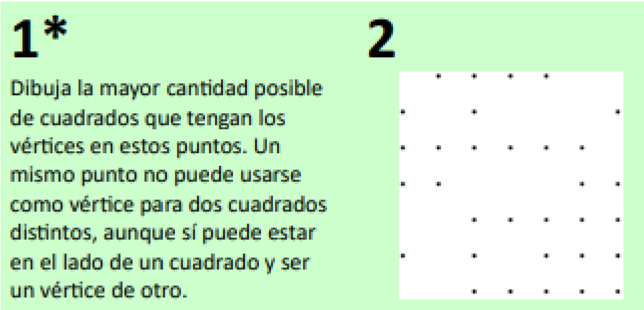
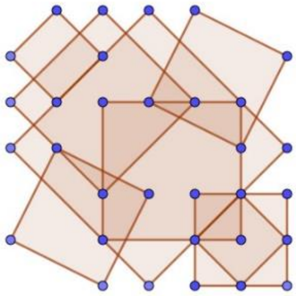
SOLUCIONES ABRIL 2024



1*

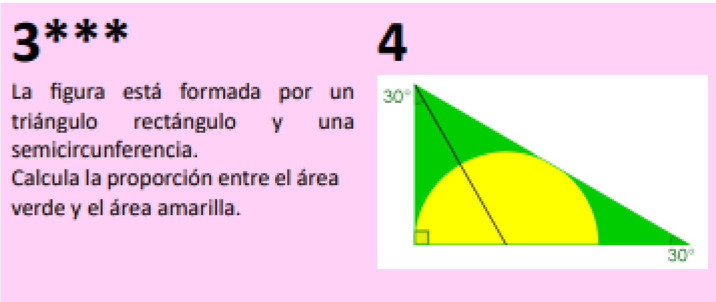
Dibuja la mayor cantidad posible de cuadrados que tengan los vértices en estos puntos. Un mismo punto no puede usarse como vértice para dos cuadrados distintos, aunque sí puede estar en el lado de un cuadrado y ser un vértice de otro.

2



Solución:

Ocho es la cantidad máxima posible, ya que la trama tiene 32 puntos y ninguno de ellos puede ser vértice de más de un cuadrado ($32:4 = 8$).

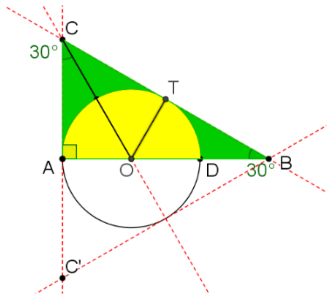


3***

La figura está formada por un triángulo rectángulo y una semicircunferencia.
Calcula la proporción entre el área verde y el área amarilla.

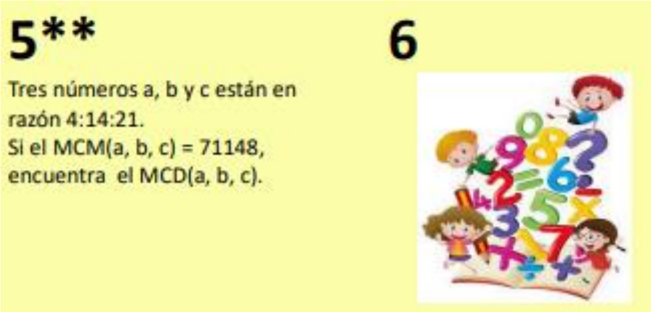
4

Solución:



Se cumple $\overline{OA} = \overline{OT} = \overline{OD} = r$
Por ser una circunferencia inscrita en un triángulo equilátero, el centro está a 1/3 de la base, de donde:
$\overline{OB} = 2r$
En el triángulo AOC se cumple $tg\ 30° = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = r\sqrt{3}$

$$\frac{verde}{amarilla} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3r \cdot r\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi \cdot r^2}{\frac{1}{2}\pi \cdot r^2} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{\pi} \approx 0.6540$$

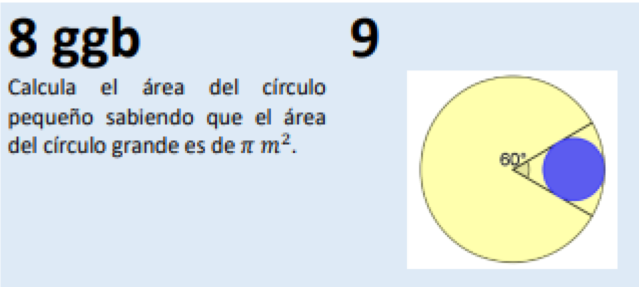


Solución:

Los números tendrán la forma: 4x , 14x y 21x $\rightarrow$ MCM(2^2x,2·7x,3·7x)=2^2·7·3x=84x

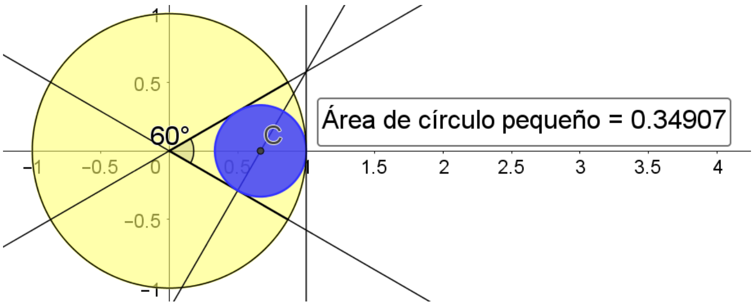
$$84x=71148 \rightarrow x=\frac{71148}{84}=847=7\cdot 11^2 \rightarrow$$

Los números son : $2^2\cdot 7\cdot 11^2$, $2\cdot 7^2\cdot 11^2$ y $3\cdot 7\cdot 11^2$ $\rightarrow$ MCD=$7\cdot 11^2$= **847**



Solución con geogebra:

Para calcular el área del círculo pequeño es necesario tener presente que está inscrito en un triángulo equilátero tal y como se ve en el dibujo:



De que el área del círculo grande sea $\pi\ m^2$, deducimos que el radio de este es de 1 m.

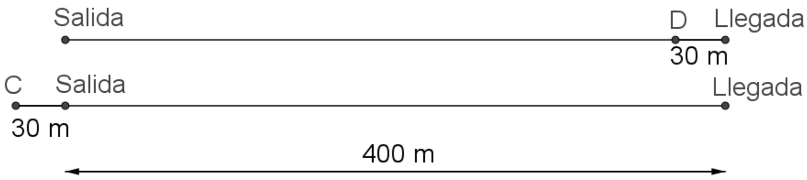
1. Dibujamos la circunferencia centrada en el origen con radio 1.
2. Con ángulo dada su amplitud dibujamos (30° por encima del eje de abscisas uno de los radios y por simetría el otro.

3. Hallamos el punto de intersección de la circunferencia con el eje de abscisas, y en ese mismo punto, la recta tangente a la circunferencia. Con ella tendremos limitado el triángulo equilátero.
4. Para hallar el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, necesitamos dos de las bisectrices de los ángulos. Una coincide con el eje de abscisas, la otra la calculamos con bisectriz. Hallamos el centro de la circunferencia con la intersección de las dos bisectrices.
5. Trazamos la circunferencia pequeña con centro en este punto y pasando por el punto donde hemos trazado la tangente a la circunferencia grande.
6. Con la herramienta área calculamos la del círculo pequeño, que es de $0{,}34907 m^2$.

10** **11**

Carles y Daniel compiten en una carrera de 400 m. Al llegar Carles a la meta, a Daniel le faltan 30 m. Al día siguiente Carles decide salir 30 m atrás del punto de salida. Si ambos corren a la misma velocidad que el día anterior, ¿cómo acabará la carrera?

Solución:



El primer día Carlos recorre 400 m a una velocidad vc.

En el mismo tiempo, Daniel recorre 400−30=370 m a una velocidad vd.

Como $t = \frac{e}{v}$, y los dos tiempos coinciden, podemos plantear la ecuación:

$$t = \frac{e}{v} \rightarrow \quad t_{Carlos} = \frac{400}{vc} = \frac{370}{vd} = t_{Daniel} \quad \rightarrow \quad vd = \frac{370}{400} \cdot vc = 0{,}925 \cdot vc$$

El segundo día, Carlos intenta recorrer 400+30=430 m a la misma velocidad que el día anterior (vc). De la misma manera, Daniel recorre 400 m a la misma velocidad del primer día (vd), e intenta ganar a Carlos.

Si planteamos la ecuación con los datos del segundo día para calcular lo que recorre cada uno:

$$e_{Carlos} = 430 = t \cdot vc \quad \rightarrow \quad t = \frac{430}{vc}$$

$$e_{Daniel} = t \cdot vd = \frac{430}{vc} \cdot 0{,}925 \cdot vc = 397{,}75\ m$$

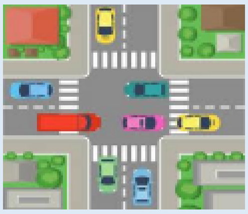
Con lo que el segundo día, en el mismo tiempo, Daniel no llega a recorrer la distancia de 400 m, mientras que Carlos recorre los 430 m, por lo que Carlos será otra vez el ganador.

Otra forma de razonarlo:

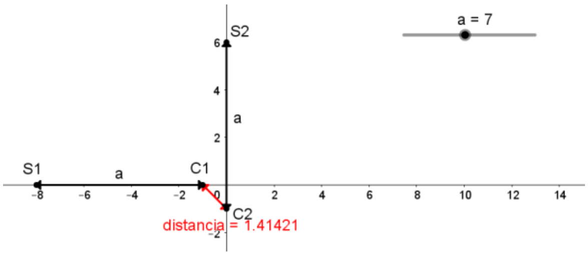
De lo ocurrido el primer día sabemos que, cuando Carlos recorre 400 m, Daniel recorre 370 m. En la carrera del segundo día, cuando Carlos haya recorrido 400 m, Daniel habrá recorrido 370 m y ambos se encontrarán a 30 m de la meta. Dado que Carlos es más veloz que Daniel, Carlos recorrerá los 30 m restantes en menos tiempo y será otra vez el ganador.

12 ggb 13

Dos automóviles van a la misma velocidad sobre dos carreteras que son perpendiculares y en sentido de encuentro. Uno de ellos está a 6 km de la intersección de las dos carreteras y el otro a 8 km. Cuál será la mínima distancia entre los dos automóviles?.



Solución con geogebra:



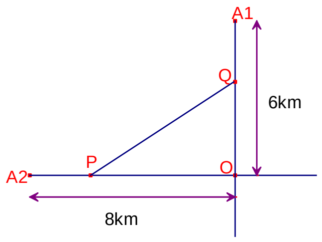
Dos automóviles que van a la misma velocidad recorren el mismo espacio en el mismo tiempo.

Sea a el espacio que recorren los dos automóviles en cierto tiempo.

1. Colocamos las dos salidas, una en el punto $S1(-8{,}0)$ y la otra en $S2(0{,}6)$.
2. Introducimos un deslizador de número entre 0 y 15 con incremento 0.01. Representará la distancia recorrida por ambos coches en un momento determinado.
3. Una vez recorridos a kilómetros, el primer coche se encontrará en $C1(-8 + a, 0)$ y el segundo en $C2(0{,}6 - a)$. Introducimos ambos puntos en la barra de entrada.
4. Trazamos el segmento que une C1 con C2. Su longitud nos indicarà la distancia entre ambos vehículos.

5. Movemos el deslizador hasta obtener la distancia mínima. Se obtiene con a=7, siendo la distancia 1.41421.

Solución analítica:



Dos automóviles que van a la misma velocidad recorren el mismo espacio en el mismo tiempo.

Sea $x = \overline{A_1Q} = \overline{A_2P}$ el espacio que recorren los dos automóviles en cierto tiempo.

$\overline{OQ} = 6 - x,\ \overline{OP} = 8 - x.$

La distancia entre los dos automóviles es:

$\overline{OQ} = 6 - x,\ \overline{OP} = 8 - x.$

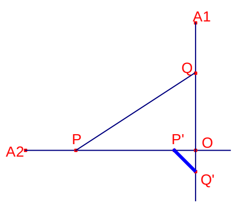
Simplificando: $\overline{PQ} = \sqrt{2x^2 - 28x + 100}$.

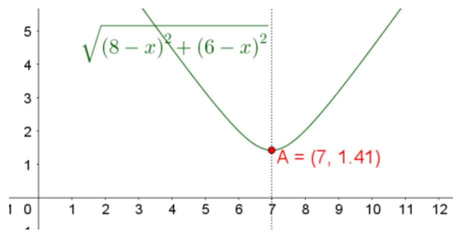
Consideremos la función $f(x) = 2x^2 - 28x + 100.$

La distancia mínima entre los dos automóviles se consigue en el valor mínimo de la función $f(x) = 2x^2 - 28x + 100.$

La función es una parábola cóncava. El mínimo se consigue en el vértice: $x = \frac{28}{2 \cdot 2} = 7.$

La distancia mínima es $\overline{PQ}_{mín} = \sqrt{(6-7)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41$ km.

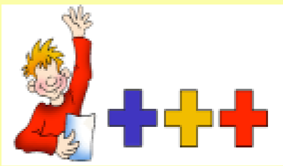




15**

Escribe el número 2024 como suma de varios números naturales consecutivos.

16



Solución:

Para hacerlo, empezaremos por escribirlo como suma de una cantidad impar de números iguales. Después, pasando cantidades de un lado a otro conseguiremos que sean números naturales consecutivos.

Al factorizar el 2024 obtenemos $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

Eso quiere decir que podemos escribir 2024 como $2^3 \cdot 23 = 184$ sumado 11 veces:

2024=184+184+184+184+184+184+184+184+184+184+184

Dejamos el central como está y quitamos de la izquierda para pasar a la derecha:

2024=179+180+181+182+183+184+185+186+187+188+189

También podemos hacerlo sumando 23 veces $2^3 \cdot 11 = 88$:

2024=88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+88+

+88+88+88+88+88+88=

=76+78+79+80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+90+91+92+93+

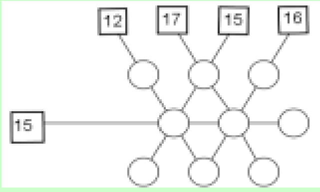
+94+95+96+97+98+99

Sumar 11·23=253 veces el mismo número no es posible, ya que 2024:253=8, que sería el término central, por lo que no podríamos hacer una suma de naturales.

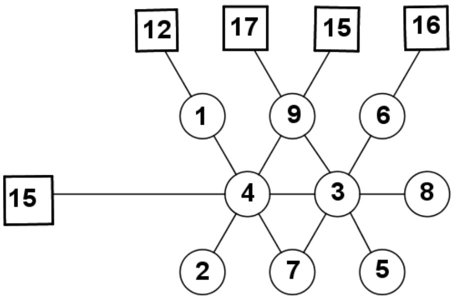
17*

Coloca los números del 1 al 9, sin repetir ninguno, en los círculos en blanco, de manera que la suma de cualesquiera tres números conectados en línea recta sea igual al número situado en el recuadro de la misma línea.

18



Solución:



19***

Si x, y, z son números distintos y las ternas (x, y, z) y (x³, y³, z³) forman progresión aritmética, calcula el valor del número y.

20

Solución:

De que x, y, z estén en progresión aritmética deducimos que $y - x = z - y$.

De la misma forma, $y^3 - x^3 = z^3 - y^3$.

Si factorizamos las diferencias de cubos obtenemos:

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2) = (z - y)(z^2 + yz + y^2) = z^3 - y^3$$

Al ser $y - x = z - y$ podemos simplificar obteniendo:

$$y^2 + xy + x^2 = z^2 + yz + y^2 \quad \rightarrow \quad xy + x^2 = z^2 + yz \quad \rightarrow$$

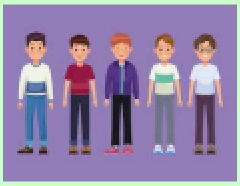
$$\rightarrow \quad x^2 - z^2 = yz - xy \quad \rightarrow \quad (x + z)(x - z) = -y(x - z) \quad \rightarrow \quad y = -(x + z)$$

Por ser x, y, z una progresión aritmética, el término central es la media de los otros dos: $y = \frac{x+z}{2}$.

De las dos igualdades deducimos que $\frac{x+z}{2} = -(x + z) \quad \rightarrow \quad x + z = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

22* 23

Cinco amigos están sentados alrededor de una mesa redonda. El de apellido García está entre López y Martínez. Juan está entre Álex y Pérez. López entre Juan y Pedro. Daniel tiene a Gómez a su izquierda y Martínez a su derecha. ¿Cuál es el apellido de Juan?



Solución:

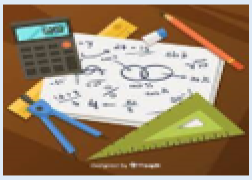
La información que tenemos es:

1	López	García	Martínez
2	Álex	Juan	Pérez
3	Juan	López	Pedro
4	Martínez (a la derecha)	Daniel	Gómez (a la izquierda)

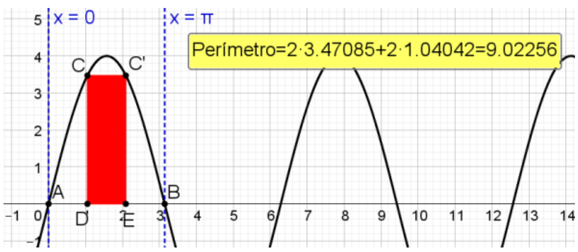
Empezamos por colocar la información 4.
Después la 1.
La siguiente es la 3.
Por fin la 2.
Por lo que Juan se apellida Gómez.

24 ggb 25

En el plano cartesiano consideramos los puntos $A(0,0), B(\pi,0)$ .Sea la región plana limitada por el segmento $\overline{AB}$ el arco de curva de la función $y = 4\,\mathrm{sen}\,x$, con $0 \leq x \leq \pi$. Calcula el máximo perímetro del rectángulo inscrito en la región tal que un lado esté contenido en el segmento $\overline{AB}$.



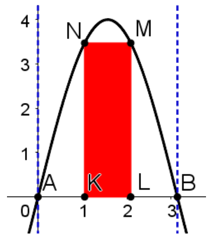
Solución con geogebra:



1. Introducimos en la barra de entrada la función y=4 sen x.
2. Hallamos con intersección entre la función y el eje de abscisas los puntos A y B.
3. Introducimos el punto C sobre la rama izquierda de la función entre A y B.
4. Mediante perpendiculares e intersecciones, hallamos los puntos C', D y E.
5. Trazamos el rectángulo que los une.
6. Cada uno de los segmentos que lo forman tiene una longitud que podemos ver en la vista algebraica.
7. Introducimos en la barra de entrada un número al que llamaremos perímetro que es la resultante de sumar los cuatro segmentos.
8. Movemos el punto C hasta obtener el valor mínimo para el perímetro. Obtenemos 9.02256.

Solución analítica:

La curva $y = 4\,\text{sen}\,x$ es simétrica respecto de la recta $x = \frac{\pi}{2}$



Sea KLMN el rectángulo inscrito en la región.

Por la simetría de la función, $\overline{AK} = \overline{LB} = x$

$\overline{KN} = 4\,\text{sen}\,x$

El perímetro del rectángulo es:

$P(x) = 2(\pi - 2x) + 8\sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Derivamos la función e igualamos a 0:

$$P'(x) = -4 + 8\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

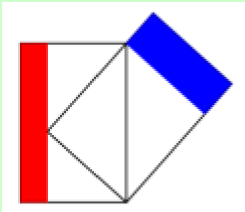
$$x = arc\cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

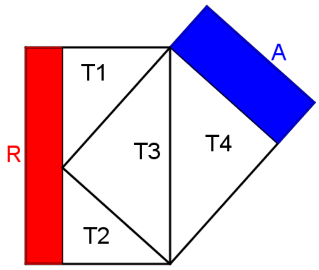
El perímetro máximo se obtiene cuando $x = \frac{\pi}{3}$

El perímetro máximo es aproximadamente $P_{máx} = 2\left(\pi - 2\cdot\frac{\pi}{3}\right) + 8cos\frac{\pi}{3} \cong 9.0226$

26* **27**

Sabiendo que los dos rectángulos grandes son iguales (el de la parte azul se ha obtenido rotando sobre un vértice el de la parte roja),¿cuál es la relación entre las áreas de los rectángulos rojo y azul?





Solución:

Si nombramos los distintos trozos en que queda descompuesto cada rectángulo como se ve en el dibujo, sabemos que las áreas cumplen:

R+T1+T2+T3=A+T3+T4

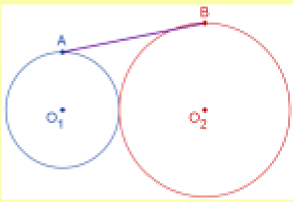
También se cumple que T3=T4 y que T3=T1+T2. Si sustituimos en la primera igualdad, obtendremos:

R+T3+T3=A+T3+T3 → R=A.

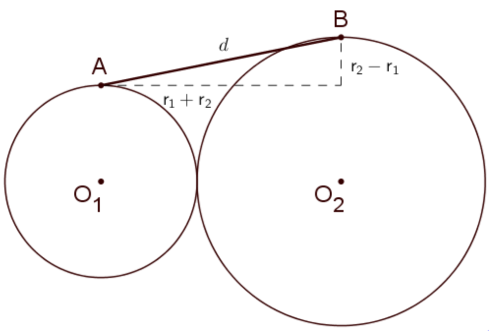
Es decir, el rectángulo azul y el rojo ocupan la misma superficie, sus áreas son iguales.

29** **30**

Las dos circunferencias de la imagen son tangentes con radios distintos r1 y r2. Se trazan radios perpendiculares a la recta que une los centros, que cortan a cada una de las circunferencias en los puntos A y B. Calcula la distancia entre esos dos puntos.



Solución:



Se construye el triángulo de la figura y se calcula d con el Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_2 - r_1)^2$$

$$d^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2$$

$$d = \sqrt{2r_1^2 + 2r_2^2}$$