# SOLUCIONES · OCTUBRE 2024

## 1*

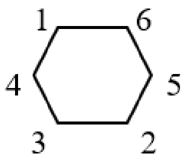
Coloca en los vértices de un hexágono los números del 1 al 6 de modo que al sumar los dos situados en los extremos de cualquier lado siempre obtengamos un número primo.

**SOLUCIÓN:**

Las sumas posibles son:

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | | | 7 | 8 | 9 |
| 4 | | | | 9 | 10 |
| 5 | | | | | 11 |

El 6 sólo puede estar junto al 1 o al 5, con los demás no suma número primo. A partir de ahí se obtiene la solución.




## 2***

**3**

Un triángulo rectángulo tiene 3 lados cuyas longitudes son números enteros.
- La longitud de la hipotenusa corresponde a mi edad.
- La longitud de uno de los otros dos lados es el número obtenido intercambiando las decenas y las unidades de mi edad.
¿Cuántos años tengo?

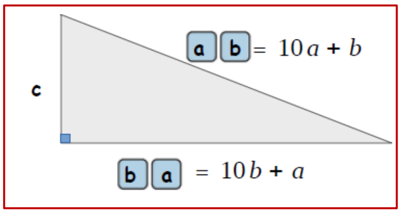
**SOLUCIÓN:**

Sea $\overline{ab}$ mi edad. ($\overline{ab} = 10a + b$)

$a$ y $b$ son dos números enteros inferiores a 10.

$c$ es un número entero.

Como el triángulo es rectángulo se puede aplicar el teorema de Pitágoras y, por lo tanto, el tercer lado cumple:




$c^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2$

Desarrollando y simplificando:

$c^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 - (100b^2 + 20ab + ba^2)$

$c^2 = 99a^2 - 99b^2$

Y ahora factorizando: $c^2 = 99(a^2 - b^2) = 9 \cdot 11 \cdot (a + b) \cdot (a - b)$

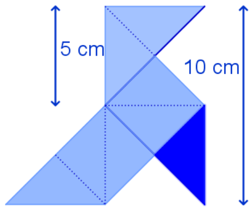
Para que $c$ sea entero se tiene que cumplir que $(a + b) \cdot (a - b) = 11 \cdot n^2$

La única pareja que suma 11 y su diferencia es un cuadrado perfecto es 6 y 5.

Luego **tengo 65 años.**

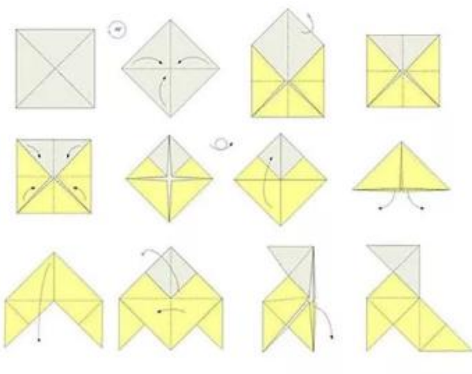
**4**** **5**

Quiero hacer una pajarita de papel que tenga 10 cm de altura. ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado de papel que necesito para hacerla?

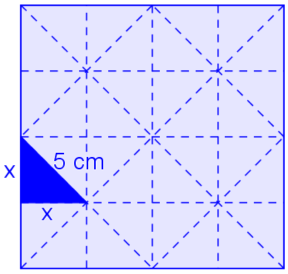



**SOLUCIÓN:**

Lo primero será saber cómo hacer una pajarita de papel. En cualquier libro o página de internet dedicados a papiroflexia (u origami) podemos encontrar las instrucciones:



Una vez hecha, si la deshacemos desplegando el papel, veremos que el cuadrado inicial ha quedado marcado con triángulos rectángulos isósceles de la forma siguiente:




Los dos triángulos oscuros (el de la pajarita y el del desarrollo) son iguales: 5 cm de hipotenusa y catetos x. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$2x^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

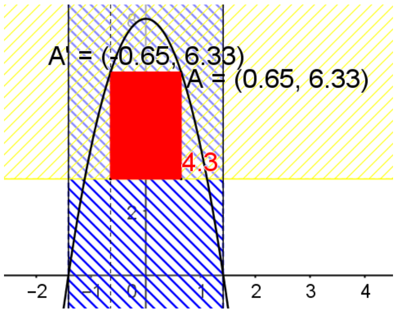
Como el lado del cuadrado de papel mide el cuádruple del cateto, nuestro papel debe medir $l = 4x = 4 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}\ cm$

## 7 ggb 8

Se desea colocar un cartel publicitario rectangular en el hueco que hay debajo de un puente cuya forma viene dada por la parábola

$$y = -4x^2 + 8 \; si \; x^2 \leq 2$$

El cartel debe sujetarse por sus vértices superiores, y la distancia entre la base del cartel y el suelo debe ser de 3 m.
Calcula las dimensiones del cartel para que tenga superficie máxima y las coordenadas de los vértices superiores del cartel.




**SOLUCIÓN CON GEOGEBRA 1:**

Pasos a seguir:

1. Introducimos en la barra de entrada la parábola $y = -4x^2 + 8$ que nos da el hueco del puente, y las inecuaciones $x^2 \leq 2$ (en azul en el dibujo) e $y \geq 3$ (en amarillo).
2. Con punto en objeto ponemos un punto A sobre la parábola que determina el puente.
3. Hallamos el punto A' simétrico de A respecto al eje de ordenadas.
4. Hallamos la recta perpendicular al eje de abscisas que pase por A y la que pase por A' (directamente o por simetría).
5. Los dos puntos B y B' de la base del cartel los hallamos con la intersección de la recta y=3 y estas dos rectas por A y A'.
6. Trazamos el rectángulo por A, A', B y B'. En la vista algebraica vemos la superficie de este.
7. Desplazamos el punto A por la parábola hasta obtener la superficie máxima.

Para A(0.65, 6.33) obtenemos la máxima superficie (4.30 m$^2$).
Los demás vértices son A'(-0.65, 6.33), B(0.65, 3) y B'(-0.65, 3).
El cartel tendría una altura de 6.33-3=3.33 m
Y anchura 0.65·2=1.3 m.

**SOLUCIÓN CON GEOGEBRA 2:**

Los dos puntos del puente en que colocaremos los vértices superiores del cartel tendrán de coordenadas $A(x, -4x^2+8)$ y $A'(-x, -4x^2+8)$.

Los dos vértices inferiores del rectángulo serán $B(x, 3)$ y $B'(-x, 3)$.

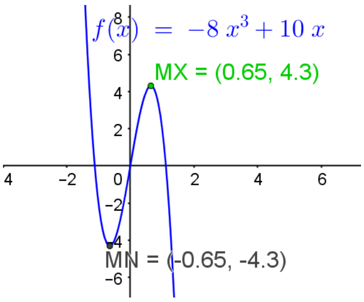
La base medirá 2x, y la altura $-4x^2+8-3=-4x^2+5$.

La superficie del rectángulo será $S(x)=2x\cdot(-4x^2+5)=-8x^3+10x$.

Introducimos esta función en la barra de entrada .

Seleccionamos extremos de la función , y obtenemos MX(0.65, 4.30) y MN(-0.65,-4.30) que son el máximo y el mínimo.

Nos interesa el máximo MX(0.65, 4.30), que nos indica que para x=0.65 se alcanza una superficie máxima de 4.30 m$^2$.




Los puntos serán:

$$A(x, -4x^2+8) = A(0.65, 6.33)$$
$$A'(-x, -4x^2+8) = A'(-0.65, 6.33)$$

Las dimensiones del cartel:
Base= $2x = 1.30\ m$
Altura= $-4x^2+5 = 3.33\ m$

**SOLUCIÓN ANALÍTICA:**

Los dos puntos del puente en que colocaremos los vértices superiores del cartel tendrán de coordenadas $A(x, -4x^2+8)$ y $A'(-x, -4x^2+8)$.

Los dos vértices inferiores del rectángulo serán $B(x, 3)$ y $B'(-x, 3)$.

La base medirá 2x, y la altura $-4x^2+8-3=-4x^2+5$.

La superficie del rectángulo será $S(x)=2x\cdot(-4x^2+5)=-8x^3+10x$.

Para hallar el máximo de la función derivamos:

$$S'(x) = -24x^2 + 10$$

Al igualar a cero, obtenemos que los puntos críticos están en $x = \pm\sqrt{\frac{10}{24}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{6}$

Con la derivada segunda vemos si son máximos o mínimos:

$$S''(x) = -48x$$

$$S''\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) = -48 \cdot \frac{\sqrt{15}}{6} < 0 \quad \rightarrow \quad máximo$$

$$S''\left(-\frac{\sqrt{15}}{6}\right) = -48 \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{6}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad mínimo$$

El máximo se alcanza para $x = \frac{\sqrt{15}}{6} \cong 0.65$

Los puntos serán:

$$A(x, -4x^2 + 8) = A(0.65, 6.33)$$

$$A'(-x, -4x^2 + 8) = A'(-0.65, 6.33)$$

Las dimensiones del cartel:

Base= $2x = 1.30\ m$

Altura= $-4x^2 + 5 = 3.33\ m$

**9**** **10**

De un cubo de 1 m de arista se separa un cubo más pequeño en cada uno de los vértices. Calcula la longitud de la arista de estos cubitos para que el volumen de los cubos extraídos sea el mismo que queda del cubo inicial.

**SOLUCIÓN:**

El volumen de uno de los cubitos es $V_{1\ cubito} = x^3$.

El volumen del cubo original es $V_{cubo} = 1^3 = 1\ dm^3$

Después de separar los ocho cubitos de los vértices, el volumen restante es

$$V_{restante} = V_{cubo} - 8 \cdot V_{1\ cubito} = 1 - 8x^3$$

Como debe quedar tanto como hemos quitado:

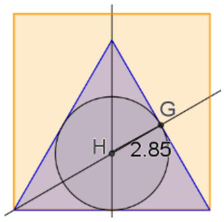
$$V_{restante} = 8 \cdot V_{1\ cubito} \quad \rightarrow \quad 1 - 8x^3 = 8x^3 \quad \rightarrow \quad 1 = 16x^3 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\ cm$$

## 11 ggb 12

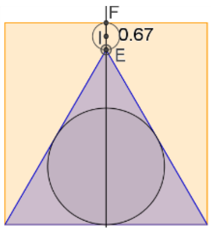
La figura está formada por un cuadrado de 10 cm de lado, un triángulo equilátero y cuatro círculos, todos ellos tangentes a los lados del polígono correspondiente. Halla la longitud de los radios de las circunferencias.

**SOLUCIÓN:**

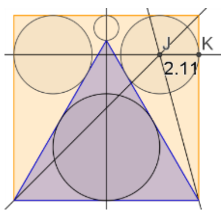
1. Dibujamos con polígono regular el cuadrado de lado 10.
2. Sobre la base, con polígono regular, el triángulo equilátero.
3. Para el círculo inscrito en el triángulo, necesitamos el incentro, que hallamos como intersección de dos bisectrices. Nos interesan la del vértice superior y una de las otras dos. Las trazamos y hacemos la intersección.




4. Hallamos la intersección de una bisectriz con el triángulo y obtenemos un punto de la circunferencia.
5. Con el circuncentro y el punto que acabamos de hallar trazamos la circunferencia.
6. Trazamos el segmento que une ambos puntos, que coincide con el radio y mide 2.85 cm.
7. De la circunferencia pequeña, tenemos un punto, el vértice superior del triángulo.
8. Para hallar el centro, hallamos la intersección de la bisectriz del triángulo con el cuadrado, y con ese punto y el que teníamos, con punto medio del segmento, obtenemos el centro. Ya podemos dibujarla.



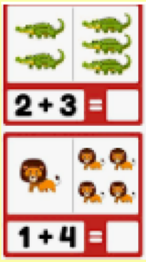

9. El radio, igual que antes, al unir centro y punto, mide 0.67 cm.
10. Para los dos círculos que faltan, basta obtener uno, ya que por simetría podremos obtener el otro.
11. Si prolongamos los lados del triángulo hasta que corten el lado superior del cuadrado, veremos dos triángulos en los que están inscritos los dos círculos, por lo que con el mismo método que hemos empleado para el primer círculo, podremos trazarlos.




12. El radio de ambas medirá 2.11 cm.

## 14** 15

El número 199, ¿se puede expresar como suma de dos números naturales distintos que cumplan que la suma de las cifras de cada uno de los dos números sea la misma?




**SOLUCIÓN:**

Supongamos que 199 se puede representar como la suma de dos números naturales con la misma suma de cifras.

$199 = m + n$, donde $n = \overline{xyz}$ y $m = \overline{abc}$ y $x + y + z = a + b + c$

$$\Rightarrow 199 = \overline{abc} + \overline{xyz} \Rightarrow \overline{xyz} = 199 - \overline{abc} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - a \\ y = 9 - b \\ z = 9 - c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z = 1 - a + 9 - b + 9 - c \Leftrightarrow a + b + c = 19 - (a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow 2(a + b + c) = 19$$

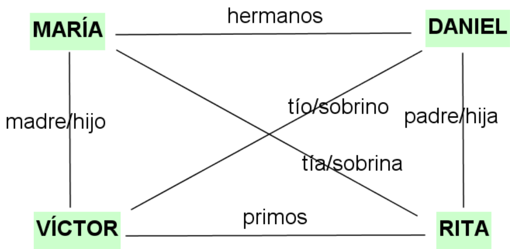
Esta última expresión es imposible ya que el lado derecho es impar y el Izquierdo es par.
Per tanto la respuesta es **no.**

## 16* 17

En una comida familiar están presentes: padre, madre, hijo, hija, tío, tía, hermano, hermana, sobrino, sobrina y dos primos.
¿Cuál es el menor número posible de personas presentes?

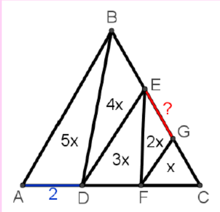
**SOLUCIÓN:**

Cuatro personas son suficientes:



**18*****  **19**

El triángulo equilátero ABC está partido en varios triángulos tal y como se ve en la figura. El área del triángulo GFC es x, la del EFG es 2x, la del DEF es 3x, la del BDE es 4x y la del ABD es 5x.
Si $\overline{AD} = 2\ cm$, ¿cuánto mide $\overline{EG}$?




**SOLUCIÓN:**

- Los triángulos ABD y DBC tienen la misma altura sobre la base AC.
- Sabemos que $S_{ABD} = 5x$, y que $S_{DBC} = 4x + 3x + 2x + x = 10x$.
- Al tener ambos triángulos la misma base y ser la superficie de uno el doble que la del otro, podemos deducir que la base de DBC mide el doble de la de ABD, es decir, sabemos que $\overline{DC} = 4\ cm$.
- Si hacemos lo mismo con los triángulos DEF y FEC, vemos que tienen la misma altura y que se cumple $S_{DEF} = 3x$, y que $S_{FEC} = 2x + x = 3x$, de donde deducimos que las dos bases miden lo mismo: $\overline{DF} = \overline{FC}$.
- Como $\overline{DC} = \overline{DF} + \overline{FC} = 2\overline{DF} = 4 \quad \to \quad \overline{DF} = \overline{FC} = 2\ cm$.
- Pasamos a los triángulos CFG y GFE. Tienen la misma altura sobre $\overline{BC}$.
  Al tener uno el doble de superficie que el otro, una base será el doble de la otra, es decir: $\overline{GE} = 2\overline{CG}$
- Pasamos a los triángulos BED y ECD. Tienen la misma altura sobre $\overline{BC}$.
  Las superficies son: $S_{BED} = 4x$, y que $S_{ECD} = 3x + 2x + x = 6x$, de donde podemos deducir la relación entre las bases: $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{4}{6} \quad \to \quad \overline{BE} = \frac{4\overline{EC}}{6}$.
- Como sabemos que el triángulo ABC es equilátero, todos los lados miden $6\ cm$.

$$\overline{BC} = 6 = \overline{BE} + \overline{EG} + \overline{GC} = \frac{4\overline{EC}}{6} + \overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG} =$$

$$= \frac{4\left(\overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG}\right)}{6} + \overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG}$$

$$\overline{BC} = 6 = \frac{2}{3}\overline{EG} + \frac{1}{3}\overline{EG} + \overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG} = \frac{5}{2}\overline{EG} \quad \to$$

$$\overline{EG} = 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4\ cm$$

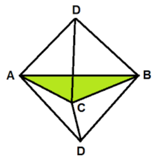
## 21* 22

Con nueve palillos iguales, ¿cuál es la mayor cantidad de triángulos equiláteros iguales que puedo formar?
Nota: no se pueden cortar ni pueden sobresalir.

**SOLUCIÓN:**

Con seis palillos puedo formar un tetraedro, con lo que ya tendríamos cuatro triángulos equiláteros iguales.

Con los tres que quedan, formamos sobre una de las caras otra pirámide y obtendríamos un total de 7 triángulos.




## 23 ggb 24

Tengo 50 apartamentos para alquilar. Si pido 800 € al mes, los alquilo todos. Por cada 25 € que subo el precio, alquilo un apartamento menos. Si está ocupado, los costes de mantenimiento de un apartamento son de 50 € al mes. ¿Cuánto he de pedir para maximizar beneficios?

**SOLUCIÓN:**

Llamaremos x al número de veces que añado 25 € a los 800 € iniciales del precio de alquiler. Evidentemente, $0 \leq x \leq 50$.

El precio del alquiler de un apartamento sería entonces $800 + 25x$.

El número de apartamentos alquilados sería $50 - x$.

Los ingresos serían $(800 + 25x) \cdot (50 - x)$

La función que nos dará los beneficios en función del número de apartamentos alquilados la hallaremos restando a los ingresos los gastos de mantenimiento de los apartamentos alquilados:

$$B(x) = (800 + 25x) \cdot (50 - x) - 50 \cdot (50 - x) = (750 + 25x) \cdot (50 - x)$$

Introducimos en la barra de entrada la función y buscamos sus extremos relativos. Dado que es una polinómica de grado 2, es una parábola y sólo obtenemos un máximo en el punto (10, 40 000).

Al introducir la función, seguramente no la veremos en la pantalla, debido a que los ejes estarán definidos para unos valores demasiado pequeños.

Si seleccionamos la función en la vista algebraica, obtendremos las coordenadas.

También podemos modificar en la vista gráfica el tamaño de los ejes, dando poca amplitud al eje de abscisas, mientras que el de ordenadas grande y sólo con positivos.

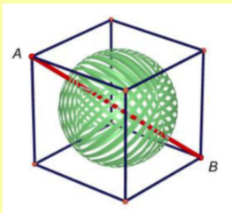
Hemos obtenido que el máximo se alcanza para x=10, por lo que alquilaremos 40 apartamentos a un precio de 800+10·25=1050 €.

Los beneficios obtenidos serán de 40 000 €.

## 25**

## 26

La figura está formada por un cubo de 7 cm de diagonal y una esfera inscrita en el mismo.
Halla la superficie y el volumen de la esfera.




**SOLUCIÓN:**

Sea $a$ la arista del cubo. Al estar la esfera inscrita, la longitud del diámetro coincide con la de la arista.

El radio de la esfera inscrita es $a/2$.

La diagonal del cubo es:

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = 7$$

$$r = \frac{1}{2}a = \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

La superficie de la esfera es:

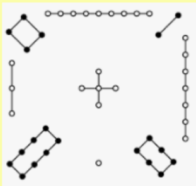
$$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{49}{3}\pi\ cm^2$$

El volumen:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4\cdot 343}{3\cdot 8\cdot 3\sqrt{3}}\pi = \frac{343}{18\sqrt{3}}\pi \cong 34{,}56295\ cm^3$$

**28**  29**

Usando todos los divisores del número 100 y sin repetir ninguno, construye un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3.
Todos los productos horizontales, verticales y diagonales deben dar el mismo resultado, llamado constante mágica. Hállala.



**SOLUCIÓN:**

Lo primero será tener los divisores de 100:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

Los divisores son 1, 100, 2, 50,4, 25, 5, 20, 10. En total nueve números.

El producto de los nueve números es $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 100 = 10^9$

Que es lo que obtendríamos al multiplicar las tres líneas horizontales (o las tres verticales), y como los tres resultados deben ser iguales, la constante mágica debe ser $10^3$.

Veamos los productos posibles:

| | |
|---|---|
| 100·10·1 | 25·20·2 |
| 100·5·2 | 25·10·4 |
| 50·20·1 | 20·10·5 |
| 50·10·2 | |
| 50·5·4 | |

Para completar una tabla 3x3, el número que coloquemos en la posición central formará parte de cuatro de los productos: los dos diagonales, uno vertical y uno horizontal. Si revisamos los productos posibles, el 10 es el único factor que aparece cuatro veces, así que podemos empezar a rellenar el cuadrado mágico.

Los números que ocupen los cuatro vértices aparecerán en tres de los productos, (uno horizontal, uno vertical y otro diagonal) por lo tanto son el 2, 5, 20 y 50.

Los cuatro que faltan aparecen en dos productos (uno horizontal y otro vertical): el 1, 4, 25 y 100.

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 100 | 2 |
| 4 | 10 | 25 |
| 50 | 1 | 20 |

**30***

El producto de tres números naturales distintos es 6336. Si el mayor es doce veces el menor, ¿cuál es la suma de los tres números?

**31**

**SOLUCIÓN:**

Llamaremos a los tres números A, B y C, con A<B<C.

Como C=12·A, se cumple que $6336 = A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot 12A = 12 \cdot A^2 \cdot B \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad A^2 \cdot B = \frac{6336}{12} = 528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 = 16 \cdot 3 \cdot 11 = 4^2 \cdot 33$$

De esto deducimos que A=4 y B=33.

C=12A=12·4=48.

Los tres números que buscamos son 4, 33 y 48.

Podemos comprobar que 4·33·48=6336

La suma de los tres números es S=4+33+48=85