

## PROBLEMES DECEMBRE RESOLTS

**1\***

Disposen de tres caixes amb 288 pomes, 408 taronges i 360 peres, respectivament. Es desitja vendre-les en bosses xicotetes amb un únic tipus de fruita i igual quantitat de peces per bossa. Calculeu el menor nombre de bosses de manera que no sobre cap fruita.

**2**



**Solució:**

Fruites per bossa:  $\text{MCD}(288, 408, 360) = 24$

Bosses de pomes  $288:24 = 12$

Bosses de taronges:  $408:24 = 17$

Bosses de peres:  $360:24 = 15$

Nombre mínim de bosses =  $12+17+15 = 44$

**4 ggb**

Un vaixell es troba en el punt  $B(2,0)$ . La línia de costa ve donada per la corba  $y = \sqrt{2x+1}$ . Quin angle ha de desviar-se el vaixell de la direcció nord si vol arribar en línia recta al punt més pròxim de la costa? (L'eix positiu d'abscisses és la direcció est)

**5**



**Solució amb geogebra:**

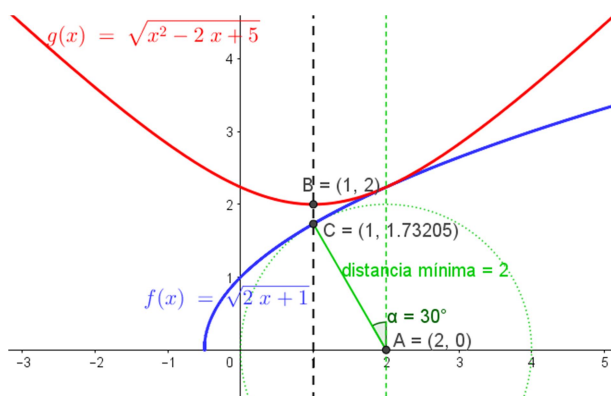
Per a calcular l'angle demanat, el primer serà trobar el punt de la costa que es trobe a menor distància del vaixell. Per a això, necessitem la funció que ens calcule la distància entre la posició del vaixell  $A(2,0)$  i un punt qualsevol  $P(x, \sqrt{2x+1})$  de la costa  $f(x) = \sqrt{2x+1}$ :

$$d(A, P) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{2x+1} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

Passem a dibuixar amb geogebra:

1. Introduïm en la barra d'entrada la funció  $f$  de la costa. Cal tindre en compte que per a escriure l'arrel s'usa  $\text{sqrt}(2x+1)$ .
2. Després, la funció  $g$  de la distància entre el vaixell i la costa. Tornem a tindre arrel, a més d'una potència. Introduïm  $\text{sqrt}(x^2-2x+5)$ .

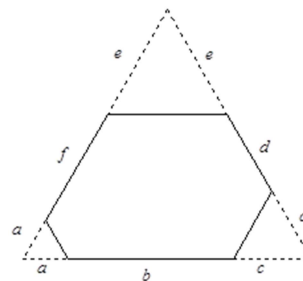
3. Trobem el mínim de  $g$  en l'interval  $(0,5)$ . Obtenim el punt  $B(1,2)$ , que ens indica que la distància serà mínima quan  $x=1$  i que mesurarà 2.
4. El punt cap al qual ha de dirigir-se el vaixell serà el que tinga abscissa 1. Per a trobar-ho, tracem la perpendicular per  $B$  a l'eix d'abscisses i després el punt on esta recta curta a la línia de costa ( $C$ ).
5. El vaixell ha d'anar d'a  $C$ . tracem el segment que els uneix.
6. Per a trobar el que ha de desplaçar-se de la direcció nord, la tracem amb una perpendicular per a a l'eix d'abscisses. Després, mesurem l'angle, obtenint  $30^\circ$ .



**6\*\*\***

Quines són les possibles àrees d'un hexàgon amb tots els angles iguals i els costats dels quals mesuren 1, 2, 3, 4, 5 i 6 en algun ordre?

**7**



**Solució:**

La idea és prolongar els costats per a formar un triangle equilàter.

$$a + b + c + d + e + f = 21$$

$$l = a + b + c = c + d + e = e + f + a$$

$$3l = 21 + a + c + e, \text{ per tant}$$

$$l = 7 + (a + c + e) / 3$$

El valor més xicotet de  $a + c + e$  és 6 i el més gran 15,

a més  $a + c + e$  ha de ser múltiple de 3, ja que  $l$  és natural, així que:

$$9 \leq l \leq 12$$

Si  $a + c + e = 6$ , llavors són:

$$(a, c, e) = (1, 2, 3) \text{ y } (b, c, d) = (4, 5, 6)$$

Si  $a + c + e = 9$  l'únic cas possible és:

$$(a, c, e) = (1, 3, 5) \text{ y } (b, c, d) = (2, 4, 6)$$

Si  $a + c + e = 12$  l'únic cas possible és  $(a, c, e) = (2, 4, 6)$

Si  $a + c + e = 15$  l'únic possible és  $(4, 5, 6)$ .

Com l'àrea del triangle de costat  $l$  és  $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$  i la de l'hexàgon és  $\frac{\sqrt{3}}{4}(l^2 - a^2 + c^2 + e^2)$  a les

hores les àrees possibles són:

$$\text{Si } a + c + e = 6 \rightarrow l = 9 \text{ i l'àrea } \frac{67\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Si } a + c + e = 9 \rightarrow l = 10 \text{ i l'àrea } \frac{65\sqrt{3}}{4}$$

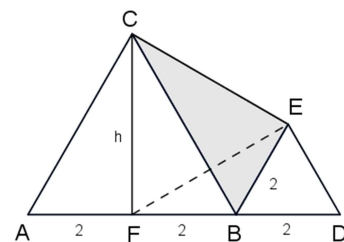
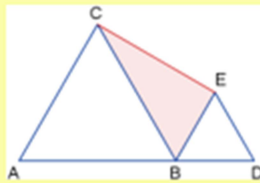
$$\text{Si } a + c + e = 4 \rightarrow l = 11 \text{ i l'àrea } \frac{65\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Si } a + c + e = 5 \rightarrow l = 12 \text{ i l'àrea } \frac{67\sqrt{3}}{4}.$$

**8\*\***

El triangle ABC és un triangle equilàter de 4 cm de costat. El triangle BDE és un triangle equilàter de 2 cm de costat. Calcula la longitud del segment CE i els angles del triangle BCE.

**9**



**Solució:**

El punt F és el punt simètric de E respecte del costat BC, per tant, la longitud del segment CE coincideix amb la longitud del segment CF, és a dir, amb l'altura del triangle.

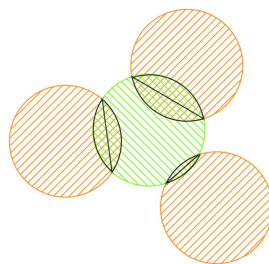
$$h^2 + 2^2 = 4^2 \rightarrow CE = h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \cong 3,66 \text{ cm}$$

Els triangles CFB i CEB són iguals, per tant:

$$CEB = 90^\circ, \quad EBC = 60^\circ, \quad BCE = 30^\circ$$

**11\***

En la imatge veiem quatre circumferències de radi 3 cm.  
 Calcula la longitud del perímetre de la zona que veus de color groc.

**12****Solució:**

El perímetre coincideix amb el de la circumferència. Si trobem els punts d'intersecció del cercle groc amb cadascun dels taronges i tracem el segment que els uneix, els arcs de circumferència que queden a cada costat són iguals, per la qual cosa per a mesurar el perímetre és igual usar l'arc intern que l'extern.

$$\text{Perímetre} = 2\pi r = 2\pi 3 = 6\pi \text{ cm}$$

**13\*\***

Tinc 13 nets. Quan estan tots compte 8 xiquetes, 6 caps rossos, 5 portadors d'ulleres, 3 xiquetes rosses, 3 xiquetes amb ulleres, 2 caps rossos amb ulleres i un xic ni ros ni amb ulleres. Pots dir-me quantes netes tinc rosses i amb ulleres?

**14****Solució:**

Siga  $x$  el nombre de xiquetes rosses i amb ulleres.

Com en total hi ha 3 xiquetes rosses, el total de xiquetes rosses sense ulleres serà  $3-x$ .

En total hi ha 3 xiquetes amb ulleres, així que el nombre de xiquetes que no siguin rosses i porten ulleres també serà  $3-x$ .

Com en total hi ha 2 caps rossos amb ulleres i  $x$  xiquetes rosses amb ulleres,  $2-x$  serà el nombre de xics rossos amb ulleres.

Hi ha en total 5 amb ulleres, d'on si sumem  $x + 3-x + 2-x = 5-x$ , tindrem que els xics amb ulleres no rossos seran  $5-(5-x) = x$ .

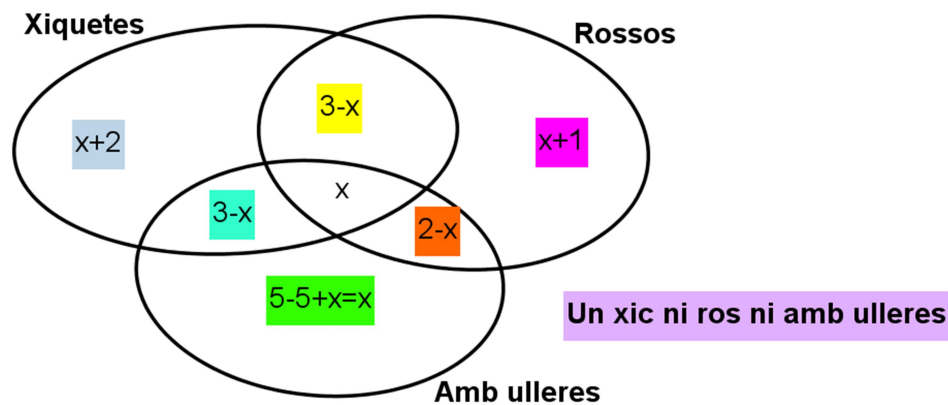
En total hi ha 6 rossos, d'on si sumem  $x + 2-x + 3-x = 5-x$  podem deduir que el nombre de xiquets rossos sense ulleres és  $6-(5-x) = 1+x$ .

En total hi ha 8 xiquetes, amb el que el nombre de xiquetes sense ulleres i no rosses serà

$$8 - (3-x) - (3-x) - x = x+2$$

A més està el xic ni ros ni amb ulleres. Si sumem tots, el total ha de ser 13:

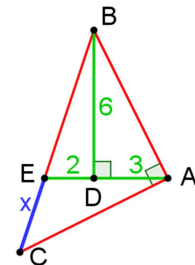
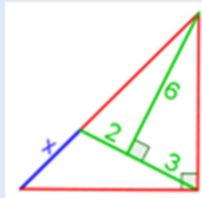
$$1 + 3-x + 3-x + 2-x + x + 1+x + x+2 + x = 13 \rightarrow x=1 \text{ ni\~na rubia con gafas}$$



**15 ggb**

La figura està formada per un triangle rectangle que conté un altre triangle rectangle.  
Calcula la longitud del segment  $x$ .

**16**



### Solució amb geogebra:

Per a dibuixar els triangles, ho girem perquè la línia EA estiga sobre l'eix d'abscisses i la línia BD sobre el d'ordenades.

Com coneixem la longitud dels segments, les coordenades de tots els punts menys el C són conegudes: A(3,0), B(0,6), D(0,0) i E(-2,0).

Els introduïm i dibuixem tots els triangles menys el ACE.

Per a trobar C, dibuixem la recta perpendicular al segment AB que passe per a.

Després, la recta que passa pels punts B i E.

El punt de tall d'estes dues rectes és C(-3,-3)

Per a trobar la longitud de  $x$ , només ens falta dibuixar el segment que uneix C i E i mesurar-lo. Obtenim **3,1623**.

### Solució analítica:

Siga el triangle rectangle  $\triangle ABC$ ,  $A = 90^\circ$

Siga el triangle rectangle  $\triangle ADB$ ,  $D = 90^\circ$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ADB$

$$\overline{AB} = 3\sqrt{5}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle EDB$

$$\overline{BE} = 2\sqrt{10}$$

Siguen  $\alpha = \angle ABD, \beta = \angle DBE$ .

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = \frac{1}{3}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

Aleshores el triangle rectangle  $\triangle ABC$  és isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ABC$

$$x + 2\sqrt{10} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{10} \cong 3,1623$$

**18\*\***

Trobeu el número de 7 xifres més gran el qual, en dividir-lo per 7, 11, 28 i 55, produeix els residus 3, 7, 24 i 51, respectivament.

**19**



**Solució:**

Notar que:

$$7-3=4$$

$$11-7=4$$

$$28-24=4$$

$$55-51=4$$

El MCM dels divisors és  $\text{MCM}(7, 11, 28, 55) = 7 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 5 = 1540$

El nombre buscat és del tipus  $1540N-4$

El nombre de 7 dígit més gran és 9 999 999.

Veiem quin residu produeix entre 1540:

$$9\,999\,999 : 1540 \rightarrow q=6493 \quad i \quad R=779$$

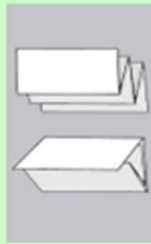
El nombre anterior múltiple de 1540 és:  $9\,999\,999 - 779 = 9\,999\,220$

El nombre buscat és  $9\,999\,220 - 4 = 9\,999\,216$

**20\***

**21**

Una tira de paper molt fi, de 120 cm de longitud, es doblega per la meitat, quedant una tira doble, de 60 cm de longitud. Una vegada doblegada, es torna a doblegar per la meitat, de manera successiva, fins que queda una tira de 7,5 cm, amb diverses capes. Quants doblecs té la tira de paper al final? Quantes capes té la tira de 7,5 cm de longitud?



**Solució:**

| Vegades doblegada | Longitud en cm | Plecs | Num. de capes | Imatge |
|-------------------|----------------|-------|---------------|--------|
| 0                 | 120            | 0     | 1             |        |
| 1                 | 60             | 1     | 2             |        |
| 2                 | 30             | 3     | 4             |        |
| 3                 | 15             | 7     | 8             |        |
| 4                 | 7,5            | 15    | 16            |        |

**22\*\*\***

A cada enter positiu  $n$  se l'associa un enter no negatiu  $f(n)$  de manera que satisfà les condicions

- $f(r \cdot s) = f(r) + f(s)$
- $f(10) = 0$
- $f(n) = 0$  sempre que la xifra de les unitats de  $n$  siga 3.

Troba  $f(1985)$ . Justifica la resposta.

**23**



**Solució:**

Siga  $f$  una funció tal que  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que satisfà les propietats de l'enunciat.

Com  $0 = f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5) = f(2) = f(5) = 0$ , per ser  $f(n)$  no negatiu per a qualsevol  $n$  element dels nombres naturals.

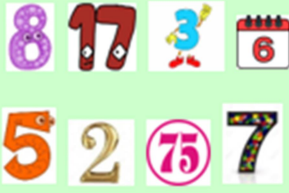
Ara tenim que  $f(1985) = f(5 \cdot 397) = f(5) + f(397) = f(397)$ . Ara hem de buscar algun  $n$  que continga a 397. Veiem que

$0 = f(3573) = f(3 \cdot 3 \cdot 397) = f(3) + f(3) + f(397) = f(397)$  ja que tant 3573 com 3 tenen el dígit de les unitats igual a 3, d'això deduïm que  $f(1985) = 0$ .

**25\***

Usant tots aquests números, cadascun una sola vegada, i realitzant les operacions aritmètiques necessàries, has d'aconseguir el 999.

**26**



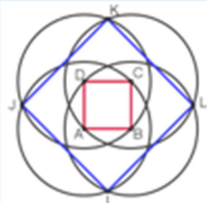
**Solució:**

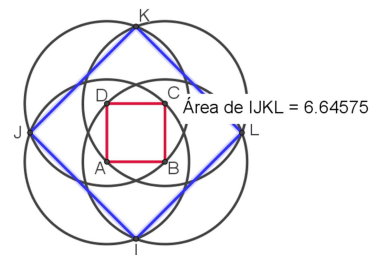
$$\left(\frac{75}{3} + 2 \cdot 6\right) \cdot (17 + 7 + 8 - 5) = (25 + 12) \cdot (17 + 10) = 37 \cdot 27 = 999$$

**27 ggb**

Siguen A, B, C i D els vèrtexs d'un quadrat d'1 cm de costat. Amb centre en cada vèrtex, es traça una circumferència que passa pel vèrtex oposat. Calcula l'àrea del quadrat IJKL.

**28**





**Solució amb geogebra:**

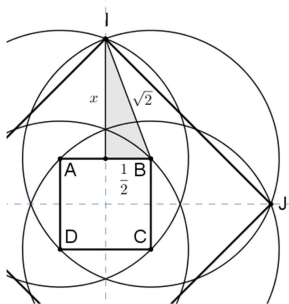
Per a trobar l'àrea del quadrat IJKL usarem l'eina per a calcular àrees.

Per a fer el dibuix seguim els passos:

1. Amb polígon regular tracem el quadrat de costat 1 cm amb vèrtexs en (0,0) i (1,0).
2. Amb circumferència (centre, punt) tracem les quatre, tal com indica l'enunciat, centre en un vèrtex i passant pel vèrtex oposat.
3. Trobem la intersecció d'una de les quatre circumferències amb les dues contigües i així obtenim els dos vèrtexs d'un dels costats del quadrat.
4. Tracem el quadrat IJKL amb polígon regular.
5. Amb l'eina àrea calculem l'àrea demanada, obtenint 6,64575 cm<sup>2</sup>.

**Solució analítica:**





La diagonal d'un quadrat d'1 cm de costat mesura  $\sqrt{2}$  cm.

Aplicant el Teorema de Pitàgores al triangle rectangle:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sqrt{2}^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 2 \rightarrow x^2 = \frac{7}{4} \rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ cm}$$

La diagonal del quadrat IJKL mesura:  $d = \frac{\sqrt{7}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7} + 1 \text{ cm}$

L'àrea del quadrat, coneixent la diagonal és:

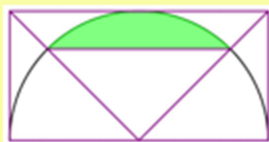
$$A = \frac{d^2}{2} = \frac{(\sqrt{7} + 1)^2}{2} = \frac{7 + 2\sqrt{7} + 1}{2} = 4 + \sqrt{7} \cong 6,65 \text{ cm}^2$$

**29\*\***

La figura està formada per un rectangle que conté una semicircumferència de 10 cm de diàmetre.

Calcula l'àrea del segment circular ombrejat.

**30**



**Solució:**

Siga el rectangle  $ABCD$  de costats  $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 5$

$\overline{OB} = \overline{OQ} = 5, \angle DOC = 90^\circ$

L'àrea del segment circular és:

$$S_{\text{ombrejada}} = \frac{1}{4} \pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 5^2 = \frac{25}{4} (\pi - 2) \approx 7.13495$$

