PROBLEMAS DICIEMBRE RESUELTOS

1*

Disponemos de tres cajas con 288 manzanas, 408 naranjas y 360 peras, respectivamente. Se desea venderlas en bolsas pequeñas con un único tipo de fruta e igual cantidad de piezas por bolsa. Encontrar el menor número de bolsas de forma que no sobre ninguna fruta.

2

Solución:

Frutas por bolsa: MCD(288,408,360) =24

Bolsas de manzanas 288:24 =12

Bolsas de naranjas: 408:24 =17

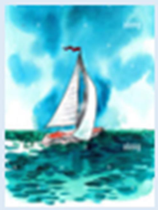
Bolsas de peras: 360: 24= 15

Número mínimo de bolsas= 12+17+15 = 44

4 ggb

Un barco se encuentra en el punto B(2,0). La línea de costa viene dada por la curva $y = \sqrt{2x+1}$. ¿Qué ángulo tiene que desviarse el barco de la dirección norte si quiere llegar en línea recta al punto más próximo de la costa? (El eje positivo de abscisas es la dirección este)

5



Solución con geogebra:

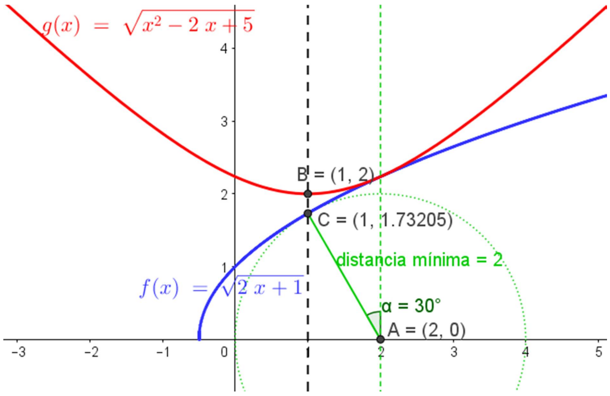
Para calcular el ángulo pedido, lo primero será hallar el punto de la costa que se encuentre a menor distancia del barco. Para eso, necesitamos la función que nos calcule la distancia entre la posición del barco A(2,0) y un punto cualquiera $P\left(x, \sqrt{2x+1}\right)$de la costa $f(x) = \sqrt{2x+1}$:

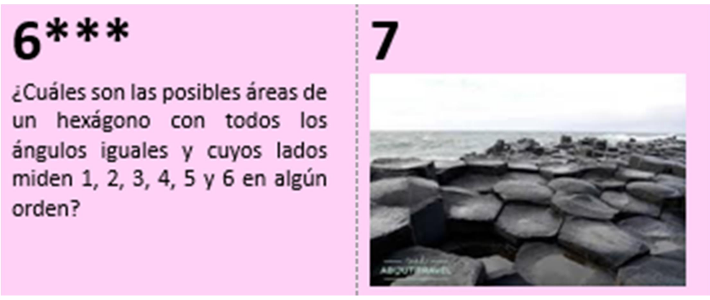
$$d(A,P) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{2x+1} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

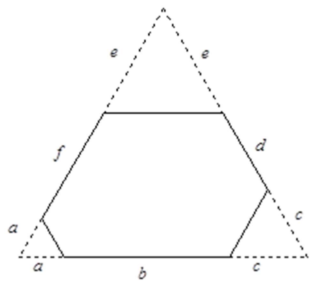
Pasamos a dibujar con geogebra:

1. Introducimos en la barra de entrada la función f de la costa. Hay que tener en cuenta que para escribir la raíz se usa sqrt(2x+1).
2. Después, la función g de la distancia entre el barco y la costa. Volvemos a tener raíz, además de una potencia. Introducimos sqrt(x^2—2x+5).
3. Hallamos el mínimo de g en el intervalo (0,5). Obtenemos el punto B(1,2), que nos indica que la distancia será mínima cuando x=1 y que medirá 2.
4. El punto hacia el que debe dirigirse el barco será el que tenga abscisa 1. Para hallarlo, trazamos la perpendicular por B al eje de abscisas y después el punto donde esta recta corta a la línea de costa (C).
5. El barco debe ir de A a C. trazamos el segmento que los une.

6. Para hallar lo que debe desplazarse de la dirección norte, la trazamos con una perpendicular por A al eje de abscisas. Después, medimos el ángulo, obteniendo 30º.







Solución:

La idea es prolongar los lados para formar un triángulo equilátero.

$a + b + c + d + e + f = 21$

$l = a + b + c = c + d + e = e + f + a$

$3l = 21 + a + c + e$, por tanto

$l = 7 + (a + c + e) / 3$

El valor más pequeño de $a + c + e$ es 6 y el más grande 15,

además $a + c + e$ debe ser múltiplo de 3, ya que l es natural, así que:

$9 \leq l \leq 12$

Si $a + c + e = 6$, entonces son:

$(a, c, e) = (1, 2, 3)$ y $(b, c, d) = (4, 5, 6)$

Si $a + c + e = 9$ el único caso posible es:

$(a, c, e) = (1, 3, 5)$ y $(b, c, d) = (2, 4, 6)$

Si $a + c + e = 12$ el único caso posible es $(a, c, e) = (2, 4, 6)$

Si $a + c + e = 15$ el único posible es (4, 5, 6).

Como el área del triángulo de lado l es $l^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ y la del hexágono es $\frac{\sqrt{3}}{4}(l^2-a^2+c^2+e^2)$

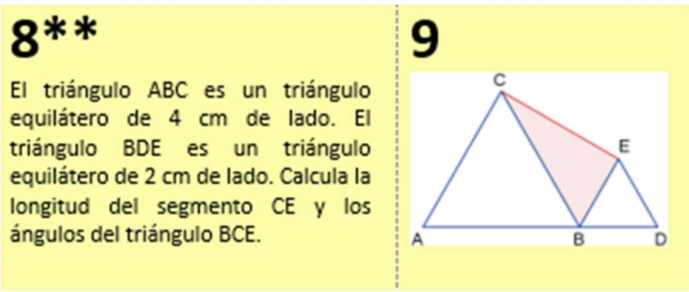
entonces las áreas posibles son:

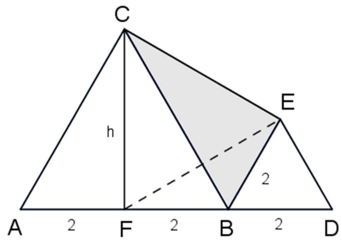
1) Si $a + c + e = 6$, entonces $l = 9$ y el área $\dfrac{67\sqrt{3}}{4}$

2) Si $a + c + e = 9$, entonces $l = 10$ y el área $\dfrac{65\sqrt{3}}{4}$

3) Si $a + c + e = 4$, entonces $l = 11$ y el área $\dfrac{65\sqrt{3}}{4}$

4) Si $a + c + e = 5$, entonces $l = 12$ y el área $\dfrac{67\sqrt{3}}{4}$.





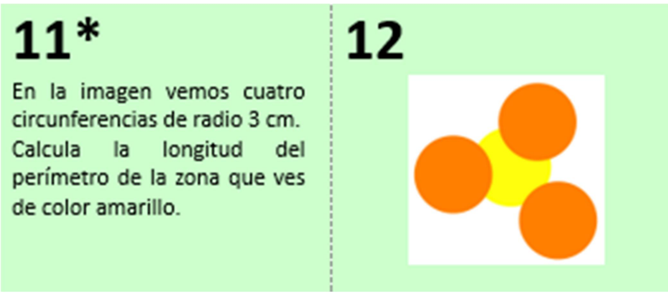
Solución:

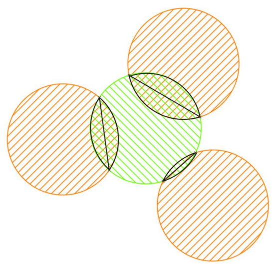
El punto F es el punto simétrico de E respecto del lado BC, por tanto, la longitud del segmento CE coincide con la longitud del segmento CF, es decir, con la altura del triángulo.

$$h^2 + 2^2 = 4^2 \quad \rightarrow \quad CE = h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \cong 3{,}66\ cm$$

Los triángulos CFB y CEB son iguales, por tanto:

$$CEB = 90^\circ \quad , \quad EBC = 60^\circ \quad , \quad BCE = 30^\circ$$





Solución:

El perímetro coincide con el de la circunferencia. Si hallamos los puntos de intersección del círculo amarillo con cada uno de los naranjas y trazamos el segmento que los une, los arcos de circunferencia que quedan a cada lado son iguales, por lo que para medir el perímetro da igual usar el arco interno que el externo.

$$Perímetro = 2\pi r = 2\pi 3 = 6\pi\ cm$$

13** **14**

Tengo 13 nietos. Cuando están todos cuento 8 niñas, 6 cabezas rubias, 5 portadores de gafas, 3 niñas rubias, 3 niñas con gafas, 2 cabezas rubias con gafas y un chico ni rubio ni con gafas. ¿Puedes decirme cuántas nietas tengo rubias y con gafas?

Solución:

Sea x el número de niñas rubias y con gafas.

Como en total hay 3 niñas rubias, el total de niñas rubias sin gafas será 3-x.

En total hay 3 niñas con gafas, así que el número de niñas que no sean rubias y lleven gafas también será 3-x.

Como en total hay 2 cabezas rubias con gafas y x niñas rubias con gafas, 2-x será el número de chicos rubios con gafas.

Hay en total 5 con gafas, de donde si sumamos x+3-x+2-x=5-x, tendremos que los chicos con gafas no rubios serán 5-(5-x) = x.

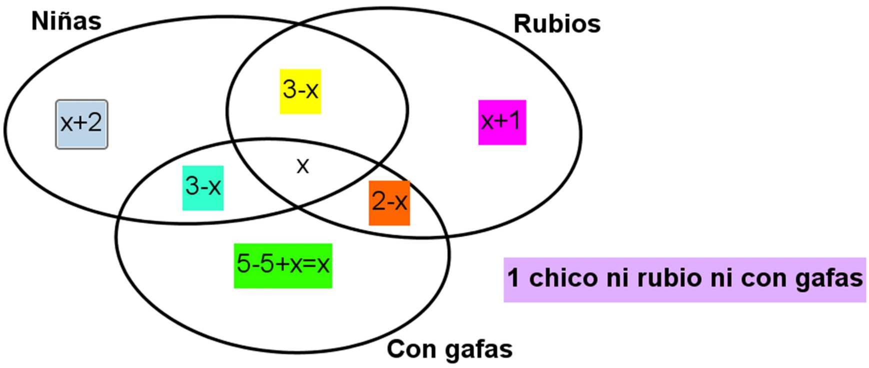
En total hay 6 rubios, de donde si sumamos x+2-x+3-x=5-x podemos deducir que el número de niños rubios sin gafas es 6-(5-x)=1+x.

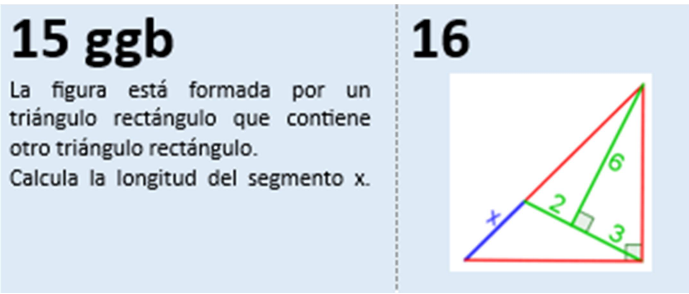
En total hay 8 niñas, con lo que el número de niñas sin gafas y no rubias será

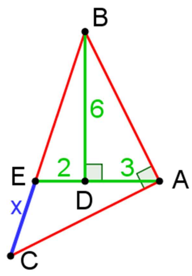
8-(3-x)-(3-x)-x=x+2

Además está el chico ni rubio ni con gafas. Si sumamos todos, el total debe ser 13:

1+3-x+3-x+2-x+ x+1+x+ x+2+x=13 →x=1 niña rubia con gafas







Solución con geogebra:

Para dibujar los triángulos, lo rotamos para que la línea EA esté sobre el eje de abscisas y la línea BD sobre el de ordenadas.

Como conocemos la longitud de los segmentos, las coordenadas de todos los puntos menos el C son conocidas: A(3,0), B(0,6), D(0,0) y E(-2,0).

Los introducimos y dibujamos todos los triángulos menos el ACE.

Para hallar C, dibujamos la recta perpendicular al segmento AB que pase por A.

Después, la recta que pasa por los puntos B y E.

El punto de corte de estas dos rectas es C(-3,-3)

Para hallar la longitud de x, solo nos falta dibujar el segmento que une C y E y medirlo. Obtenemos **3,1623.**

Solución analítica:

Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$

Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADB}, D = 90°$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADB}$

$\overline{AB} = 3\sqrt{5}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{EDB}$

$\overline{BE} = 2\sqrt{10}$

Sean $\alpha = \angle ABD, \beta = \angle DBE.$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \tan\beta = \frac{1}{3}$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

Entonces el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es isósceles.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$

$x + 2\sqrt{10} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$

$x = \sqrt{10} \cong 3{,}1623$

18**

Encontrar el número de 7 cifras más grande el cual, al dividirlo por 7, 11, 28 y 55, produce los restos 3, 7, 24 y 51, respectivamente.

19

Solución:

Notar que:

7-3=4

11-7=4

28-24=4

55-51=4

El MCM de los divisores es MCM(7,11,28, 55)=7·11·4·5= 1540

El número buscado es del tipo 1540N—4

El número de 7 dígitos más grande es 9 999 999.

Vemos qué residuo produce entre 1540:

9 999 999 : 1540 → q=6493 y R=779

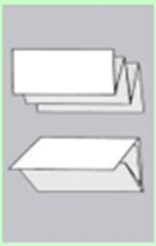
El número anterior múltiple de 1540 es: 9 999 999—779 =9 999 220

El número buscado es 9 999 220 - 4= **9 999 216**

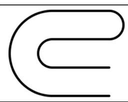
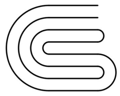
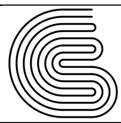
20*

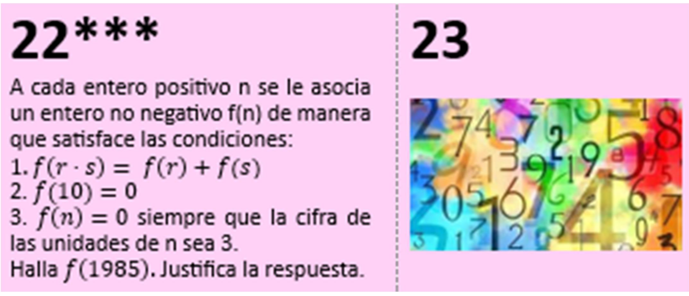
21

Una tira de papel muy fino, de 120 cm de longitud, se dobla por la mitad, quedando una tira doble, de 60 cm de longitud. Una vez doblada, se vuelve a doblar por la mitad, de forma sucesiva, hasta que queda una tira de 7,5 cm, con varias capas. ¿Cuántos dobleces tiene la tira de papel al final? ¿Cuántas capas tiene la tira de 7,5 cm de longitud?



Solución:

Veces doblada	Longitud en cm	Dobleces	Num. de capas	Imagen
0	120	0	1	
1	60	1	2	
2	30	3	4	
3	15	7	8	
4	7,5	15	16	



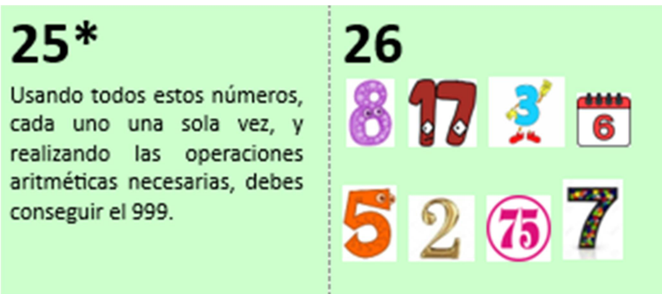
Solución:

Sea f una función tal que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisface las propiedades del enunciado.

Como $0 = f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2)+f(5) = f(2) = f(5) = 0$, por ser $f(n)$ no negativo para cualquier n elemento de los números naturales.

Ahora tenemos que $f(1985) = f(5 \cdot 397) = f(5) + f(397) = f(397)$. Ahora tenemos que buscar algún n que contenga a 397. Vemos que

$0 = f(3573) = f(3 \cdot 3 \cdot 397) = f(3) + f(3) + f(397) = f(397)$ ya que tanto 3573 como 3 tienen el dígito de las unidades igual a 3, de esto deducimos que f(1985) = 0.



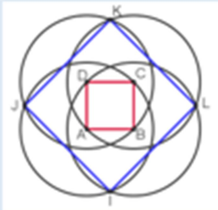
Solución:

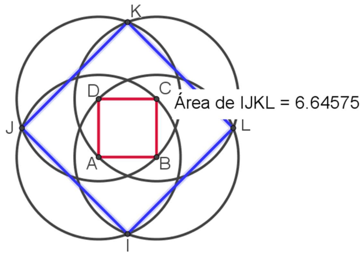
$$\left(\frac{75}{3}+2\cdot 6\right)\cdot(17+7+8-5)=(25+12)\cdot(17+10)=37\cdot 27=999$$

27 ggb

Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrado de 1 cm de lado. Con centro en cada vértice, se traza una circunferencia que pasa por el vértice opuesto.
Calcula el área del cuadrado IJKL.

28





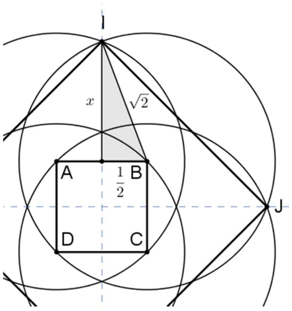
Solución con geogebra:

Para hallar el área del cuadrado IJKL usaremos la herramienta para calcular áreas.

Para hacer el dibujo seguimos los pasos:

1. Con polígono regular trazamos el cuadrado de lado 1 cm con vértices en (0,0) y (1,0).
2. Con circunferencia (centro, punto) trazamos las cuatro, tal y como indica el enunciado, centro en un vértice y pasando por el vértice opuesto.
3. Hallamos la intersección de una de las cuatro circunferencias con las dos contiguas y así obtenemos los dos vértices de uno de los lados del cuadrado.
4. Trazamos el cuadrado IJKL con polígono regular.
5. Con la herramienta área calculamos el área pedida, obteniendo 6,64575 cm^2.

Solución analítica:



La diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado mide $\sqrt{2}$ cm.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\sqrt{2}^2 \quad\rightarrow\quad x^2+\frac{1}{4}=2 \quad\rightarrow\quad x^2=\frac{7}{4} \quad\rightarrow\quad x=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}\,cm$$

La diagonal del cuadrado IJKL mide: $d=\frac{\sqrt{7}}{2}+1+\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}+1\,cm$

El área del cuadrado, conociendo la diagonal es:

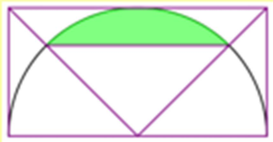
$$A=\frac{d^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}{2}=\frac{7+2\sqrt{7}+1}{2}=4+\sqrt{7}\cong 6{,}65\ cm^2$$

29**

La figura está formada por un rectángulo que contiene una semicircunferencia de 10 cm de diámetro.

Calcula el área del segmento circular sombreado.

30



Solución:

Sea el rectángulo ABCD de lados $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 5$

$\overline{OB} = \overline{OQ} = 5, \angle DOC = 90°$

EL área del segmento circular es:

$$S_{sombreada} = \frac{1}{4}\pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 5^2 = \frac{25}{4}(\pi - 2) \approx 7.13495$$