PROBLEMAS DE FEBRERO 2024 RESUELTOS

1***

A un congreso asisten 201 científicos de cinco nacionalidades distintas. Se sabe que en cada grupo de seis al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que es posible encontrar un grupo de cinco personas de la misma edad, nacionalidad y sexo.

Solución:

De las 201 personas podemos asegurar que al menos 101 son del mismo sexo.

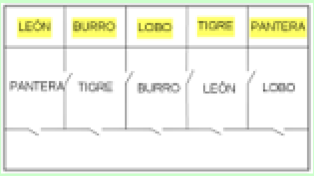
De estas 101 personas, al haber sólo cinco nacionalidades posibles y ser 101=5·20+1, debe haber al menos una nacionalidad con 21 representantes.

El que en cada grupo de seis al menos dos tengan la misma edad, nos indica que no hay más de cinco edades diferentes, de donde si elegimos a los 21 que ya tenemos con el mismo sexo y la misma nacionalidad, como 21=5·4+1, debe haber al menos 5 con la misma edad, que era lo que buscábamos.

2*

En un zoo colocaron a 5 animales en jaulas contiguas con puertas que las comunican, pero por error los animales acabaron en jaulas que no les correspondían. ¿Cómo pueden ser trasladados sin que pase nada?

3



Solución:

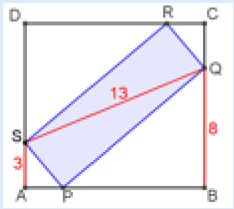
Pasos a seguir:

1. Sacamos la pantera por la puerta que da al pasillo y la dejamos allí con todas las puertas de acceso al pasillo cerradas.
2. Desplazamos a los cuatro animales que quedan en las jaulas una jaula a la izquierda de la que ocupan. Con esto, el burro está en su jaula.
3. Metemos a la pantera en la jaula que le corresponde, ya que ha quedado vacía.
4. Sacamos el león al pasillo.
5. Movemos al tigre y al burro a la jaula que tienen a la derecha.
6. Metemos al león en su jaula.
7. Sacamos al tigre al pasillo.
8. El burro vuelve a su jaula.
9. Pasamos al lobo a su jaula (a la izquierda de la que ocupa).
10. Metemos al tigre en su jaula.

5 ggb

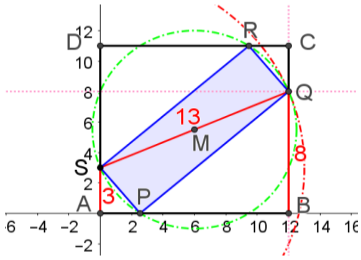
El rectángulo PQRS está inscrito en el rectángulo ABCD como indica la figura. Si AS=3, BQ=8 y SQ=13, halla el área de los dos rectángulos.

6



Solución con geogebra:

Pasos para hacer el dibujo:



1. Introducimos el punto S(0,3).
2. Trazamos la circunferencia centrada en S con radio 13.
3. Introducimos la recta y=8.
4. Hallamos el punto Q como intersección de la circunferencia y la recta del paso anterior.
5. Hallamos el punto medio del segmento SQ.
6. Trazamos la circunferencia centrada en M que pase por Q.
7. La intersección de esta circunferencia con el eje de abscisas nos da las coordenadas de P.
8. Con la recta por P y M hallamos R (intersección de la recta y la circunferencia centrada en M).
9. Trazamos el rectángulo PQRS. En la vista algebraica vemos que la superficie que ocupa es 48,6795 u^2.
10. Para el otro rectángulo trazamos la perpendicular al eje de abscisas por Q y la perpendicular al eje de ordenadas por R.
11. Trazamos el rectángulo. Su área es 132 u^2.

Solución analítica:

Si trazamos la perpendicular al eje de ordenadas por el punto S obtendremos un triángulo rectángulo del que conocemos que la hipotenusa mide 13 y un cateto 5 (8-3=5).

Usando el teorema de Pitágoras calculamos el otro cateto: $\sqrt{13^2-5^2}=12$. Coincide con la longitud de la base del rectángulo exterior.

Como CQ mide lo mismo que AS, la altura del rectángulo será 3+8=11.

El área del rectángulo ABCD será 11·12=132 u^2.

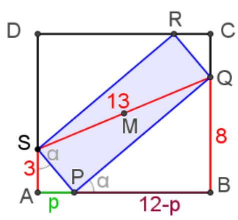
Para hallar el área del rectángulo PQRS necesitamos saber las coordenadas de $P(p,0)$. Teniendo en cuenta que los triángulos son iguales dos a dos y semejantes, podemos plantear:

$$\frac{12-p}{8}=\frac{3}{p} \quad\rightarrow\quad 12p-p^2=24 \quad\rightarrow\quad p=\frac{12\pm\sqrt{144-4\cdot 1\cdot 24}}{2}=6\pm 2\sqrt{3}$$

De las dos soluciones nos interesa $6-2\sqrt{3}$.

$$A_{PQRS}=A_{ABCD}-2\left(A_{APS}+A_{PQB}\right)=132-2\left(\frac{3p}{2}+\frac{(12-p)8}{2}\right)=$$

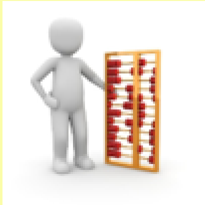
$$132-\left[3\cdot\left(6-2\sqrt{3}\right)+8\left(6+2\sqrt{3}\right)\right]=66-10\sqrt{3}\cong 48.6795\ u^2$$



7**

Halla dos números naturales cuyos cuadrados se diferencian en 133 unidades.

8



Solución:

Llamamos x e y a los dos números (Suponemos que $x > y$).

Debe cumplirse que $x^2 - y^2 = 133$

Si factorizamos, obtendremos $(x + y)(x - y) = 19 \cdot 7$

Como son dos números naturales y se cumple $x > y$, esto nos dice que: $\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 7 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos que $x = 13$ y $y = 6$,que son los números buscados.

9***

Elegimos al azar cuatro números a, b, c y d entre los primeros 2024 números naturales.
¿Cuál es la probabilidad de que $a \cdot d - b \cdot c$ sea un número par?

10

Solución:

Si elegimos al azar un número entre los primeros 2024 números naturales, la probabilidad de que sea par es ½.

Para que al restar dos cantidades el resultado sea par es necesario que las dos tengan la misma paridad.

Para que un producto sea impar es necesario que los dos factores sean impares. La probabilidad sería $P(a \cdot b \text{ sea impar}) = P(a \text{ es impar}) \cdot P(b \text{ es impar}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

De aquí deducimos que la probabilidad de que el producto sea par será:

$$P(a \cdot b \text{ es par}) = 1 - P(a \cdot b \text{ sea impar}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

La probabilidad pedida será:

$$P(a \cdot d - b \cdot c \text{ sea par}) =$$

$$= P(a \cdot d \text{ sea impar y } b \cdot c \text{ sea impar}) + P(a \cdot d \text{ sea par y } b \cdot c \text{ sea par}) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

12**

Calcula la suma de las cifras del número $\overline{MAR}$ si es el menor de los números de tres dígitos que verifica $\overline{MAR} + 2\overline{MAR} + 3\overline{MAR} + \ldots + 20\overline{MAR} = \dot{119}$ (múltiplo de 119).

13

Solución:

$$\overline{MAR} + 2\overline{MAR} + 3\overline{MAR} + \ldots\ldots\ldots + 20\overline{MAR} = \dot{119}$$

$$\overline{MAR} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 20) = k \cdot 119$$

$\overline{MAR} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = k \cdot 119$ → $\overline{MAR} \cdot 210 = K \cdot 119$ → $\overline{MAR} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 = k \cdot 7 \cdot 17$ →

$30 \cdot \overline{MAR} = 17 \cdot k$ → Como 30 no es múltiplo de 17 → $\overline{MAR}$ es múltiplo de 17

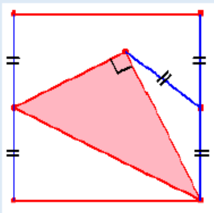
$\overline{MAR} = 17 \cdot k$ dando valores a k buscamos el menor número de tres dígitos

Si k=6 → $\overline{MAR} = 17 \cdot 6 = 102$ → M+A+R=1+0+2= **3**

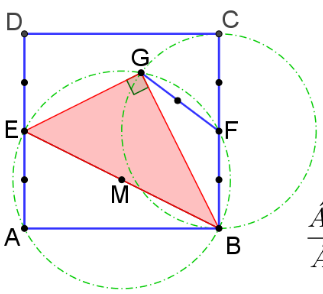
14 ggb

La figura está formada por un cuadrado que contiene un triángulo rectángulo. Calcula la proporción entre el área del triángulo rectángulo y el área del cuadrado.

15



Solución con geogebra:



$$\frac{\acute{A}rea\ tri\acute{a}ngulo}{\acute{A}rea\ cuadrado} = \frac{19.2}{64} = 0.3$$

Pasos:

1. Dibujamos el cuadrado con polígono regular.
2. Hallamos los puntos medios de los lados verticales.
3. Unimos los puntos B y E para trazar la hipotenusa del triángulo.
4. Hallamos el punto medio de este segmento (M).
5. Como un triángulo inscrito en una circunferencia cuya hipotenusa coincida con el diámetro de la circunferencia siempre es rectángulo, trazamos la circunferencia centrada en M que pase por B. El vértice G del triángulo está sobre esa circunferencia.

6. Como la distancia entre F y C coincide con la distancia entre F y G, si trazamos la circunferencia centrada en F que pase por C, también contendrá al punto G.
7. Hallamos G con la intersección de las dos circunferencias.
8. Trazamos el triángulo.
9. Ya tenemos en la vista algebraica las áreas del triángulo y del cuadrado. Al dividirlas, el resultado es 0,3.

Solución analítica:

Supongamos que AB=2

Si situamos A en el origen de coordenadas (0,0), el resto de los puntos tendrán las coordenadas siguientes:

B(2,0), C(2,2), E(0,1), F(2,1), M(1, 0.5)

Para hallar G usaremos que está en la intersección de las dos circunferencias: una centrada en F y con radio 1 y la otra centrada en M y con radio $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (Hallado aplicando Pitágoras al triángulo ABE).

Las ecuaciones serán

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-0.5)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + 0.25 = 1.25 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 1 \end{cases}$$

Si restamos las dos ecuaciones obtenemos $2x + y - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4 - 2x$

Sustituimos en la segunda circunferencia (daría igual hacerlo en la primera):

$$x^2 - 4x + 4 + (4-2x)^2 - 2(4-2x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + 16 - 16x + 4x^2 - 8 + 4x = 0$$

$$\rightarrow \quad 5x^2 - 16x + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5} = \frac{16 \pm 4}{10} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

La primera solución corresponde a B y la segunda a G.

Hallamos la ordenada de G: $\quad y = 4 - 2x \quad \rightarrow \quad y = 4 - 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$

Ya tenemos las coordenadas de G$\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Al ser el triángulo rectángulo, uno de los catetos sería la base y el otro la altura. Los hallamos con la distancia entre dos puntos:

$$d(E,G) = \sqrt{\left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

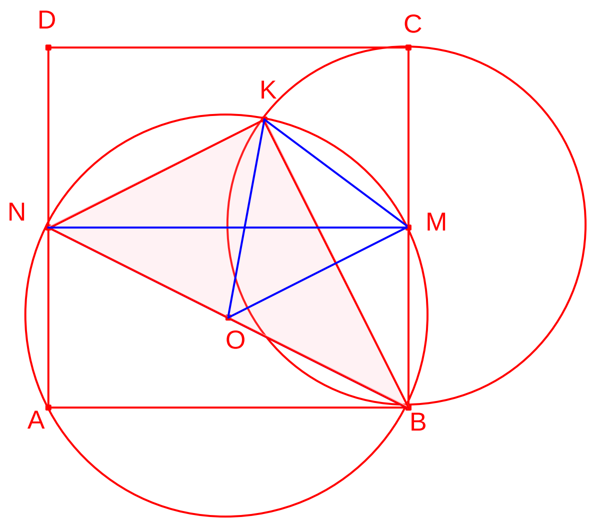
$$d(B,G) = \sqrt{\left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{5}$$

$$A_{cuadrado} = 2^2 = 4$$

De donde $\frac{A_{triángulo}}{A_{cuadrado}} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Otra forma:



AB=2; MN=MK=1; BN=$\sqrt{5}$

El cuadrilátero NBMK es cíclico. OK=OM=ON=$\frac{\sqrt{5}}{2}$

Ángulo KOM = ángulo MOB = α

Ángulo KNB = α

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo KOM:

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$1 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \cos\alpha$$

De donde se obtiene que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ y, por tanto, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$

$$KN = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}; BK = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{5}$$

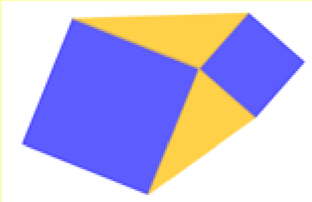
$$A_{cuadrado} = 2^2 = 4$$

$$\frac{A_{triángulo}}{A_{cuadrado}} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10}$$

16**

En el dibujo hay dos cuadrados y dos triángulos. ¿Qué relación hay entre las áreas de los dos triángulos?

17

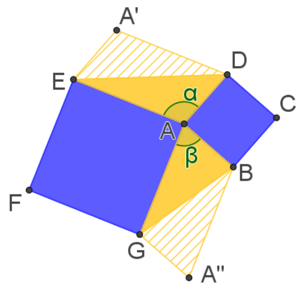


Solución:

Las áreas son iguales.

Si observamos el dibujo, al ser dos cuadrados, está claro que se cumple que $\alpha + \beta = 180°$.

Si trazamos los paralelogramos ADA'E y ABA''G, es evidente que son semejantes, ya que tienen lados de la misma longitud (los lados de los dos cuadrados) y ángulos iguales (α y β). Las áreas de los dos paralelogramos son iguales y, por tanto, también las de los triángulos.



19 ***

Dada la función |$f(x)=|3x-1|$, halla todos los valores de x para los que se cumple f(f(x)) = x.

20

Solución:

Buscamos los valores de x para los que se cumple:

$$f\big(f(x)\big) = f(|3x-1|) = |3 \cdot |3x-1| - 1| = \big||9x-3| - 1\big| = x$$

Al haber dos valores absolutos, tendremos que considerar varios casos, según sea positiva o negativa la expresión de la que calculamos el valor absoluto:

<u>Caso 1</u>: $9x - 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{1}{3}$

Nuestra ecuación quedará: $|9x - 3 - 1| = x \quad \rightarrow \quad |9x - 4| = x$

Volvemos a tener dos opciones según el valor de $9x - 4$:

<u>Caso 1a</u>: $9x - 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{4}{9} \geq \frac{1}{3}$

Podemos eliminar el valor absoluto: $9x - 4 = x \quad \rightarrow \quad 8x = 4 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} > \frac{4}{9}$, por lo que es una solución válida.

<u>Caso 1b</u>: $9x - 4 < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{4}{9}$

Para eliminar el valor absoluto debemos cambiar signos:

$$|9x-4| = -9x+4 = x \quad \rightarrow \quad 4 = 10x \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{5}$$

Para que sea válida debe cumplirse $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{5} < \frac{4}{9}$ o lo que es lo mismo $\frac{15}{45} \leq \frac{18}{45} < \frac{20}{45}$ que es cierto evidentemente. Tenemos la segunda solución $x = \frac{2}{5}$

Caso 2: $9x - 3 < 0 \quad \rightarrow \quad x < \frac{1}{3}$

Para eliminar el valor absoluto de $|9x-3|$ debemos cambiar signos:

$$\big||9x-3| - 1\big| = x \quad \rightarrow \quad |-9x+3-1| = x \quad \rightarrow \quad |-9x+2| = x$$

Volvemos a tener dos opciones según el valor de $-9x+2$:

Caso 2a: $-9x+2 > 0 \quad \rightarrow \quad x < \frac{2}{9} < \frac{1}{3}$

Podemos eliminar el valor absoluto de $|-9x+2|$:

$-9x+2 = x \quad \rightarrow \quad -9x+2 = x \quad \rightarrow \quad 10x = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{5}$

Para que sea válida debe cumplirse $\frac{1}{5} < \frac{2}{9}$ o lo que es lo mismo $\frac{9}{45} < \frac{10}{45}$ que es

cierto evidentemente. Tenemos la tercera solución $x = \frac{1}{5}$

Caso 2b: $-9x+2 < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} > x > \frac{2}{9}$

Podemos eliminar el valor absoluto de $|-9x+2|$ cambiando signos:

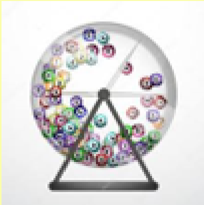
$$9x - 2 = x \quad \rightarrow \quad 8x = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$

Para que sea válida debe cumplirse $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{2}{9}$ o lo que es lo mismo $\frac{12}{36} > \frac{9}{36} > \frac{8}{36}$ que es cierto, de donde obtenemos la cuarta solución: $x = \frac{1}{4}$

21**

Dados cuatro números elegimos tres, calculamos su media y a la media obtenida le sumamos el que falta. Esto se puede hacer de 4 formas. Si obtenemos como resultados 17, 21, 23 y 29 ¿Cuál es el mayor de los cuatro números elegidos?

22



Solución:

Llamamos a los cuatro números $a, b, c\ y\ d$. Traducimos a ecuaciones las condiciones que nos da el enunciado:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b+c}{3}+d=17 \\ \dfrac{a+b+d}{3}+c=21 \\ \dfrac{a+c+d}{3}+b=23 \\ \dfrac{b+c+d}{3}+a=29 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c+3d=3\cdot 17 \\ a+b+d+3c=3\cdot 21 \\ a+c+d+3b=3\cdot 23 \\ b+c+d+3a=3\cdot 29 \end{cases}$$

Si sumamos las cuatro ecuaciones obtenemos

$$6a+6b+6c+6d=3\cdot(17+21+23+29)=3\cdot 90 \rightarrow \ a+b+c+d=45$$

Si sustituimos esto en las cuatro ecuaciones anteriores, obtenemos

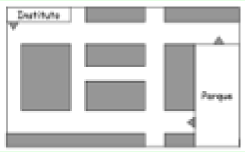
$$\begin{cases} 45+2d=3\cdot 17 \\ 45+2c=3\cdot 21 \\ 45+2b=3\cdot 23 \\ 45+2a=3\cdot 29 \end{cases}$$

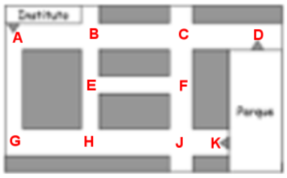
De donde podemos deducir que el mayor de los números es a, y su valor lo deducimos de la ecuación $45+2a=3\cdot 29 \ \rightarrow\ 2a=87-45=42 \ \rightarrow\ a=21$

23*

Fíjate en el plano y di cuántos caminos hay para ir desde la puerta del instituto hasta el parque, sin pasar más de una vez por el mismo sitio. Los rectángulos sombreados representan edificios, por los que no se puede pasar. La puerta del instituto y las dos puertas del parque están señalizadas con triángulos.

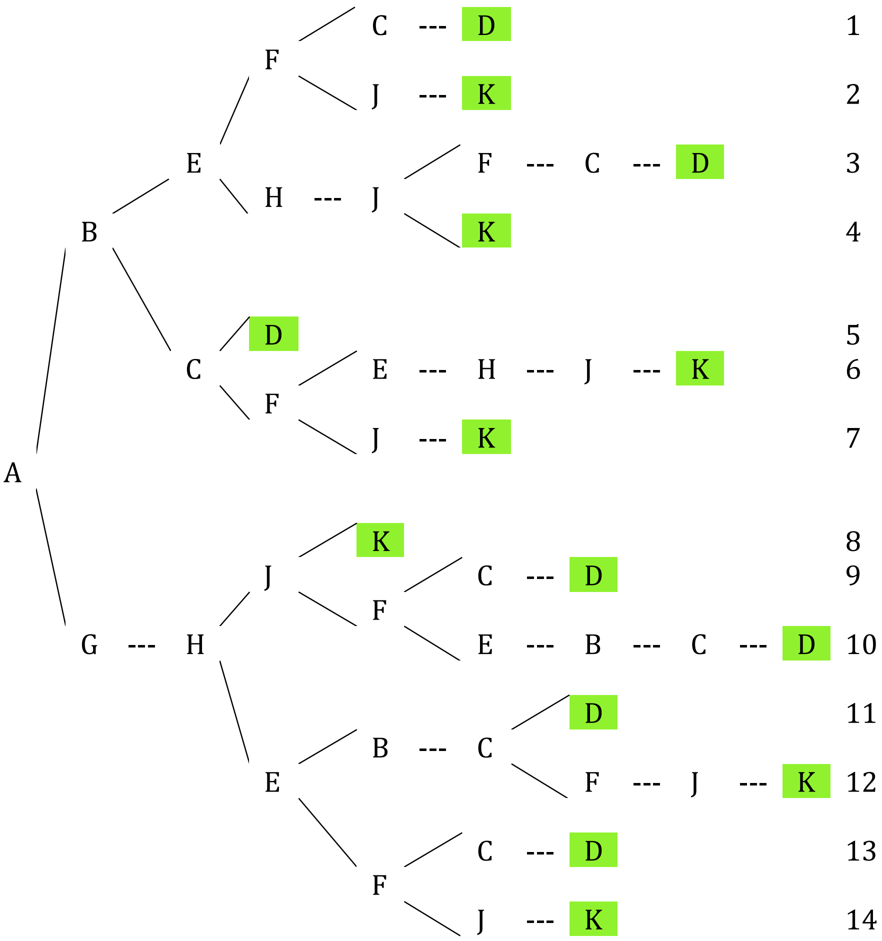
24





Solución:

Nombraremos con letras las puertas y los cruces del plano para que resulte más cómodo representar los movimientos.



En total hay 14 formas de llegar.

26*

El año 2024 comienza en lunes y termina en martes. ¿Cuál será el próximo año que empiece en lunes y acabe en martes?

27

Solución:

Los años no bisiestos empiezan y acaban el mismo día de la semana. Tiene que ser un año bisiesto. Como cualquier año bisiesto que empiece en lunes acabará en martes, nos limitaremos a buscar cuál es el próximo año bisiesto que empiece en lunes.

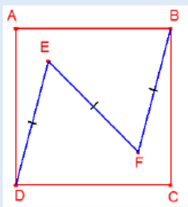
Año bisiesto	Empieza	Termina	Años no bisiestos empiezan y terminan el mismo día
2024	Lunes	Martes	2025 miércoles, 2026 jueves, 2027 viernes
2028	Sábado	Domingo	2029 lunes, 2030 martes, 2031 miércoles
2032	Jueves	Viernes	2033 sábado, 2034 domingo, 2035 lunes
2036	Martes	Miércoles	2037 jueves, 2038 viernes, 2039 sábado
2040	Domingo	Lunes	2041 martes, 2042 miércoles, 2043 jueves
2044	Viernes	Sábado	2045 domingo, 2046 lunes, 2047 martes
2048	Miércoles	Jueves	2049 viernes, 2050 sábado, 2051 domingo
2052	Lunes	Martes	

Año 2052.

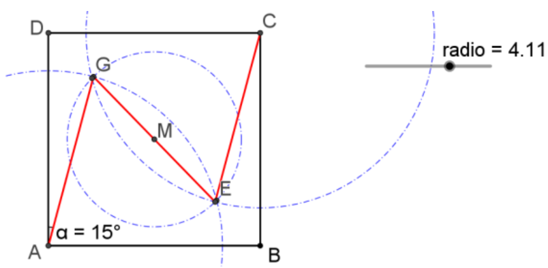
28 ggb

Sean E y F dos puntos interiores al cuadrado ABCD de manera que $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ i que $\overline{DE} // \overline{FB}$.
Sea $\alpha = \angle ADE$.
Determina el valor mínimo del ángulo $\alpha = \angle ADE$.

29



Solución con geogebra:



Para dibujar el cuadrado le daremos una medida cualquiera al lado, por ejemplo 10 cm.

Pasos:

1. Dibujamos un cuadrado (polígono regular) de lado 10.
2. Hallamos el centro del cuadrado M.

3. Creamos un deslizador de número con valor mínimo 2 y máximo 5. Será la distancia entre M y cualquiera de los puntos extremos del segmento (E o G). La distancia entre A y G será el doble de lo que indique el deslizador, al igual que la distancia entre C y E.
4. Para hallar E y G trazamos una circunferencia centrada en M con radio el deslizador y dos centradas en A y C con radio el doble del deslizador. Los puntos de corte nos darán los puntos E y G.
5. Trazamos los tres segmentos: AG, GE y EC.
6. Medimos el ángulo que queremos minimizar y movemos el deslizador hasta obtener el mínimo. Se alcanza cuando el ángulo mide 15°.

Solución analítica:

Sea $\overline{AB} = 1$ el lado del cuadrado ABCD.

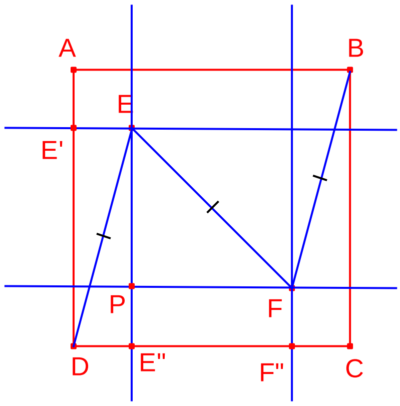
Sea $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB} = x$.

Sea E' la proyección de E sobre el lado $\overline{AD}$.

Sea E" la proyección de E sobre el lado $\overline{CD}$.

Sea F" la proyección de F sobre el lado $\overline{CD}$.

Sea P la proyección de F sobre la recta EE".



$\overline{EE'} = \overline{DE"} = x \cdot sen\,\alpha$

$\overline{DE'} = \overline{EE"} = x \cdot cos\,\alpha$

$\overline{E"F"} = 1 - 2 \cdot \overline{DE"} = 1 - 2x \cdot sen\,\alpha$

$\overline{EP} = 1 - 2\left(1 - \overline{EE"}\right) = 2x \cdot cos\,\alpha - 1$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\Delta}{EPF}$:

$x^2 = (1 - 2x \cdot sen\,\alpha)^2 + (2x \cdot cos\,\alpha - 1)^2$. Simplificando:

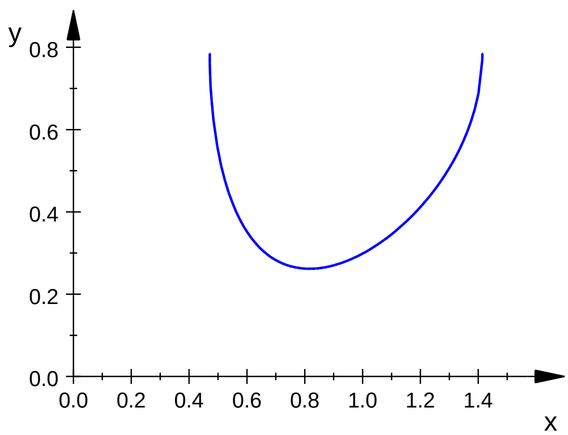
$cos\,\alpha + sen\,\alpha = \frac{2+3x^2}{4x}$

$$\sqrt{2}\,cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2+3x^2}{4x}$$

$$\alpha = f(x) = \frac{\pi}{4} - arc\,cos\left(\frac{2+3x^2}{4\sqrt{2}x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2+3x^2}{4\sqrt{2}x}\right)^2}} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{3x^2 - 2}{x^2}$$

$f'(x) = 0;\ x = \frac{\sqrt{6}}{3}$



Estudiando el signo de la primera derivada $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ es un mínimo relativo estricto.

El valor mínimo del ángulo $\alpha = \angle ADE$ es:

$$\alpha_{mín} = f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$