d'anys que Blas i el triple que Carles. Si entre els tres tenen 88 anys, Quants anys té cadascun?



Solució:

Si l'edat d'Anna és el triple d'un número i el doble d'un altre, la seua edat ha de poder dividir-se tant per 3 com per 2, d'on ha de ser un múltiple de 6. És a dir, podem posar que és $6n$.

Com Anna té el doble que Blas, Blas tindrà $6n:2=3n$.

Per a l'edat de Carles, haurem de dividir per 3 la d'Anna, serà $6n:3=2n$.

Sumant les tres edats tenim $6n+3n+2n=11n=88$, així que $n=8$.

Les edats seran: Anna $6 \cdot 8=48$ anys

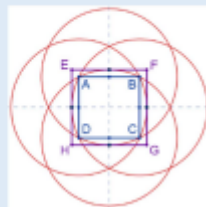
Blas $3 \cdot 8=24$ anys

Carles $2 \cdot 8=16$ anys

29 ggb

30

Siguen A, B, C i D els vèrtexs d'un quadrat. Amb centre en els punts mitjans de cada costat, es traça una circumferència que passa pels dos vèrtexs del costat oposat. Si el costat del quadrat ABCD és igual a 1 cm, calcula l'àrea del quadrat EFGH.



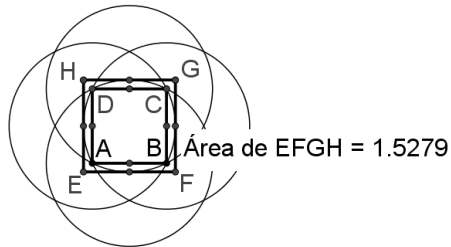
Solució amb geogebra:

Comencem per traçar un quadrat de costat 1 (el ABCD).

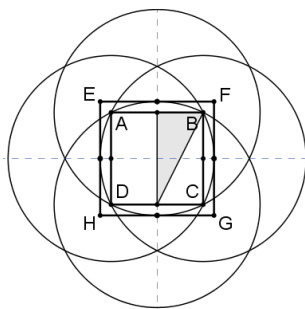
Per a les circumferències necessitem els punts mitjans de tots els costats. Després, amb circumferència per centre i punt (usant com a punt un dels vèrtexs del quadrat pels quals ha de passar), tracem les quatre circumferències.

Tracem les rectes que passen pels punts mitjans d'un costat i el seu oposat. Usem intersecció per trobar els punts mitjans dels costats del quadrat EFGH.

Tracem les paral·leles per eixos punts mitjans als costats corresponents del quadrat ABCD. En les interseccions estaran els vèrtexs del quadrat EFGH. Ho tracem i calculem la seua àrea.



Solució analítica:



El radi de la circumferència és:

$$r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow r = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

La distància entre els punts mitjans dels costats dels quadrats és:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \text{ cm}$$

El costat del quadrat EFGH és igual a:

$$l = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) + 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) = \sqrt{5} - 1 \cong 1,24 \text{ cm}$$

L'àrea del quadrat EFGH és:

$$A = (\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 \cong 1,53 \text{ cm}^2$$