

SOLUCIONS · OCTUBRE 2024

1*

Col·loca als vèrtexs d'un hexàgon els números de l'1 al 6 de manera que, en sumar els dos situats als extrems de qualsevol costat, sempre obtinguem un nombre primer.

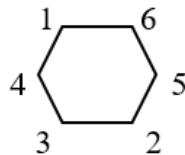


SOLUCIÓ:

Les sumes possibles són:

	2	3	4	5	6
1	3	4	5	6	7
2		5	6	7	8
3			7	8	9
4				9	10
5					11

El 6 només pot estar al costat de l'1 o del 5, amb els altres no suma nombre primer.
A partir d'ací s'obté la solució:



2***

3

Un triangle rectangle té 3 costats les longituds dels quals són nombres enters.

- La longitud de la hipotenusa correspon a la meua edat.
 - La longitud d'un dels altres dos costats és el nombre obtingut intercanviant les desenes i les unitats de la meua edat.
- Quants anys tinc?



SOLUCIÓ:

Siga $\overline{ab}$ la meua edat. ($\overline{ab} = 10a + b$)

a i b són dos nombres enters inferiors a 10.

c és un nombre enter.

Com que el triangle és rectangle es pot aplicar el teorema de Pitàgores i, per tant, el tercer costat compleix:

$$c^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2$$

Desenvolupant i simplificant:

$$c^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 - (100b^2 + 20ab + ba^2)$$

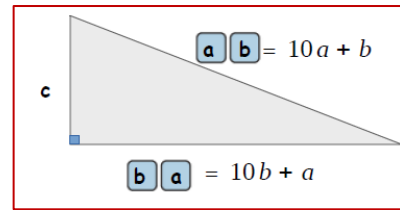
$$c^2 = 99a^2 - 99b^2$$

I ara, factoritzant: $c^2 = 99(a^2 - b^2) = 9 \cdot 11 \cdot (a + b) \cdot (a - b)$

Perquè c siga enter s'ha de complir que $(a + b) \cdot (a - b) = 11 \cdot n^2$

L'única parella que suma 11 i la seua diferència és un quadrat perfecte és 6 i 5.

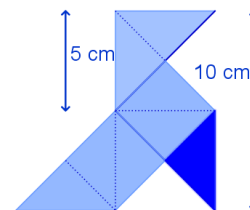
Aleshores **tinc 65 anys**.



4**

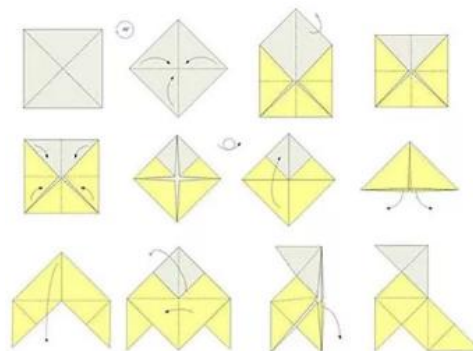
Vull fer un ocellet de paper que tinga 10 cm d'alçada. Quant ha de mesurar el costat del quadrat de paper que necessite per fer-lo?

5

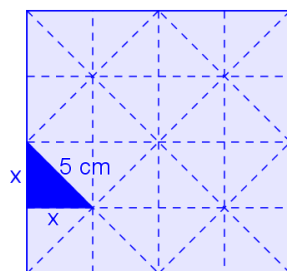


SOLUCIÓ:

La primera cosa serà saber com fer un ocellet de paper. A qualsevol llibre o pàgina d'internet dedicats a papiroflèxia (o origami) podem trobar les instruccions:



Un cop feta, si la desfem desplegant el paper, veurem que el quadrat inicial ha quedat marcat amb triangles rectangles isòsceles de la forma següent:



Els dos triangles foscos (el de l'ocellet i el del desenvolupament) són iguals: 5 cm d'hipotenusa i catets x . Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$2x^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

Com que el costat del quadrat de paper mesura el quàdruple del catet, el nostre paper ha de mesurar $l = 4x = 4 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$

7 ggb

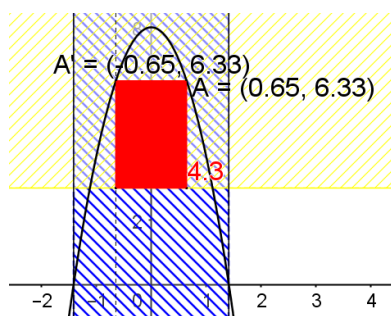
8

Es vol col·locar un cartell publicitari rectangular al buit que hi ha davall d'un pont la forma del qual ve donada per la paràbola

$$y = -4x^2 + 8 \text{ si } x^2 \leq 2$$

El cartell s'ha de subjectar pels seus vèrtexs superiors, i la distància entre la base del cartell i el terra ha de ser de 3 m.

Calcula les dimensions del cartell perquè tinga superfície màxima i les coordenades dels vèrtexs superiors del cartell.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA 1:

Passos a seguir:

1. Introduïm en la barra d'entrada la paràbola $y = -4x^2 + 8$ que ens dona el buit del pont, i les inequacions $x^2 \leq 2$ (en blau al dibuix) i $y \geq 3$ (en groc).
2. Amb punt en objecte posem un punt A sobre la paràbola que determina el pont.
3. Trobem el punt A' simètric d'A respecte a l'eix d'ordenades.
4. Trobem la recta perpendicular a l'eix d'abscisses que passa per A i la que passa per A' (directament o per simetria).
5. Els dos punts B i B' de la base del cartell els trobem amb la intersecció de la recta $y = 3$ i aquestes dues rectes per A i A'.
6. Tracem el rectangle per A, A', B i B'. En la vista algebraica veiem la superfície d'aquest.
7. Desplacem el punt A per la paràbola fins obtenir la superfície màxima.

Per a A(0.65, 6.33) obtenim la màxima superfície (4.30 m²).

Els altres vèrtexs són $A'(-0.65, 6.33)$, $B(0.65, 3)$ i $B'(-0.65, 3)$.

El cartell tindria una altura de $6.33-3=3.33$ m

I amplària $0.65 \cdot 2 = 1.3$ m.

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA 2:

Els dos punts del pont en què col·locarem els vèrtexs superiors del cartell tindran de coordenades $A(x, -4x^2 + 8)$ i $A'(-x, -4x^2 + 8)$.

Els dos vèrtexs inferiors del rectangle seran $B(x, 3)$ i $B'(-x, 3)$.

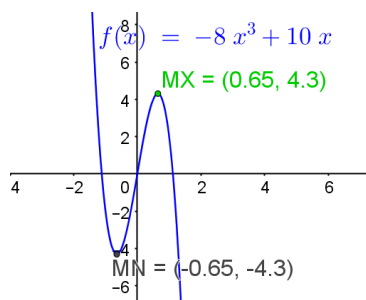
La base mesurarà $2x$, i l'altura $-4x^2 + 8 - 3 = -4x^2 + 5$.

La superfície del rectangle serà $S(x) = 2x \cdot (-4x^2 + 5) = -8x^3 + 10x$.

Introduïm aquesta funció en la barra d'entrada .

Seleccionem extrems de la funció, i obtenim $MX(0.65, 4.30)$ i $MN(-0.65, -4.30)$ que son el màxim i el mínim.

Ens interessa el màxim $MX(0.65, 4.30)$, que ens indica que per a $x=0.65$ s'aconsegueix una superfície màxima de 4.30 m^2 .



Els punts seran:

$$A(x, -4x^2 + 8) = A(0.65, 6.33)$$

$$A'(-x, -4x^2 + 8) = A'(-0.65, 6.33)$$

Les dimensions del cartell:

$$\text{Base} = 2x = 1.30 \text{ m}$$

$$\text{Altura} = -4x^2 + 5 = 3.33 \text{ m}$$

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Els dos punts del pont en què col·locarem els vèrtexs superiors del cartell tindran de coordenades $A(x, -4x^2 + 8)$ i $A'(-x, -4x^2 + 8)$.

Els dos vèrtexs inferiors del rectangle seran $B(x, 3)$ i $B'(-x, 3)$.

La base mesurarà $2x$, i l'altura $-4x^2 + 8 - 3 = -4x^2 + 5$.

La superfície del rectangle serà $S(x) = 2x \cdot (-4x^2 + 5) = -8x^3 + 10x$.

Per calcular el màxim de la funció derivem:

$$S'(x) = -24x^2 + 10$$

En igualar a zero, obtenim que els punts crítics estan en $x = \pm \sqrt{\frac{10}{24}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{6}$

Amb la derivada segona veiem si són màxims o mínims:

$$S''(x) = -48x$$

$$S''\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) = -48 \cdot \frac{\sqrt{15}}{6} < 0 \rightarrow \text{màxim}$$

$$S''\left(-\frac{\sqrt{15}}{6}\right) = -48 \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{6}\right) > 0 \rightarrow \text{mínim}$$

El màxim s'aconsegueix per a $x = \frac{\sqrt{15}}{6} \cong 0.65$

Els punts seran:

$$A(x, -4x^2 + 8) = A(0.65, 6.33)$$

$$A'(-x, -4x^2 + 8) = A'(-0.65, 6.33)$$

Les dimensions del cartell:

$$\text{Base} = 2x = 1.30 \text{ m}$$

$$\text{Altura} = -4x^2 + 5 = 3.33 \text{ m}$$

9**

10

D'un cub d'1 m d'aresta se separa un cub més petit a cadascun dels vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta d'aquests cubs perquè el volum dels cubs extrets siga el mateix que queda del cub inicial.



SOLUCIÓ:

El volum d'un dels cubs menuts és $V_{1 \text{ cub minut}} = x^3$.

El volum del cub original és $V_{\text{cub}} = 1^3 = 1 \text{ dm}^3$

Després de separar els vuit cubs dels vèrtexs, el volum restant és

$$V_{\text{restant}} = V_{\text{cub}} - 8 \cdot V_{1 \text{ cub minut}} = 1 - 8x^3$$

Com ha de quedar tant com hem tret:

$$V_{\text{restant}} = 8 \cdot V_{1 \text{ cub minut}} \rightarrow 1 - 8x^3 = 8x^3 \rightarrow 1 = 16x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \text{ cm}$$

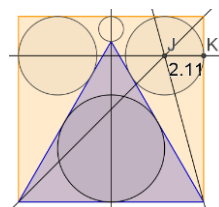
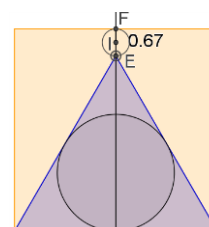
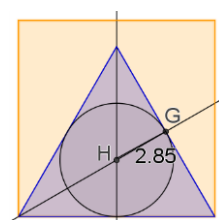
11 ggb**12**

La figura està formada per un quadrat de 10 cm de costat, un triangle equilàter i quatre cercles, tots tangents als costats del polígon corresponent.

Calcula la longitud dels radis de les circumferències.

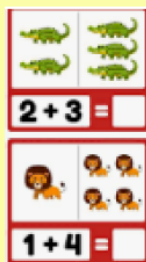
**SOLUCIÓ:**

1. Dibuixem amb polígon regular el quadrat de costat 10.
2. Sobre la base, amb polígon regular, el triangle equilàter.
3. Per al cercle inscrit al triangle, necessitem l'incentre, que trobem com a intersecció de dues bisectrius. Ens interessen la del vèrtex superior i una de les altres dues. Les tracem i fem la intersecció.
4. Trobem la intersecció d'una bisectriu amb el triangle i obtenim un punt de la circumferència.
5. Amb el circumcentre i el punt que acabem de trobar tracem la circumferència.
6. Tracem el segment que uneix els dos punts, que coincideix amb el radi i mesura 2.85 cm.
7. De la circumferència menuda tenim un punt, el vèrtex superior del triangle.
8. Per calcular el centre, trobem la intersecció de la bisectriu del triangle amb el quadrat, i amb aquest punt i el que teníem, amb punt mig del segment, obtenim el centre. Ja podem dibuixar-la.
9. El radi, igual que abans, en unir centre i punt, mesura 0.67 cm.
10. Per als dos cercles que falten, només cal obtenir-ne un, ja que per simetria podrem obtenir l'altre.
11. Si prolonguem els costats del triangle fins que tallen el costat superior del quadrat, veurem dos triangles en què estan inscrits els dos cercles, per la qual cosa amb el mateix mètode que hem emprat per al primer cercle, podrem traçar-los.
12. El radi d'ambdós mesura 2.11 cm.



14****15**

El número 199, es pot expressar com a suma de dos nombres naturals diferents que complisquen que la suma de les xifres de cadascun dels dos números siga la mateixa?

**SOLUCIÓ:**

Suposem que 199 es pot representar com la suma de dos nombres naturals amb la mateixa suma de xifres.

$$199 = m + n, \text{ on } n = \overline{xyz}, m = \overline{abc} \text{ i } x + y + z = a + b + c$$

$$\Rightarrow 199 = \overline{abc} + \overline{xyz} \Rightarrow \overline{xyz} = 199 - \overline{abc} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - a \\ y = 9 - b \\ z = 9 - c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z = 1 - a + 9 - b + 9 - c \Leftrightarrow a + b + c = 19 - (a + b + c) \Leftrightarrow 2(a + b + c) = 19$$

Aquesta última expressió és impossible ja que el costat dret és imparell i l'esquerre és parell.

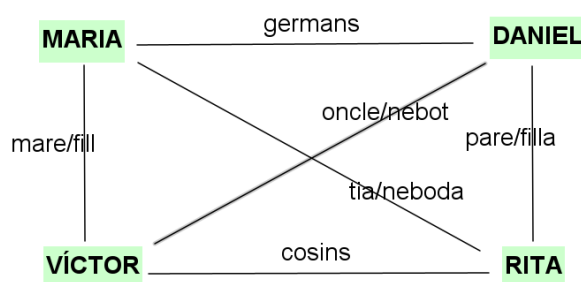
Per tant, la resposta és **no**.

16***17**

En un dinar familiar hi són presents: pare, mare, fill, filla, oncle, tia, germà, germana, nebot, neboda i dos cosins. Quin és el menor nombre possible de persones presents?

**SOLUCIÓ:**

Quatre persones són suficients:

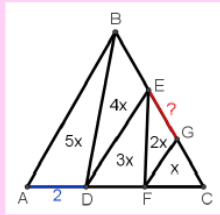


18***

El triangle equilàter ABC està partit en diversos triangles tal com es veu a la figura. L'àrea del triangle GFC és x , la del EFG és $2x$, la del DEF és $3x$, la del BDE és $4x$ i la del ABD és $5x$.

Si $\overline{AD} = 2 \text{ cm}$, quant mesura $\overline{EG}$?

19



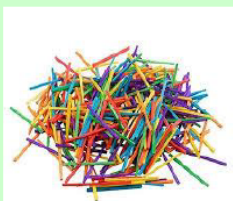
SOLUCIÓ:

- Els triangles ABD i DBC tenen la mateixa altura sobre la base AC.
- Sabem que $S_{ABD} = 5x$, i que $S_{DBC} = 4x + 3x + 2x + x = 10x$.
- Com que tots dos triangles tenen la mateixa base i la superfície d'un és el doble que la de l'altre, podem deduir que la base de DBC mesura el doble de la d'ABD, és a dir, sabem que $\overline{DC} = 4 \text{ cm}$.
- Si fem el mateix amb els triangles DEF i FEC, veiem que tenen la mateixa altura i que es compleix $S_{DEF} = 3x$, i que $S_{FEC} = 2x + x = 3x$, d'on deduïm que les dues bases mesuren el mateix: $\overline{DF} = \overline{FC}$.
- Com $\overline{DC} = \overline{DF} + \overline{FC} = 2\overline{DF} = 4 \rightarrow \overline{DF} = \overline{FC} = 2 \text{ cm}$.
- Passem als triangles CFG i GFE. Tenen la mateixa altura sobre $\overline{BC}$. Com que un té el doble de superfície que l'altre, una base serà el doble de l'altra, és a dir: $\overline{GE} = 2\overline{CG}$.
- Passem als triangles BED i ECD. Tenen la mateixa altura sobre $\overline{BC}$. Les superfícies són: $S_{BED} = 4x$ i $S_{ECD} = 3x + 2x + x = 6x$, d'on podem deduir la relació entre les bases: $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{4}{6} \rightarrow \overline{BE} = \frac{4\overline{EC}}{6}$.
- Com que sabem que el triangle ABC és equilàter, tots els costats mesuren 6 cm .

$$\begin{aligned} \overline{BC} = 6 &= \overline{BE} + \overline{EG} + \overline{GC} = \frac{4\overline{EC}}{6} + \overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG} = \\ &= \frac{4\left(\overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG}\right)}{6} + \overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG} \\ \overline{BC} = 6 &= \frac{2}{3}\overline{EG} + \frac{1}{3}\overline{EG} + \overline{EG} + \frac{1}{2}\overline{EG} = \frac{5}{2}\overline{EG} \rightarrow \\ \overline{EG} &= 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ cm} \end{aligned}$$

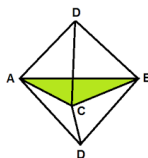
21***22**

Amb nou escuradents iguals, quina és la major quantitat de triangles equilàters iguals que puc formar?
Nota: no es poden tallar ni poden sobreixir.

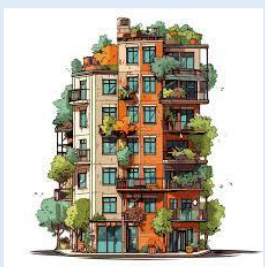
**SOLUCIÓ:**

Amb sis escuradents puc formar un tetraedre, de manera que ja tindríem quatre triangles equilàters iguals.

Amb els tres que queden, formem sobre una de les cares una altra piràmide i obtindríem un total de 7 triangles.

**23 ggb****24**

Tinc 50 apartaments per llogar. Si demane 800 € al mes, els llogue tots. Per cada 25 € que apuge el preu, llogue un apartament menys. Si està ocupat, els costos de manteniment d'un apartament són de 50 € al mes. Quant he de demanar per maximitzar beneficis?

**SOLUCIÓ:**

Anomenarem x al nombre de vegades que afegim 25 € als 800 € inicials del preu de lloguer. Evidentment, $0 \leq x \leq 50$.

El preu del lloguer d'un apartament seria $800 + 25x$.

El nombre d'apartaments llogats seria $50 - x$.

Els ingressos serien $(800 + 25x) \cdot (50 - x)$

La funció que ens donarà els beneficis en funció del nombre d'apartaments llogats la trobarem restant als ingressos les despeses de manteniment dels apartaments llogats:

$$B(x) = (800 + 25x) \cdot (50 - x) - 50 \cdot (50 - x) = (750 + 25x) \cdot (50 - x)$$

Introduïm en la barra d'entrada la funció i busquem els extrems relatius. Com que és una funció polinòmica de grau 2, el gràfic és una paràbola i només obtenim un màxim en el punt (10, 40 000).

En introduir la funció, segurament no la veurem a la pantalla, ja que els eixos estaran definits per a uns valors massa menuts.

Si seleccionem la funció en la vista algebraica, obtindrem les coordenades.

També podem modificar en la vista gràfica la mida dels eixos, donant poca amplitud a l'eix d'abscisses, i per al d'ordenades amplitud gran i només valors positius.

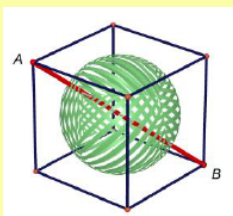
Hem obtingut que el màxim s'aconsegueix per a $x = 10$, per la qual cosa llogarem 40 apartaments a un preu de $800 + 10 \cdot 25 = 1050$ €.

Els beneficis obtinguts seran de 40 000 €.

25**

La figura està formada per un cub de 7 cm de diagonal i una esfera inscrita en el mateix. Troba la superfície i el volum de l'esfera.

26



SOLUCIÓ:

Siga a l'aresta del cub. Com que l'esfera està inscrita, la longitud del diàmetre coincideix amb la de l'aresta.

El radi de l'esfera inscrita és $a/2$.

La diagonal del cub és:

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = 7$$

$$r = \frac{1}{2}a = \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

La superfície de l'esfera és:

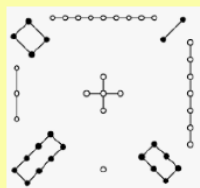
$$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{49}{3}\pi \text{ cm}^2$$

El volum:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4 \cdot 343}{3 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{3}}\pi = \frac{343}{18\sqrt{3}}\pi \cong 34,56295 \text{ cm}^3$$

28****29**

Usant tots els divisors del número 100 i sense repetir-ne cap, construeix un quadrat màgic multiplicatiu d'ordre 3. Tots els productes horitzontals, verticals i diagonals han de donar el mateix resultat, anomenat constant màgica. Troba-la.

**SOLUCIÓ:**

La primera cosa serà obtenir els divisors de 100:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

Els divisors són 1, 100, 2, 50, 4, 25, 5, 20, 10. En total 9 nombres.

El producte dels nou nombres és $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 100 = 10^9$

Açò és el que obtindríem en multiplicar les tres línies horitzontals (o les tres verticals), i com que els tres resultats han de ser iguals, la constant màgica ha de ser 10^3 .

Vegem els productes possibles:

$$100 \cdot 10 \cdot 1 \quad 25 \cdot 20 \cdot 2$$

$$100 \cdot 5 \cdot 2 \quad 25 \cdot 10 \cdot 4$$

$$50 \cdot 20 \cdot 1 \quad 20 \cdot 10 \cdot 5$$

$$50 \cdot 10 \cdot 2$$

$$50 \cdot 5 \cdot 4$$

Per completar una taula 3x3, el nombre que col·loquem a la posició central formarà part de quatre dels productes: els dos diagonals, un vertical i un horitzontal. Si revisem els productes possibles, el 10 és l'únic factor que apareix quatre vegades, així que podem començar a emplenar el quadrat màgic.

Els números que ocupen els quatre vèrtexs apareixeran en tres dels productes, (un horitzontal, un vertical i un altre diagonal). Per tant, són el 2, 5, 20 i 50.

Els quatre que falten apareixen en dos productes (un horitzontal i un altre vertical): l'1, 4, 25 i 100.

5	100	2
4	10	25
50	1	20

30*

El producte de tres nombres naturals diferents és 6336. Si el més gran és dotze vegades el menor, quina és la suma dels tres números?

31



SOLUCIÓ:

Anomenarem als tres nombres A, B i C, amb $A < B < C$.

Com $C = 12 \cdot A$, es compleix que $6336 = A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot 12A = 12 \cdot A^2 \cdot B \rightarrow$

$$\rightarrow A^2 \cdot B = \frac{6336}{12} = 528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 = 16 \cdot 3 \cdot 11 = 4^2 \cdot 33$$

D'açò deduïm que $A=4$ i $B=33$.

$C=12A=12 \cdot 4=48$.

Els tres números que busquem són 4, 33 i 48.

Podem comprovar que $4 \cdot 33 \cdot 48 = 6336$

La suma dels tres nombres és $S=4+33+48=85$