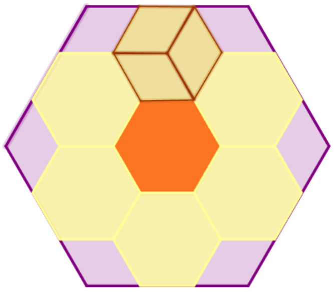
ENERO 2024 RESUELTOS



Solución:

El hexágono grande está formado por siete hexágonos pequeños y seis rombos. Cada uno de los hexágonos puede descomponerse en tres rombos, tal y como se ve en el dibujo, por tanto, el hexágono grande, está formado por 7·3+6=27 rombos.

Sabemos que el hexágono cubre 612 cm^2, de donde deducimos que uno de los rombos ocupará 612:27=68/3 cm^2.

El hexágono naranja ocupa lo mismo que tres rombos, es decir, 3·68/3=68 cm^2.

Otra forma de resolverlo:

Sería considerar que los seis rombos equivalen a dos hexágonos, por lo que el hexágono grande estará formado por 9 hexágonos pequeños, siendo el área de cada uno 612:9=68 cm^2.

Solución:

Llamamos A a la suma de los dos números elegidos por Ana, y B al número elegido por Blas.

Ana tiene $C_{5,2} = 10$ formas distintas de elegir los dos números. La menor suma que puede obtener es 3 y la mayor 9.

El 3 lo obtiene con 1 y 2.

El 4 lo obtiene con 1 y 3.

El 5 lo obtiene con 1 y 4 o con 2 y 3.

El 6 lo obtiene con 1 y 5 o con 2 y 4.

El 7 lo obtiene con 2 y 5 o con 3 y 4.

El 8 lo obtiene con 3 y 5.

El 9 lo obtiene con 4 y 5.

Blas también tiene 10 opciones.

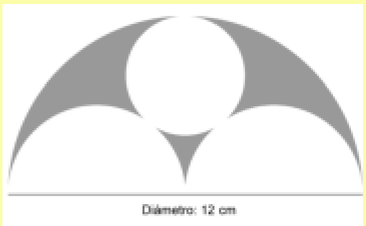
Lo que queremos calcular es

$P(A<B)=P(A=3)\cdot P(B>3)+ P(A=4)\cdot P(B>4)+...+ P(A=9)\cdot P(B>9)=$

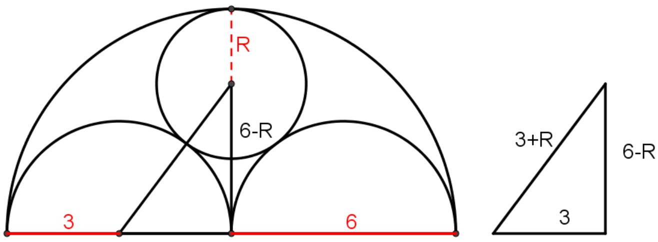
$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$

5** **6**

Calcula el área de la zona sombreada.



Solución:



Para calcular el área de la zona sombreada empezaremos por calcular el área del semicírculo grande para después restarle el área que ocupa la zona no sombreada.

Para hallar el área del círculo pequeño, necesitamos conocer el radio.

Si unimos los centros de las tres circunferencias de distinto tamaño obtenemos un triángulo rectángulo. Con Pitágoras podemos calcular el radio de la circunferencia pequeña.

$$(3+R)^2=(6-R)^2+3^2 \quad\rightarrow\quad 9+6R+R^2=36-12R+R^2+9 \quad\rightarrow\quad 18R=36$$

$$\rightarrow\quad R=2$$

Área semicírculo grande $= \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = 18\pi\ cm^2$

Área dos semicírculos medianos $= \frac{\pi \cdot 3^2}{2} \cdot 2 = 9\pi\ cm^2$

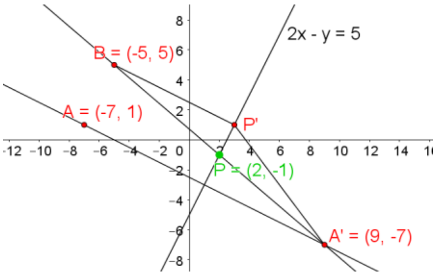
Área círculo pequeño $= \pi \cdot 2^2 = 4\pi\ cm^2$

Área sombreada $= 18\pi - 9\pi - 4\pi = 5\pi \cong 15{,}71\ cm^2$

8 ggb 9

Determina un punto P de la recta $2x - y - 5 = 0$ tal que la suma de las distancias desde P a los puntos $A(-7,1)$ y $B(-5,5)$ sea mínima.

Solución con geogebra:



Empezamos por introducir en la barra de entrada la función y los dos puntos. Al hacerlo, vemos que los dos puntos están al mismo lado de la recta.

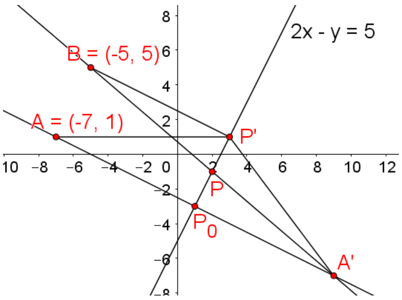
Si dibujamos el punto simétrico de cualquiera de los dos respecto a la recta

$2x - y - 5 = 0$, la distancia del original a cualquier punto de la recta coincidirá con la distancia de simétrico al mismo punto, al ser la recta la mediatriz del segmento que une ambos puntos. Lo haremos con el A (daría igual hacerlo con el B).

Si ahora tomamos un punto P cualquiera de la recta y lo unimos con A' y con B, es evidente que la suma de las longitudes de ambos segmentos es mínima cuando ambos están alineados.

Para hallar el punto que buscamos, basta trazar el segmento que une A' con B y hallar la intersección de este con la recta. Obtendremos que es el punto $P(2, -1)$.

Solución geométrica:



Notamos que los puntos $A(-7,1), B(-5,5)$ pertenecen al mismo semiplano que determina la recta $2x - y - 5 = 0$ puesto que al sustituir las coordenadas de los dos puntos en la ecuación general de la recta tienen el mismo signo:

$2 \cdot (-7) - 1 - 5 < 0, 2 \cdot (-5) - 5 - 5 < 0$

El punto P es la intersección de la recta $2x - y - 5 = 0$ y la recta que pasa por B y el punto A' simétrico de A respecto de la recta $2x - y - 5 = 0$, puesto que si P' pertenece a la recta $2x - y - 5 = 0$

La recta es mediatriz del segmento $\overline{AA'}$ entonces, $\overline{AP'} = \overline{A'P'}$

$\overline{AP'} + \overline{BP'} = \overline{A'P'} + \overline{BP'} \geq \overline{AA'} = \overline{AP} + \overline{BP}$

Calculamos el punto P_0 proyección de A sobre la recta $2x - y - 5 = 0$.

El vector director de la recta $2x - y - 5 = 0$ es $v = (1,2)$

$P_0(x, 2x - 5)$

$\overrightarrow{AP_0} = (x - 7, 2x - 6)$

Los vectores $\overrightarrow{AP_0} = (x + 7, 2x - 6), v(1,2)$ son ortogonales:

$\overrightarrow{AP_0} \cdot v = 0$

$(x + 7, 2x - 6) \cdot (1,2) = 0$

$x + 7 + 4x - 12 = 0$

Resolviendo la ecuación, $x = 1$

El punto proyección es, $P_0(1, -3)$

El punto simétrico $A'(x, y)$ cumple $\overrightarrow{AA'} = 2 \cdot \overrightarrow{AP_0}$

$(x + 7, y - 1) = 2 \cdot (8, -4)$

Resolviendo la ecuación:

$\begin{cases} x = 9 \\ y = -7 \end{cases}$, entonces, $A'(9, -7)$

$\overrightarrow{A'B} = (-14, 12)$

La ecuación de la recta que pasa por A' y B tiene ecuación: $r_{A'B} \equiv \frac{x+5}{-7} = \frac{y-5}{6}$

l punto que buscamos es la intersección de las rectas

$$r_{A'B} \equiv \frac{x+5}{-7} = \frac{y-5}{6}, 2x - y - 5 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por ambas rectas:

$$\begin{cases} \frac{x+5}{-7} = \frac{y-5}{6} \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Las coordenadas del punto son $P(2, -1)$

La distancia mínima es: $\overline{A'B} = \sqrt{(-14)^2 + 12^2} = 2\sqrt{85}$

Solución análisis matemático:

Sea $P(x, 2x-5)$ un punto de la recta $2x - y - 5 = 0$

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+7)^2 + (2x-6)^2}, \overline{BP} = \sqrt{(x+5)^2 + (2x-10)^2}$$

La función a optimizar es:

$$d(x) = \sqrt{(x+7)^2 + (2x-6)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (2x-10)^2}, x \geq 0$$

Calculemos su derivada:

$$d'(x) = \frac{5x-5}{\sqrt{5x^2 - 10x + 85}} + \frac{5x-15}{\sqrt{5x^2 - 30x + 125}}$$

$$d'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{5x^2 - 10x + 85}} + \frac{x-3}{\sqrt{5x^2 - 30x + 125}} = 0$$

$$(x-1)\sqrt{5x^2 - 30x + 125} = -(x-3)\sqrt{5x^2 - 10x + 85}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$64x = 128$$

$$x = 2$$

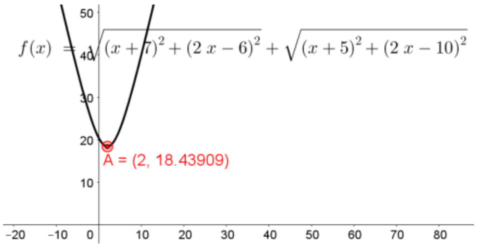
$$d''(2) > 0$$

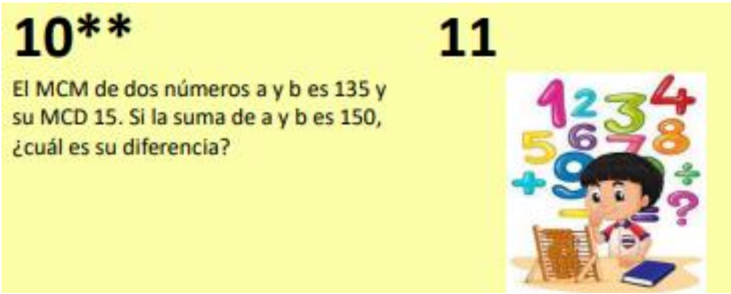
Entonces, $x = 2$ és un mínimo.

El punto que buscamos es $P(2,-1)$

La distancia mínima es:

$d(2)=\sqrt{85}+\sqrt{85}=2\sqrt{85}$





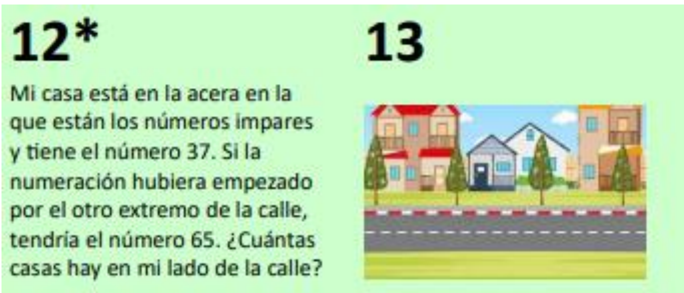
Solución:

Sabiendo que se cumple que $MCM(a,b)\cdot MCD(a,b)=a\cdot b$

$$a+b=150 \quad \rightarrow \quad b=150-a$$

$a(150-a)=135\cdot 15 \ \rightarrow a^2-150a+2025=0 \ \rightarrow a\ y\ b$ son 135 y 15 $\rightarrow$

$$a-b=135-15=\mathbf{120}$$



Solución:

Si tiene el número 37, quiere decir que a un lado están las viviendas numeradas con impares entre el 1 y el 35, es decir, 18 viviendas.

Al numerar desde el otro lado tiene el 65, por lo que en ese lado tienen los números impares desde el 1 hasta el 63, es decir 32 viviendas.

El total de casas se obtendrá sumando estas dos cantidades y añadiendo mi casa:

18+32+1= **51** casas.

15* **16**

En un salón de celebraciones hay tantas mesas como sillas en cada mesa. El número total de sillas tiene 3 cifras, la suma de las cuales es igual a 10. ¿Cuántas sillas hay en el salón?

Solución:

Si n es el número de mesas, en cada mesa hay n sillas, así que el número total de sillas será el obtenido al multiplicar el número de mesas por el de sillas que tiene cada mesa, es decir $n \cdot n = n^2$.

Buscamos un cuadrado perfecto de tres cifras la suma de las cuales es 10. El cuadrado más pequeño de tres cifras es $100=10^2$, y el mayor $961=31^2$.

Calculamos los cuadrados intermedios para ver cuál cumple la condición de que la suma de sus cifras sea 10:

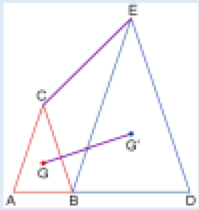
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
suma	1	4	9	16	16	9	13	19	9	10	4

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
n^2	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961
suma	9	16	16	18	13	19	18	19	13	9	16

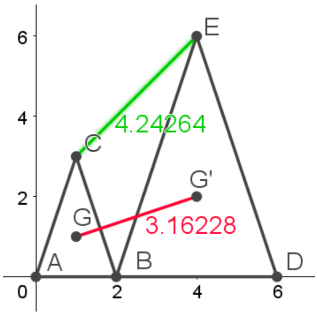
El único caso en que la suma es 10 es el del 361, cuadrado del 19, de donde deducimos que el número de sillas será 361 repartidas entre las 19 mesas, cada una de las cuales tiene 19 sillas.

17 ggb **18**

El triángulo ABC es un triángulo isósceles de 2 cm de base y 3 cm de altura. El triángulo BDE es un triángulo semejante a ABC con razón de semejanza 2. Calcula la distancia entre los vértices C y D.
Calcula la distancia entre los baricentros, G y G', de cada uno de los triángulos.



Solución con geogebra:



Dibujamos el primer triángulo con vértices en A(0,0), B(2,0) y C(1,3).

Para el segundo triángulo, siendo la razón de semejanza 2, la base medirá 4 y la altura 6. Lo trazamos con vértices en B(2,0), D(6,0) y E(4,6).

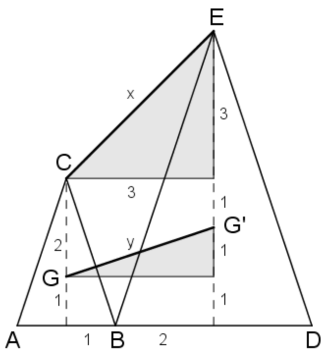
Para hallar los baricentros, en la barra de entrada introducimos

Baricentro(<Polígono>) sustituyendo en cada triángulo <Polígono> por el nombre del triángulo (t1 y t2).

Solo falta dibujar los dos segmentos que queremos medir y en propiedades, pestaña Básico, seleccionar que de cada segmento se vea el valor.

Obtenemos que el segmento que une C y E mide 4,24264 y el que une los dos baricentros 3,16228.

Solución analítica:



La distancia entre C y E se calcula con el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \cong 4{,}24\ cm$$

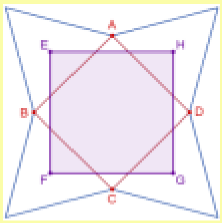
La distancia del baricentro al vértice es $2/3$ de la longitud de la mediana y la distancia del baricentro al punto medio del lado es $1/3$ de la longitud de la mediana.

Según esto, la distancia entre los dos baricentros es:

$$y^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{10} \cong 3{,}16\ cm$$

19** **20**

Utilizando los lados del cuadrado ABCD se construyen cuatro triángulos equiláteros. Uniendo los ortocentros de estos cuatro triángulos se construye el cuadrado EFGH. Calcula el área del cuadrado EFGH sabiendo que el lado del cuadrado ABCD mide 6 cm.



Solución:

Es más fácil calcular la diagonal del cuadrado que el lado.

La longitud de la mediana, que coincide con la altura, del triángulo de 6 cm de lado es:

$$h^2 + 3^2 = 6^2 \quad \rightarrow \quad h^2 + 9 = 36 \quad \rightarrow \quad h^2 = 27 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\ cm$$

La distancia de baricentro, que coincide con el ortocentro, al punto medio del lado es $1/3$ de la longitud de la mediana:

$$\frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\ cm$$

La longitud de la diagonal del cuadrado es:

$$d = \sqrt{3} + 6 + \sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}\ cm$$

El área del cuadrado, conociendo la diagonal es:

$$A = \frac{d^2}{2} = \frac{\left(6 + 2\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{36 + 24\sqrt{3} + 12}{2} = 24 + 12\sqrt{3} \cong 44{,}78\ cm^2$$

22 ** **23**

Tres números naturales distintos están en progresión aritmética. Si dividimos la suma de sus cubos entre la suma de los tres números, el cociente es 81. Hállalos.

Solución:

Si los números están en progresión aritmética, podemos representarlos como

$x-d, x, x+d$.

La relación que indica el problema es $\frac{(x-d)^3+x^3+(x+d)^3}{x-d+x+x+d}=81$

$$\frac{(x^3-3x^2d+3xd^2-d^3)+x^3+(x^3+3x^2d+3xd^2+d^3)}{3x}=81 \quad \rightarrow$$

$$3x^3+6xd^2=3x\cdot 81 \quad \rightarrow \quad 3x(x^2+2d^2)=3x\cdot 81$$

De esta ecuación obtenemos dos soluciones, pero x=0 no es válida porque los tres números son naturales, y si el central es 0, debe haber un negativo, por lo que la única opción posible es $x^2+2d^2=81$

Al ser 81 impar y $2d^2$ par, necesariamente x^2 es impar, natural y menor que 81.

Al ser los tres números naturales, d también debe serlo.

Con esto, las opciones posibles son:

x^2	$x^2+2d^2=81$	$2d^2$	d
1	$1+2d^2=81$	$2d^2$ =80	$\sqrt{40}$
9	$9+2d^2=81$	$2d^2$ =72	$\sqrt{36}=6$
25	$25+2d^2=81$	$2d^2$ =56	$\sqrt{28}$
49	$49+2d^2=81$	$2d^2$ =32	$\sqrt{16}=4$

Solo dos opciones nos dan valor entero para d.

Los tres números serían:

x^2	d	$x-d$	x	$x+d$
9	6	-3	3	9
49	4	3	7	11

Sólo es válido el segundo caso (3, 7, 11) ya que en el otro (-3, 3 9) hay un número que no es natural y debían serlo los tres.

24*

Un martes 13 es considerado como un martes negro. ¿Cuál es el máximo número de martes negros en un año? ¿Y el mínimo?

25

Solución:

Antes que nada, debemos tener en cuenta que hay dos tipos de años, los bisiestos y los que no lo son.

Después, tendremos en cuenta cuantos días pasan desde el 13 de un mes al del siguiente, y en base a esto, podremos saber que día de la semana es.

Llamaremos a los días de la semana A, B, C, D, E, F y G

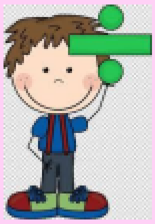
	Año normal 365 días		Año bisiesto 366 días	
mes	Día 13	Días hasta el 13 siguiente	Día 13	Días hasta el 13 siguiente
Enero	A	31=28+3	A	31=28+3
Febrero	A+3=D	28	A+3=D	29=28+1
Marzo	D	31=28+3	D+1=E	31=28+3
Abril	D+3=G	30=28+2	E+3=A	30=28+2
Mayo	G+2=B	31=28+3	A+2=C	31=28+3
Junio	B+3=E	30=28+2	C+3=F	30=28+2
Julio	E+2=G	31=28+3	F+2=A	31=28+3
Agosto	G+3=C	31=28+3	A+3=D	31=28+3
Septiembre	C+3=F	30=28+2	D+3=G	30=28+2
Octubre	F+2=A	31=28+3	G+2=B	31=28+3
Noviembre	A+3=D	30=28+2	B+3=E	30=28+2
Diciembre	D+2=F		E+2=G	

Se ve que las siete letras que hemos asignado a los días de la semana aparecen tanto en un año normal como bisiesto. De esto podemos deducir que sea cual sea la letra asignada al martes, al menos habrá un martes 13 a lo largo del año.

También notamos que el máximo de veces que aparece una letra es tres, que será el máximo de martes 13 en un año.

26***   27**

Encuentra el menor múltiplo de 101 el cual al dividirlo por 40, 50, 60, 70 y 80 deja un resto de 33 en todas las divisiones.



Solución:

Buscamos el MCM de los divisores con divisiones simultáneas

40	50	60	70	80	10
4	5	6	7	8	2
2	5	3	7	4	2
1	5	3	7	2	

Como la última fila ya son PESI (primos entre sí) →

MCM=10·2·2·5·3·7·2= 8400

El número buscado, N, es de la forma N=8400k+33

Veamos qué resto deja 8400 entre 101→ 8400:101→ C=83 y R=17

El múltiplo de 101 anterior es 8400-17=8383

N=8400k+33=8383k+(17k+33)

Hemos de buscar la k que produzca un paréntesis múltiplo de 101:

k=1 → 17k+33=50

k=2 → 17k+33=67

k=3→ 17k+33=84

k=4 → 17k+33=101

Por tanto, el número buscado es N=8400k+33= 8400·4+33= **33633**

29***

Considérese el polinomio $p(n) = (n^2 - n + 1)(n^2 + 3n + 1)$. Halla todos los enteros *n* para los cuales p(n) es un número primo positivo.

30

Solución:

Dado que un número primo *p*, sólo es divisible por p, -p, 1, -1, tenemos que considerar que uno de los dos factores de p(n) sea igual a 1 o -1. Ahora,

$n^2 - n + 1 = 1$ equivale a $n(n - 1) = 0$, lo cual arroja raíces $n = 0$ o $n = 1$.

$n^2 - n + 1 = -1$ devuelve raíces complejas, lo cual no satisface el enunciado inicial.

$n^2 + 3n + 1 = 1$ equivale a $n(n + 3) = 0$, ocurre si $n = 0$ o $n = -3$.

Finalmente $n^2 + 3n + 1 = -1$ se factoriza como $(n + 1)(n + 2) = 0$, por simple inspección sus raíces son $n = -1$ y $n = -2$.

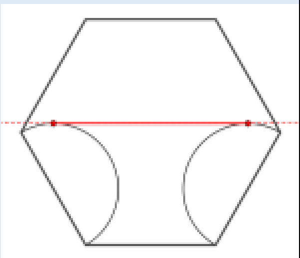
Ahora sólo falta evaluar p(n) en cada uno de los candidatos, que son las soluciones obtenidas previamente.

Vemos que $p(0) = 1$, $p(1) = 5$, $p(-3) = 13$, $p(-2) = -7$ y $p(-1) = -3$.

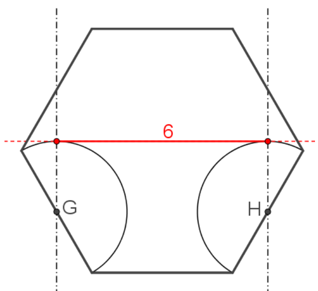
Con esto concluimos que p(n) es un número primo positivo si y solo si $n = 1$ o $n = -3$.

31 ggb

La figura está formada por un hexágono regular de lado 4, y dos semicircunferencias.
Calcula la medida del segmento tangente a las dos semicircunferencias.



Solución con geogebra:



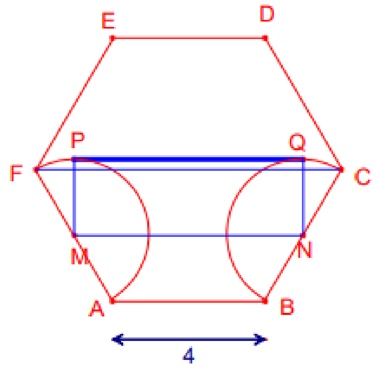
Dado que el lado del hexágono debe medir 4, colocaremos los vértices de la base en los puntos A(0,0) y B(4,0). Con *Polígono regular* trazamos el hexágono.

Para dibujar las dos semicircunferencias, hallamos el punto medio de los lados correspondientes, ya que coinciden con los centros.

La recta tangente siempre es perpendicular al radio y, al ser horizontal, si trazamos las perpendiculares a la base por los puntos medios de los lados (G y H), hallaremos los puntos en que la tangente toca a cada una de las semicircunferencias.

Basta trazar el segmento que los une y en *Propiedades* seleccionar que se vea el valor: 6.

Solución sin geogebra:



Sea el hexágono regular $ABCDEF$ de lado $\overline{AB} = 4$. Sean M y N los centros de las semicircunferencias. Sea $\overline{PQ}$ el segmento de tangencia. $MNQP$ es un rectángulo. Como $\overline{MN}$ es la paralela mediana de los segmentos $\overline{AB} = 4$, $\overline{FC} = 8$:

$$\overline{PQ} = \overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{FC}}{2} = \frac{4+8}{2} = 6$$